ПИЛООБРАЗНЫЕ ВОЛНЫ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Назаров В.Е., Кияшко С.Б.

Институт прикладной физики РАН, 603950, Нижний Новгород, Ульянова 46

Проведено теоретическое исследование характеристик продольной бегущей периодической пилообразной волны в кольцевом резонаторе с квадратичной упругой нелинейностью и линейной диссипацией при его гармоническом возбуждении. На основе решений Хохлова и Фея, описывающих форму пилообразной волны и ее спектр, получены аналитические выражения, определяющие амплитуду волны в резонаторе, резонансную кривую резонатора и его нелинейную добротность.

Уравнение состояния среды с квадратичной нелинейностью и линейной диссипацией, обусловленной ее вязкостью и теплопроводностью, имеет вид:

$$\boxed{\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma\varepsilon^2] + \alpha\rho\dot{\varepsilon},}$$

где σ , ε и $\dot{\varepsilon}$ - продольные напряжение, деформация и скорость деформации, E - модуль упругости, γ - параметр нелинейности, α - коэффициент диссипации, ρ - плотность, $|\gamma\varepsilon| << 1$, $\alpha\omega^2 / C_0^2 << 1$, $C_0^2 = E/\rho$

Подставляя в уравнение движения $\boxed{\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)}$, где U - смещение, и переходя к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$ $x = x'$ получим

уравнение Бюргерса $$\boxed{\frac{\partial V}{\partial x} = \eta V \frac{\partial V}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}}$$

$\eta = \gamma / C_0^2$ $\mu = \alpha / 2C_0^3$ $V(x,\tau) = \partial U(x,\tau)/\partial\tau$

Вводя новые переменные $W(z,\theta) = V(x,\tau)/V_0$ $\theta = \omega\tau$ $z = \gamma\omega V_0 x / C_0^2$

получаем уравнение Бюргерса в безразмерном виде $\boxed{\frac{\partial W}{\partial z} = W\frac{\partial W}{\partial \theta} + \Gamma\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}}$

Где $\Gamma = \alpha\omega / 2\gamma C_0 V_0$, V_0 , ω - характерные амплитуда и частота волны.

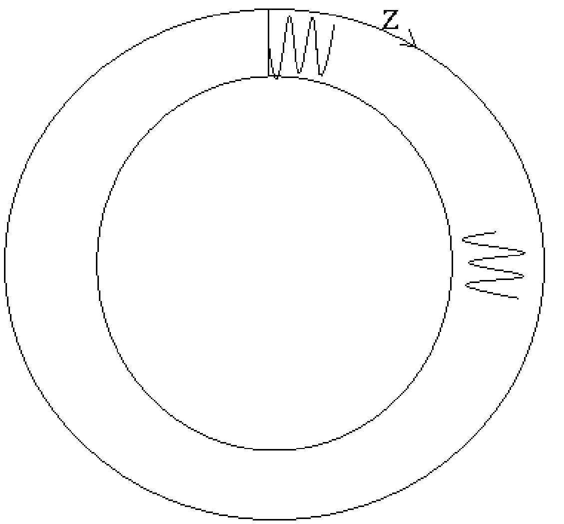
Для него известно **решение Хохлова:**

$$\boxed{W(z,\theta) = \frac{1}{1+z}\left[-\theta + \pi th\left(\frac{\pi\theta}{2\Gamma(1+z)}\right)\right]} \qquad |\theta| < \pi$$

$$W(z = const, \theta = \pm\infty) = \mp\infty$$

Решение обладает "нефизической" особенностью, связанной с тем, что на расстоянии $z = z_0 \cong (\pi^2 / 2\Gamma) - 1 > 0$ волна затухает практически до нуля и инвертируется, т.е. ее фаза (или полярность) изменяется на π . В результате, амплитуда волны с ростом координаты ведет себя немонотонно: в начале (при $z < z_0$ она уменьшается и достигает минимума (вблизи точки $z = z_0$) а затем, при $z > z_0$ – растет, достигает некоторого максимума и только потом асимптотически стремится к нулю.

Ряд Фурье предыдущего решения: Решение Фея



$$\boxed{W(z,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\Gamma\sin n\theta}{sh[n\Gamma(1+z)]}}$$

$$\Gamma=\alpha\omega/2\gamma C_0 V_0$$

$$z=\gamma\omega V_0 x/C_0^2$$

При гармоническом возбуждении кольцевого резонатора в нем установится бегущая пилообразная волна, при этом для амплитуды $W_1(L)=V_1(L)/V_0$ ее первой гармоники будет выполняться соотношение:

$$\boxed{W_1(L)=W_1(L)\exp\{-ik_p L[1+\Delta_p-i\delta_{nl}(L)]\}+(v_0/V_0)} \qquad (1)$$

Где $k_p=\omega_p/C_0$ - волновые числа резонатора, $\omega_p=2\pi p C_0/L$ - его резонансные частоты, p - номер моды ($p=1,2,3\ldots$), L - длина кольцевого резонатора, $\Delta_p=(\omega-\omega_p)/\omega_p$, $|\Delta_p|<<1/p$, $Q_p=\dfrac{C_0 L}{\pi p\alpha}=\dfrac{Q_1}{p}$ - линейная добротность p -ой моды резонатора, $Q_1=\dfrac{C_0 L}{\pi\alpha}$

ν_0 - амплитуда накачки, а нелинейные потери $\delta_{nl}(L)$ определяется затуханием первой гармоники из решения Фея

$$\exp[-k_p L\delta_{nl}(L)]=\frac{sh[\Gamma(V_0)]}{sh\{[1+z_L(V_0)]\Gamma(V_0)\}}\approx\frac{1}{1+z_L(V_0)}<1$$

Из уравнения (1), при $2\pi p\left|\Delta_p\right| << 1$, $2\pi p\delta_{nl}(L) << 1$ получаем выражение для резонансной кривой резонатора:

$$W_1(L) = \frac{(\nu_0 / V_0)}{2\pi p\sqrt{\Delta_p^2 + (\gamma V_0 / C_0)^2}} \qquad (2)$$

$$V_1(L) = \frac{2V_0\Gamma(V_0)}{sh\{[1 + z_L(V_0)]\Gamma(V_0)\}} \approx \frac{2V_0}{1 + z_L(V_0)} \qquad (3)$$

Из уравнений (2), (3) получаем уравнения для амплитуд

$$\varepsilon_1(L) = \frac{e_0}{2\pi p\sqrt{\Delta_p^2 + (\gamma\varepsilon_0)^2}} \qquad \varepsilon_1(L) \approx \frac{2\varepsilon_0}{1 + 2\gamma\pi p\varepsilon_0} \qquad \varepsilon_0 \approx \frac{\varepsilon_1(L)}{2[1 - \pi p\gamma\varepsilon_1(L)]}$$

где $e_0 = \nu_0 / C_0$ $\quad z_L(\varepsilon_0) = 2\gamma\pi p\varepsilon_0$ $\quad \Gamma(\varepsilon_0) = (\gamma Q_p\varepsilon_0)^{-1}$

В резонансе $\varepsilon_{1,res} = \dfrac{e_0}{2\pi p\gamma\varepsilon_{0,res}} = \dfrac{2\varepsilon_{0,res}}{1 + 2\pi p\gamma\varepsilon_{0,res}} = \dfrac{2(\pi p\gamma)^{-1}}{1 + \sqrt{1 + 4(\pi p\gamma e_0)^{-1}}} \approx \sqrt{\dfrac{e_0}{\pi p\gamma}} >> e_0$

$$\varepsilon_{0,res} = \frac{e_0[1 + \sqrt{1 + 4(\pi p\gamma e_0)^{-1}}]}{4} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e_0}{\pi p\gamma}} >> e_0 \qquad Q_{p,nl} \approx \frac{2(\pi p\gamma e_0)^{-1}}{1 + \sqrt{1 + 4(\pi p\gamma e_0)^{-1}}} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi p\gamma e_0}} < Q_p$$

$Y_1(\Delta_p) = \varepsilon_1(L) / \varepsilon_{1,res}$ $\Delta_p = (\omega - \omega_p) / \omega_p$

Нормированные резонансные кривые

$Y_1(\Delta_p)$ при $\gamma = 5$ $p = 10$

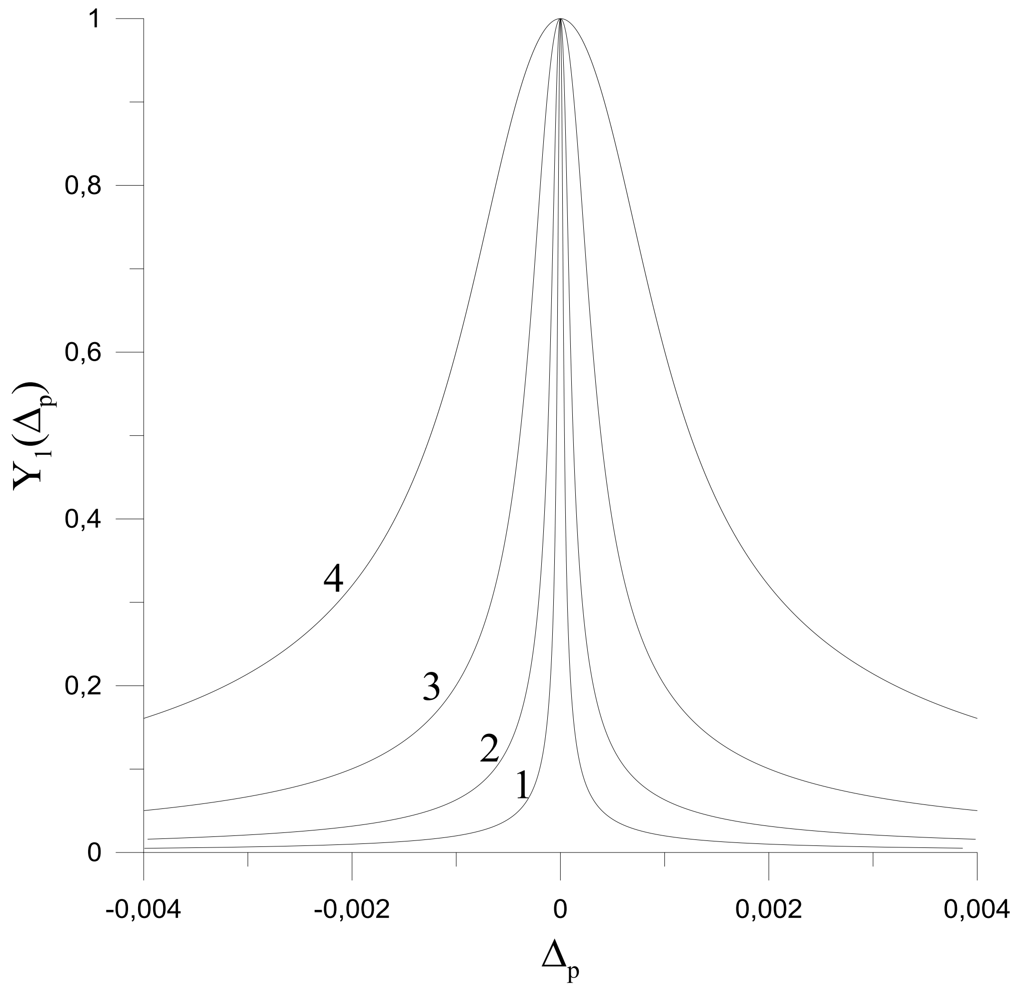
и различных значениях e_0 :

1 - $e_0 = 10^{-8}$, 2 - $e_0 = 10^{-7}$,

3 - $e_0 = 10^{-6}$, 4 - $e_0 = 10^{-5}$.

$e_0 = \nu_0 / C_0$

ν_0 - амплитуда гармонической накачки



Работа выполнена в рамках Госзадания ИПФ РАН по теме №0035-2019-0009, № 0030-2019-0020 и частично поддержана РФФИ (грант N20-02-00215A).