

Труды XXIV научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»**

Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

ЗАДЕРЖКА РАСПАДА МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ШУМОМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОШИ

А.А. Дубков¹⁾, Б. Спаньоло²⁾, Б. Дыбиц³⁾, Д. Валенти²⁾

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Университет г. Палермо (Италия)

³⁾ Ягеллонский университет (Краков, Польша)

В работе исследуются временные характеристики аномальной диффузии в форме полетов Леви в потенциале $U(x)$, описываемой следующим уравнением Ланжевена для координаты частицы $x(t)$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -U'(x) + \xi_\alpha(t). \quad (1)$$

Здесь: $\xi_\alpha(t)$ – белый шум с устойчивым симметричным распределением Леви, α – индекс Леви ($0 < \alpha < 2$). Соответствующее (1) уравнение Фоккера-Планка с дробной пространственной производной для плотности вероятностей переходов $P(x, t|x_0, 0)$ имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + D \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha}, \quad (2)$$

где D – параметр, характеризующий интенсивность шума в том смысле, что облако аномальных частиц расплывается во времени по закону $(D)^{1/\alpha}$.

Согласно определению [1], среднее время пребывания частицы в интервале (L_1, L_2) при бесконечном времени наблюдения может быть найдено по формуле:

$$T(x_0) = \int_0^\infty Pr(t, x_0) dt, \quad (3)$$

где

$$Pr(t, x_0) = \int_{L_1}^{L_2} P(x, t|x_0, 0) dx \quad (4)$$

представляет собой вероятность обнаружения частицы в указанном интервале в момент времени t , когда она стартует из точки $x_0 \in (L_1, L_2)$. Заметим, что формула (3) применима только для потенциала со стоком, когда соответствующий интеграл сходится. Подставляя (4) в (3) и меняя порядок интегрирования, приходим к:

$$T(x_0) = \int_{L_1}^{L_2} Y(x, x_0) dx, \quad (5)$$

где

$$Y(x, x_0) = \int_{L_1}^{L_2} P(x, t|x_0, 0) dt. \quad (6)$$

Интегрируя обе части уравнения (2) по t от 0 до ∞ с учетом очевидного начального условия $P(x, 0|x_0, 0) = \delta(x - x_0)$ и условия наличия стока в потенциальном профиле $P(x, \infty|x_0, 0) = 0$, получаем следующее уравнение для функции $Y(x, x_0) = \delta(x - x_0)$:

$$\frac{d}{dx}[U'(x)Y] + D \frac{d^\alpha Y}{d|x|^\alpha} = -\delta(x - x_0). \quad (7)$$

Переходя к изображению по Фурье функции $Y(x, x_0)$:

$$\tilde{Y}(k, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, x_0) e^{ikx} dx \quad (8)$$

и вводя вспомогательную функцию

$$G(k, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{Y}(k, x_0), \quad (9)$$

можно привести выражение (5) для среднего времени пребывания к виду:

$$T(x_0) = \int_{x_0}^{L_2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} G(k, z) \frac{e^{-ikL_2} - e^{-ikL_1}}{\pi ik} dk \right\} dz, \quad (10)$$

где функция $G(k, x_0)$ в случае гладкого потенциального профиля $U(x)$ находится из решения линейного дифференциального уравнения:

$$U' \left(-i \frac{d}{dk} \right) G - iD|k|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} k G = e^{ikx_0}, \quad (11)$$

а $\operatorname{sgn} x$ – знаковая функция. Аналитически решить уравнение (11) для произвольного индекса Леви α не представляется возможным, поэтому далее ограничимся случаем белого шума с устойчивым распределением Коши ($\alpha = 1$).

Рассмотрим полеты Леви в метастабильном кубическом потенциале $U(x) = -\frac{x^3}{3} + a^2x$ со стоком справа (см. рис. 1).

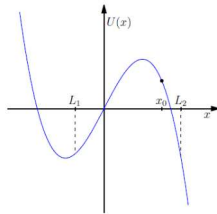


Рис. 1

Подставляя рассматриваемый потенциал в формулу (11) и полагая $\alpha = 1$, приходим к уравнению:

$$\frac{d^2 G}{dk^2} + (a^2 - iD \operatorname{sgn} k) G = e^{ikx_0}, \quad (12)$$

ограниченное решение которого в области $k > 0$ записывается в виде:

$$G(k, x_0) = C e^{-\lambda k} + \frac{e^{ikx_0}}{a^2 - x_0^2 - iD}. \quad (13)$$

Здесь: C – произвольная константа, а $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, причем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (a^4 + D^2)^{1/4} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{D}{a^2} \right) \right], \\ \lambda_2 &= (a^4 + D^2)^{1/4} \cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{D}{a^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для отыскания неизвестной комплексной постоянной C применим вытекающие из уравнения (13) условия непрерывности функции $G(k, x_0)$ и ее первой производной в точке $k = 0$. Это дает:

$$C = -\frac{D(x_0 + \lambda_2 + i\lambda_1)}{\lambda_1[(a^2 - x_0^2)^2 + D^2]}. \quad (15)$$

Подставляя (13) и (15) в общее соотношение (10) и вычисляя внутренний интеграл, получаем окончательное выражение для среднего времени пребывания частицы в интервале (L_1, L_2) :

$$\begin{aligned} T(x_0) &= \frac{D}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \left(A \frac{z + \lambda_2}{\lambda_1} + B \right) \frac{dz}{(z^2 - a^2)^2 + D^2} \\ &+ \frac{D}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \ln \left| \frac{z - L_1}{z - L_2} \right| \frac{dz}{(z^2 - a^2)^2 + D^2} + \int_{x_0}^{L_2} \frac{(z^2 - a^2) dz}{(z^2 - a^2)^2 + D^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \arctan \frac{\lambda_2 + L_2}{\lambda_1} - \arctan \frac{\lambda_2 + L_1}{\lambda_1}, \\ B &= \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1^2 + (L_2 + \lambda_2)^2}{\lambda_1^2 + (L_1 + \lambda_2)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В пределе $D \rightarrow 0$ из (17) находим:

$$T_d = \int_{x_0}^{L_2} \frac{dz}{z^2 - a^2}. \quad (18)$$

Для $x_0 < a < L_2$ интеграл в (18) расходится, что означает невозможность для частицы в отсутствие шума преодолеть потенциальный барьер, расположенный в точке $x = a$. При начальном расположении частицы за барьером: $a < x_0 < L_2$ приходим из (18) к выражению для времени выхода частицы из области через правую границу:

$$T_d = \frac{1}{2a} \ln \frac{(L_2 - a)(x_0 + a)}{(L_2 + a)(x_0 - a)}, \quad (19)$$

На основе квадратурной формулы (17) проанализирована зависимость нормированного на «динамическое» время (19) среднего времени пребывания

аномальной частицы в интервале (L_1, L_2) от параметра интенсивности шума D при различных положениях левой и правой границ. В начальный момент времени частица помещалась на правый склон потенциального барьера $x_0 > a$ (см. рис. 1). Рис. 2 и рис. 3 демонстрируют немонотонное поведение с характерным максимумом, что свидетельствует о задержке шумом распада метастабильного состояния или, другими словами, о повышении шумом устойчивости системы. Это явление с конструктивной ролью шума, связанное с наличием обратного вероятностного потока частиц через потенциальный барьер, хорошо известно для броуновской диффузии [2] и анализировалось во многих работах (см., например, обзор [3]). Аналитические результаты, показанные пунктирными линиями, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования исходного уравнения Ланжевена (1) (точные значки). С расширением левой границы интервала область эффекта и величина максимума увеличиваются (см. рис. 2, где другие параметры $x_0 = 2.2$, $a = 1$, $L_2 = 3$), в то время как при увеличении правой границы наблюдается обратная картина (см. рис. 3, где другие параметры $x_0 = 1.5$, $a = 1$, $L_1 = 0$), объясняемая сдвигом области к стоку.

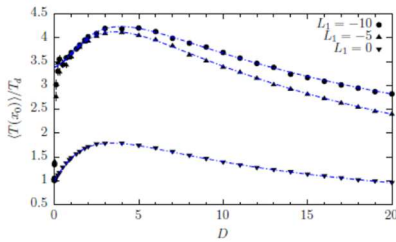


Рис. 2

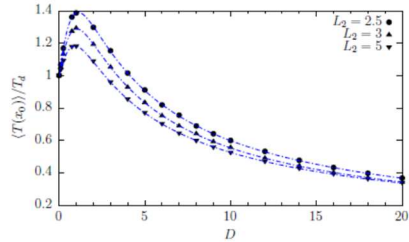


Рис. 3

- [1] Dybiec B., Gudowska-Nowak E., Barkai E., Dubkov A.A. // Phys. Rev. E 2017. Vol. 95. P. 052102.
- [2] Agudov N.V., Spagnolo B. // Phys. Rev. E 2001. Vol. 64. P. 035102(R).
- [3] Ibrahim R.A. // J. Vibr. Contr. 2006. Vol. 12. P. 1093.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ БЛОКОВОГО ПЕРЕМЕЖИТЕЛЯ ДЛЯ OFDM-СИСТЕМ СВЯЗИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРОВ РАДИОКАНАЛА

К.В. Горохов, А.В. Колобков, Д.В. Хитева

АО «НПП «Полет»

Вследствие многолучевого распространения в линиях связи, возникают ошибки, которые группируются в пакеты. Чтобы преобразовать групповые ошибки в одиночные, которые может исправить помехоустойчивый кодек, используется перемежение. В работе проведено исследование влияния структуры и параметров блокового битового перемежителя на помехоустойчивость OFDM-системы связи со сверточным кодированием в двулучевом канале с релейскими замираниями.

Исследование проведено посредством компьютерного моделирования OFDM-системы радиосвязи, содержащей N поднесущих с шагом T^{-1} в полосе $f_s = N/T$. Из них первые N_A «активных поднесущих» используются для передачи информации посредством m -позиционной фазовой манипуляции (m PSK). Остальные $N_{VS} = N - N_A$ «виртуальные поднесущие» передаются с нулевыми амплитудами и образуют защитный интервал по частоте. В передатчике комплексная огибающая OFDM-символа в виде $M_{ix} = N + N_G$ отсчетов формируется посредством обратного дискретного преобразования Фурье N отсчетов в частотной области и добавлением N_G отсчетов защитного интервала во времени в виде циклического префикса длительностью $T_G = N_G / f_s$. В качестве модели канала рассмотрена модель Ваттерсона [1], описывающая двулучевой канал с интервалом многолучевости τ и статистически эквивалентными релейскими замираниями в каждом луче с относительной скоростью $F_d T$. С точки зрения приема такой канал – один из наиболее сложных, поскольку для него характерны глубокие интерференционные провалы. В приемнике после удаления циклического префикса и дискретного преобразования Фурье поднесущие принятого OFDM-символа корректируются в эквалайзере и затем используются для восстановления переданного сообщения. В данном исследовании был применен оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки эквалайзер [2], использующий идеальные оценки канальной матрицы. Данный эквалайзер учитывает рассеяние канала по частоте, поэтому способен обеспечивать эффективную работу в каналах с быстрыми замираниями.

Для исправления ошибок было применено кодирование сверточным кодом. Рассмотрено два вида кодера: «CC7» [3] с восьмеричными образующими коэффициентами $(G_1, G_2) = (133, 171)_8$ и длиной кодового ограничения $K = 7$ и «CC3» с $(G_1, G_2) = (5, 7)_8$, $K = 3$. Для независимого декодирования сообщения на интервале передачи отдельного OFDM-символа с m PSK использовалось обнуление состояния кодера в начале OFDM-символа так, что информационные биты в кодере преобразовывались в $N_b = N_A \cdot \log_2 m$ передаваемых бит. Передаваемые биты накапливались в буфере блокового перемежителя «ВІ» длиной $L = N_s N_b$ бит. После его заполнения выполнялась запись передаваемых бит в $N_r \times N_c$ таблицу по столбцам с последующим считыванием по строкам, где N_r – число строк перемежителя, а N_c – число столбцов. Результат перестановки сохранялся в буфер канальных бит, содержимое которого

использовалось для манипуляции поднесущих N_s OFDM-символов. В приемнике после депережежения мягких решений, представляющих собой отсчеты принятых поднесущих с выхода эквалайзера, осуществлялось их декодирование по алгоритму Витерби.

В работе [4] проведено исследование зависимости длины блокового перемежителя от времени когерентности канала T_c . В результате было получено значение, обеспечивающее компромисс между повышением помехоустойчивости и увеличением задержки передачи сообщения. Рекомендованная длина «ВІ», выраженная в OFDM-символах, определяется как

$$N_s^{(rec)} \approx 10 \frac{T_c}{(T + T_G)} \tag{1}$$

Для «ВІ» было определено существование оптимального числа строк $N_r^{(opt)}$ для каждой длины перемежителя, при котором помехоустойчивость системы максимальна.

Существование оптимального числа строк блокового перемежителя ставит вопрос о конкретном определении данного значения в зависимости от параметров радиоканала и OFDM-системы. Для решения этой задачи было проведено моделирование с числом поднесущих $35 \leq N \leq 140$ и относительной скоростью замираний $0,003 < F_d T < 0,5$. Определено, что $N_r^{(opt)}$ остается постоянным при разном числе поднесущих и зависит только от скорости замираний. Это продемонстрировано на рис. 1, где построены зависимости вероятности битовой ошибки P_b при среднем отношении «сигнал/шум» $\langle E_b/N_0 \rangle = 10$ дБ для «ВІ» с рекомендованной длиной $N_s^{(rec)}$. Здесь и далее все графики построены с расстоянием между лучами $\tau_0 f_s = 6$ отсчетов при 2PSK с кодированием «СС7», если не указано иное. Как видно из рис. 1, на значение $N_r^{(opt)}$ не влияет изменение N , но влияет $F_d T$.

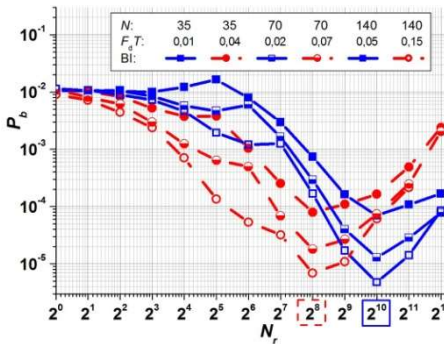


Рис. 1

$F_d T$	$N_s^{(rec)}$	CC7		CC3	
		$N_r^{(opt)}$	$N_c^{(opt)}$	$N_r^{(opt)}$	$N_c^{(opt)}$
$(N, N_A) = (140, 128)$					
0,29	32	128	32	256	16
0,15	64	256	32	512	16
0,05	256	1024	32	2048	16
$(N, N_A) = (70, 64)$					
0,15	64	128	32	256	16
0,07	128	256	32	512	16
0,02	512	1024	32	2048	16
$(N, N_A) = (35, 32)$					
0,07	128	128	32	256	16
0,04	256	256	32	512	16
0,01	1024	1024	32	2048	16

Установлено, что для «ВІ» длиной $N_s^{(rec)}$ оптимальное число столбцов $N_c^{(opt)}$ остается константой при изменении всех параметров радиоканала и зависит только от принятой системы кодирования информации. Это продемонстрировано на примере

данных из таблицы, где приведены значения $N_r^{(opt)}$ и соответствующие им $N_c^{(opt)}$, полученные в результате моделирования работы перемежителя «В1» при $\langle E_b/N_0 \rangle = 10$ дБ (для «СС7») и 14 дБ (для «СС3»). Таким образом, из результатов моделирования следует

$$N_c^{(opt)} \geq kv, \tag{2}$$

где v – конструктивная длина кода, $v = K - 1$; k – целое число, которое определяется в зависимости от скорости сверточного кода. Для кодов «СС3» и «СС7», имеющих скорость $1/2$, $k = 5$. Результат (2) можно прокомментировать следующим образом. При декодировании по принципу максимального правдоподобия сверточный код способен исправить e_r ошибок в пределах закодированного информационного блока от $3K$ до $5K$ бит, где $e_r = d/2 - 1$, d_t – свободное расстояние кода. Выбор $N_c^{(opt)}$ по формуле (2) позволяет при депережеении разнести групповые ошибки по разным информационным блокам и декодировать их независимо друг от друга, что повышает эффективность кодека. Полученный результат (2) согласуется с данными, приведенными в [5].

Встает вопрос о влиянии $\langle E_b/N_0 \rangle$ на определенное по (2) оптимальное число столбцов «В1». На рис. 2, где $N = 35$, $N_s^{(rec)}$, $F_d T = 0,07$, продемонстрированы результаты оценки интервала значений N_c , при которых $P_b(N_c)$ отличались от $P_b(N_c^{(opt)})$ не более чем на 0,5. Нижняя и верхняя границы обозначены как «LB» и «UB», соответственно. Как видно из рис. 2, с увеличением $\langle E_b/N_0 \rangle$ интервал, в рамках которого можно ошибиться в выборе $N_c^{(opt)}$, практически не теряя в помехоустойчивости, сужается, соответственно возрастает значимость $N_c^{(opt)}$, определенного по (2). Таким образом, установлено, что чем больше $\langle E_b/N_0 \rangle$, тем большее влияние оказывает соотношение числа строк и столбцов «В1» на помехоустойчивость системы связи.

Формулу для расчета оптимального числа строк блочного перемежителя с длиной $N_s = N_s^{(rec)}$ в OFDM-системе со сверточным кодированием можно записать в следующем виде:

$$N_r^{(opt)} \approx \frac{N_s N_A \log_2 m}{N_c^{(opt)}}. \tag{3}$$

Так как процедура декодирования реализована в рамках одного OFDM-символа, то (3) справедливо при достаточном для выполнения (2) числе бит, передающихся в одном OFDM-символе, т.е. при $N_b \geq N_c^{(opt)}$.

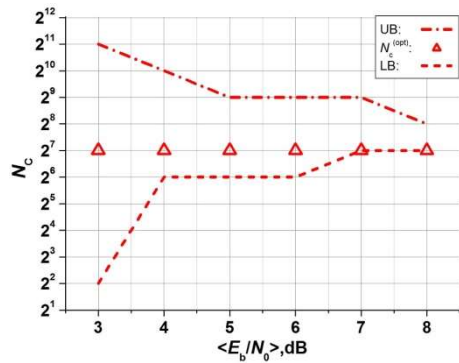


Рис. 2

В [4] было установлено, что при неоптимизированных параметрах «ВІ» помехоустойчивость системы зависит от интервала многолучевости. При исследовании «ВІ» с оптимальными параметрами определено, что помехоустойчивость системы остается фактически постоянной при изменении интервала между лучами. Это продемонстрировано на рис. 3, где при $F_d T = 0,07$ графики работы «ВІ» длиной $N_s^{(rec)}$ сливаются в одной точке $N_r^{(opt)} = 2^7$ при различных τ_0 . Следовательно, определение $N_s^{(rec)}$ и $N_r^{(opt)}$ по формулам (1) и (3) позволяет не адаптировать «ВІ» к интервалу многолучевости.

Таким образом, в работе выведены конкретные рекомендации по выбору оптимальных параметров блокового перемежителя в OFDM-системе связи со сверточным кодированием, учитывающие как изменяющиеся параметры радиоканала, так и характеристики кода. При малых скоростях замираний рекомендованная длина $N_s^{(rec)}$ блокового перемежителя может быть слишком большой. С целью уменьшения задержки передачи зачастую целесообразно использовать N_s , меньшее рекомендованного $N_s^{(rec)}$. На рис. 4 построены графики работы «ВІ» с $N_r^{(opt)}$ оптимальным для каждого N_s ; с $N_r = 1024$, которое является оптимальным только для рекомендованной длины $N_s^{(rec)}$ и с N_r , определенным по (3) для всех N_s . Как видно на рис. 4, где $N = 35$ и $F_d T = 0,01$, уменьшение длины «ВІ» на 1-3 порядка степени двойки позволяет использовать оптимальные параметры перемежителя, полученные для $N_s^{(rec)}$, без значительной потери в помехоустойчивости. Также рис. 4 демонстрирует, что определение $N_r^{(opt)}$ по формуле (3) справедливо только для $N_s^{(rec)}$ и N_s , которое меньше $N_s^{(rec)}$ на 1 порядок степени двойки. Пик на графике «ВІ(N_r согласно (3))» соответствует критическому значению $N_r^{(cr)} = N_b$, которое было определено в [4].

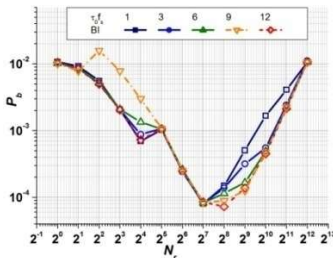


Рис. 3

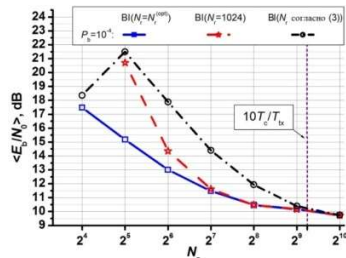


Рис. 4

- [1] Watterson C.C., Juroshek J.R., Bensema W.D. // IEEE Trans. on Commun. Techn. 1970. Vol. 18, № 6. P. 792.
- [2] Cai X., Giannakis G.B. // IEEE Trans. Commun. 2003. Vol. 51, № 12. P. 2047.
- [3] ARINC Specification 635-2. HF Data Link Protocols. Published: February 27, 1998.
- [4] Горохов К.В., Колобков А.В., Хитева Д.В. // Труды XXIII научной конференции по радиофизике. ННГУ, 2019. С. 470.
- [5] Nguyen V.C., Kuchenbecker H.-P. // IEEE 54th Vehicular Technology Conference. 2001. Vol.1. P.470.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ МЕТИЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОИСКА СВЯЗАННЫХ С ПОЛОМ БИОМАРКЕРОВ-ПРЕДИКТОРОВ ВОЗРАСТА

А.И. Калякулина, И.И. Юсипов, М.В. Иванченко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Известно, что женщины живут дольше мужчин, как в странах с низким уровнем смертности, так и в странах с высоким уровнем смертности. Такое половое неравенство может быть обусловлено взаимодействием биологических и культурных факторов. Вклад в формирование разрыва между полами при старении вносят эпигенетические факторы, такие как метилирование. Метилирование ДНК – это добавление метильной группы к цитозину в динуклеотиде CpG (сайт CpG). Оно претерпевает изменения на протяжении всей жизни организма и несет отпечаток физиологических и патологических состояний, включая старение и различные заболевания. В связи с этим возникает вопрос, существуют ли различия в метилировании ДНК цельной крови между мужчинами и женщинами в процессе старения и, если они существуют, способны ли они разрыву между полами в долголетию.

Мы проанализировали 4 набора данных цельной крови, включающих мужчин и женщин разного возраста, чтобы выявить специфические для пола тенденции возрастных изменений метилирования ДНК. Из репозитория Gene Expression Omnibus (GEO) [1] было выбрано 3 набора данных метилирования цельной крови здоровых людей: GSE40279 [2], GSE87571 [3] и GSE55763 [4]. Кроме того, мы рассматривали четвертый набор данных, не загруженный в GEO, который является частью исследования EPIC Italy [5]. Общее количество субъектов в каждом наборе данных указано в табл. 1.

Табл. 1

	GSE40279	GSE87571	EPIC	GSE55763
Количество людей	656	729	1803	2670
Количество женщин	338	388	1114	860
Количество мужчин	318	341	689	1810

Чтобы найти сайты CpG, имеющие специфичные для пола тренды возрастного изменения уровня метилирования, мы разделили каждый набор данных на две подгруппы (женщины и мужчины) и построили модель линейной регрессии методом наименьших квадратов для каждого сайта CpG, учитывая зависимость уровня метилирования от возраста. Сайт CpG имеет специфичный для пола тренд возрастного изменения уровня метилирования, если он удовлетворял следующим критериям (полигональный подход): 1) сайт CpG имеет тренд возрастного изменения уровня метилирования по меньшей мере, для одного пола: мы выбрали сайты с наклоном линейной регрессии для мужчин, либо женщин больше 0.001 (что соответствует изменению уровня метилирования хотя бы на 0.1 за 100 лет); 2) сайт CpG имеет возрастное распределение уровней метилирования, только частично перекрывающееся между мужчинами и женщинами: для каждого сайта мы рассматривали разрешенную область у мужчин и женщин, используя доверительные интервалы для наклона и сдвига линейной регрессии, и выбрали только те сайты, которые имеют относительное пересечение площадей между разрешенными областями для женщин и мужчин менее 0.5. Пример

области пересечения разрешенных областей показан на рис. 1. Количество CpG, выбранных в соответствии с указанным подходом в каждом наборе данных и их пересечениях показано на рис. 2.

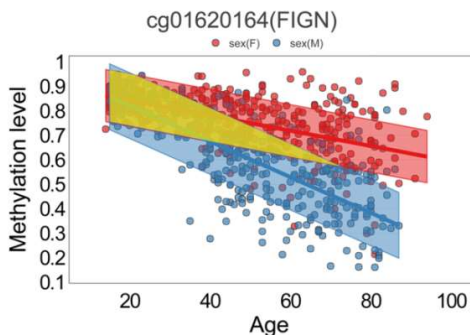


Рис. 1

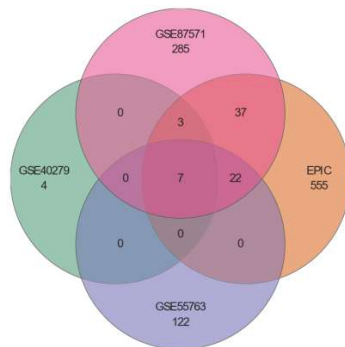


Рис. 2

Мы обнаружили 7 сайтов CpG, общих для всех 4 наборов данных и расположенных в 5 генах: FIGN, PRR4, C6orf174 / SOGA3, PEX10 и BAG3 (см. табл. 2).

Табл. 2

CpG сайт	Хромосома	Ген
cg01620164	2	FIGN
cg23256579	12	PPR4
cg27615582	12	PPR4
cg14079463	6	C6orf174
cg04580344	6	C6orf174
cg23928726	1	PEX10
cg17076667	10	BAG3

Чтобы найти сайты CpG, имеющие половые различия в возрастной вариабельности уровня метилирования, мы в первую очередь отфильтровали сайты с би-, тримодальным распределением уровней метилирования с использованием алгоритма кластеризации данных DBSCAN [6].

Для каждого значения возраста рассматривается скользящее окно ± 8 лет. В каждом окне мы рассчитали 5% и 95% перцентили распределения уровней метилирования для мужчин и женщин отдельно. Затем для полученных перцентилей была построена линейная регрессия в трех шкалах: 1) линейный возраст и линейные уровни метилирования; 2) линейный возраст и логарифмические уровни метилирования; 3) логарифмический возраст и логарифмические уровни метилирования. Для каждого сайта и для каждого пола баллы выбрана шкала с наибольшим значением R^2 . Таким образом, для каждого сайта имеем четыре значения R^2 (два значения, связанных с полом, и два значения, связанных с 5% и 95% перцентилем). Выбор минимального значения R^2 гарантирует хорошее приближение для обоих полов и обоих перцентилей одновременно. Затем для каждого набора данных мы выбрали те сайты, значение R^2 которых превышает 75% перцентиль распределения R^2 .

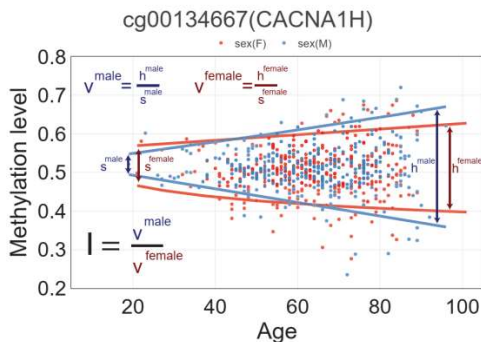


Рис. 3

Затем для каждого сайта мы рассчитали разницу между 95% и 5% процентилями для наименьшего (s) и наибольшего (h) возраста в каждом наборе данных для мужчин и для женщин отдельно (рис. 3). Отношение этих значений (h/s, если h больше, чем s, и s/h в противоположном случае) определяет абсолютную величину возрастного изменения дисперсии (v). Далее мы вычислили коэффициент I, то есть отношение v у мужчин и женщин ($v^{\text{male}}/v^{\text{female}}$, если v^{male} больше, чем v^{female} , и $v^{\text{female}}/v^{\text{male}}$ в противоположном случае), чтобы количественно оценить половые различия в возрастной вариативности уровня метилирования. Чтобы определить сайты CpG с устойчивыми гендерно-специфическими различиями в возрастной вариативности, мы пересекли 4 списка проб из различных наборов данных, получив в результате 65 проб со средним значением коэффициента I больше 1.5.

Таким образом, мы разработали алгоритмы для статистического анализа половых различий в возрастных изменениях уровня метилирования ДНК. Полученные результаты могут способствовать выявлению возможных молекулярных триггеров разрыва полов в старении и долголетию.

- [1] Barrett T. et al. // Nucleic acids research. 2012. Vol. 41, №. D1. P. D991.
- [2] Hannum G. et al. // Molecular cell. 2013. Vol. 49, №. 2. P. 359.
- [3] Johansson Å., Enroth S., Gyllensten U. // PloS one. 2013. Vol. 8, №. 6.
- [4] Lehne B. et al. // Genome biology. 2015. Vol. 16, №. 1. P. 37.
- [5] Palli D. et al. // Tumori Journal. 2003. Vol. 89, №. 6. P. 586.
- [6] Ester M. et al. // Kdd. 1996. Vol. 96, №. 34. P. 226.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ШУМОВ В МЕТОДЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ

Н.Е. Казачек

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Известно, что метод акустической эмиссии (АЭ) позволяет выявить основные механизмы разрушения опасных производственных объектов; образование трещин, протечку продукта, коррозионное повреждение, повреждение агрессивными средами. Метод АЭ является одним из методов неразрушающего контроля (НК). Метод АЭ в автоматическом режиме осуществляет измерение и обработку акустических сигналов. В основе предлагаемого метода лежит возможность классифицировать дефекты не по размерам, а по степени их опасности конструкции. АЭ в этих случаях сигнализирует о развитии нежелательных процессов [1]. Однако быстрое затухание сигнала АЭ, высокий уровень шумов от нагрузки или других опасных факторов может привести к завышению параметров, регистрируемых АЭ сигналов и, следовательно, необоснованной отбраковке диагностируемого объекта, что затрудняет широкое практическое использование этого метода [2].

Необходимо отметить, что метод АЭ имеет ограничения в применении; сложность выделения сигнала, высокая стоимость аппаратуры, дискриминация локализации и многое другое. Одним из агрегатов для обработки данных используют акустико-эмиссионный измерительный комплекс Лель / A-Line 32D (DDM). Комплекс Лель предназначен для проведения неразрушающего контроля и оценки состояния ответственных объектов, подведомственных Ростехнадзору Р.Ф. Спектрограммы АЭ диагностики газопровода представлены в работе [1].



Рис. 1



Рис. 2

Экспериментальные данные АЭ сигнала обрабатываются программой A-Line Stat. Она предназначена для автоматической кластеризации данных акустической эмиссии. Особенностью данной программы является возможность работы как с импульсами АЭ, так и с осциллограммами. Кластеризация осциллограмм происходит на основании схожести формы спектра.

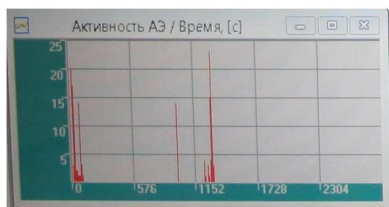


Рис. 3



Рис. 4

В последние годы появились публикации о стохастическом резонансе [2-5]. Множество экспериментальных фактов указывают, что источники шума могут не только мешать работе нелинейных устройства, наоборот, существенно увеличивать чувствительность систем к слабым внешним воздействиям и индуцировать некоторые режимы, которые при отсутствии шума нереализуемы. Среди явлений, характеризующихся конструктивной ролью шума, можно выделить стохастический резонанс. Стохастический резонанс – это кооперативный эффект в нелинейных системах при котором энергия шума, распределенная по широкому спектру, перекачивается в выходную энергию на частоте входного сигнала.

При этом амплитуда отклика системы описывается функцией резонансного типа, в которой аргументом является уровень шума. Явление стохастического резонанса впервые экспериментально наблюдалось в электронной цепи (триггер Шмитта). Зависимость частоты переключений триггера от интенсивности внешнего шума для трех различных значений амплитуды входного сигнала представлено на рис. 5.

Вначале сигнал был слабый. Он не оказывал существенного влияния на экспоненциальную зависимость средней частоты срабатывания триггера от интенсивности шума (кривая $A=0$). С ростом амплитуды подпорогового сигнала эта зависимость качественно менялась: появилась полоса значений уровня шума, в которой средняя частота переключений практически оставалась постоянной и очень близкой к частоте внешнего сигнала (кривые $A=50\text{ мВ}$ и $A=150\text{ мВ}$). Это есть та область, где имеет место эффект.

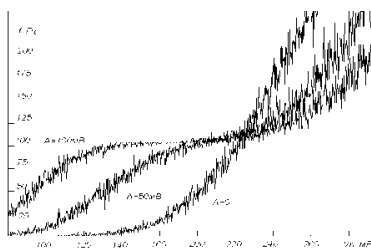


Рис. 5

В работе [5] показано, что причиной стохастического резонанса является изменение вследствие шума эффективных параметров системы, а именно, упругости и коэффициента затухания по отношению к реакции на входной сигнал.

В связи с ранее сказанным обратимся к работе [6], где на рис. 6-7 представлены спектрограммы вибраций рессор с помощью спектрального анализа. Получены оценки спектров мощности колебаний рессор в течение одной установки рессоры на стен-

де в разные моменты времени (от постановки на стенд и до разрушения). Проанализировано 120 спектрограмм. Частота собственных колебаний рессор лежат в интервале 20- 5000Гц. Отмечен эффект концентрации спектра мощности вибраций в низкочастотной части спектра, степень которой зависит от наработки рессоры при испытаниях на усталость. Наблюдается в какой-то степени схожесть между рис. 5, рис. 6 и рис. 7: а именно, концентрация спектров мощности вибраций происходит в низкочастотной области спектра.

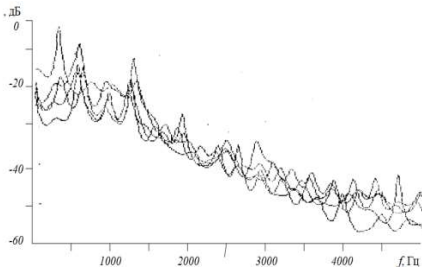


Рис. 6

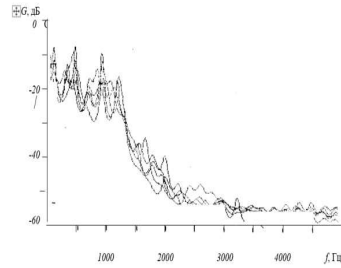


Рис. 7

В спектрограммах работы [1], где исключается влияние помех, подобная картина не наблюдается.

Представляется возможность предположить использование помех разной природы в методах АЭ, которые различными способами устраняются, позволит улучшить диагностические свойства метода АЭ. Более того, техническое избавление от помех всякого вида приводит к большому усложнению и удорожанию метода. Возможно установление порога шума в методе АЭ приведет к удешевлению и упрощению названного метода.

- [1] Казачек Н.Е., Казачек С.В. // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2015. Т. 22, № 5. С. 585.
- [2] Степанова Л.Н. // Деформация и разрушение материалов. 2014. № 6. С. 41.
- [3] Donnell M.D., Stocks N.G., Pearce Ch.E., Abbott D. // Nature. 1995. Vol. 373. P. 33.
- [4] Fauve S., Heslot F. // Phys. Lett. A. 1983. Vol. 97. P. 5.
- [5] Ланда П.С., Трубецков Д.И., Гусев В.А. // УФН. 2009. Т. 179. С. 2553.
- [6] Казачек Н.Е. // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1998. Т. 5. № 2. С. 222.

МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ВЫЗВАННАЯ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЦВЕТНЫХ ШУМОВ

А.А. Харчева¹⁾, А.А. Дубков¹⁾, Б. Дыбиц²⁾

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Ягеллонский университет (Краков, Польша)

Рассмотрим нелинейную систему под воздействием процесса Орнштейна-Уленбека $\eta(t)$ (цветной гауссов шум)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -U'(x) + \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\tau_c}\eta(t) + \frac{1}{\tau_c}\sqrt{2D}\xi(t),\end{aligned}\quad (1)$$

где τ_c – время корреляции и $\xi(t)$ – дельта-коррелированный белый гауссовский шум с нулевым средним $\langle \xi(t) \rangle = 0$ и интенсивностью $2D$. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка для совместной функции плотности вероятности $P_2(x, y, t)$ может быть получено напрямую из уравнений Ланжевена дифференциальным методом и имеет следующий вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(U'(x) - y)P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial y}(yP_2) + \frac{D}{\tau_c^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}.\quad (2)$$

В приближении унифицированного цветного шума (UCNA) [1] установившееся вероятностное распределение имеет вид

$$P_{st}(x, \tau_c) = C |1 + \tau_c U''| \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{D} \left(\frac{\tau_c U'^2}{2} + U \right) \right\},\quad (3)$$

где C – константа нормировки.

Для степенного потенциала вида $U(x) = bx^{2m} + ax^2$ условие максимума установившегося вероятностного распределения (3) в точке $x = 0$ читается как

$$6b\tau_c \delta_{m,2} - \frac{a}{D}(1 + a\tau_c)^2 > 0.\quad (4)$$

Как следует из (4), для потенциалов с показателем $m > 2$ вероятностное распределение всегда унимодально. Условие бимодальности становится нетривиальным только в случае потенциала четвертой степени ($m = 2$) и принимает следующий вид

$$a(1 + a\tau_c)^2 < 6bD\tau_c.\quad (5)$$

Результаты численного анализа модели, описываемой уравнением (1), для потенциала четвертой степени и фиксированного времени корреляции $1/\tau_c = 1.4$ представлены на рис. 1 ($D = 1$) и рис. 2 ($D = 9$). Сравнение рисунков подтверждает, что при неизменном времени корреляции шума Орнштейна-Уленбека изменение интенсивности шума D может вызвать бимодальность стационарных состояний.

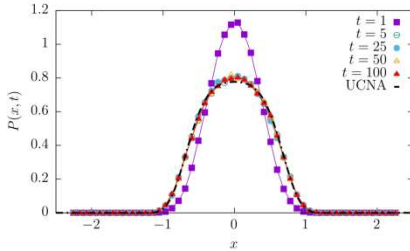


Рис. 1

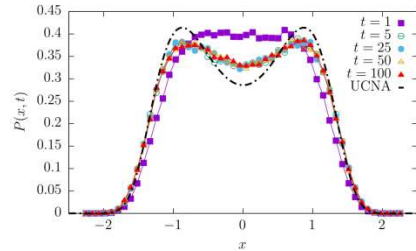


Рис. 2

Далее было численно изучено движение в фиксированных одноянных потенциалах вида $V(x) = |x|^n/n$ для того, чтобы проверить, могут ли стационарные состояния быть бимодальными для промежуточных значений n . Рис. 3 демонстрирует, что для $n \leq 2$ стационарные состояния унимодальны, в то время как для $n > 2$ (рис. 4 и рис. 5) стационарные плотности вероятности могут быть бимодальными. Уже при $n = 2.01$ установившееся вероятностное распределение существенно отличается от нормального распределения (в частности, виден неглубокий минимум стационарного распределения). В то же время при $n = 2.02$ виден отчетливый минимум стационарного распределения в точке $x = 0$. Результаты для $n > 3$ (рис. 5) демонстрируют строгую бимодальность.

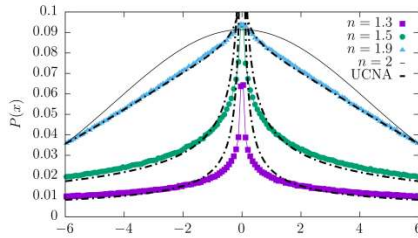


Рис. 3

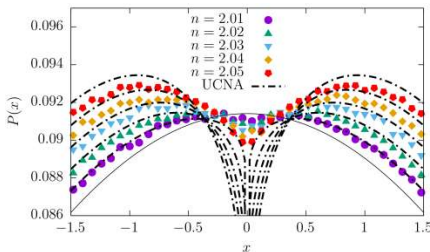


Рис. 4

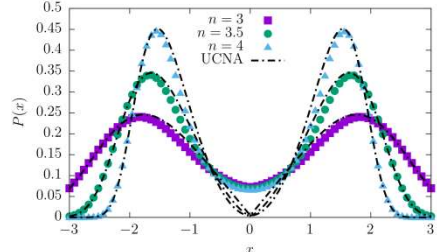


Рис. 5

Далее проверим, может ли добавление марковского дихотомического шума индуцировать стационарные состояния с более чем двумя модальными значениями. Сначала рассмотрим одномерный переключающийся потенциал

$$U(x, t) = \frac{b}{4} [x - \xi_{DN}(t)]^4 + \frac{a}{2} [x - \xi_{DN}(t)]^2, \quad (6)$$

где $\xi_{DN}(t)$ – симметричный марковский дихотомический шум со средним темпом переключения γ и принимающий два значения $\pm\Delta$ с одинаковой вероятностью.

В этом случае нами было показано, что эволюция вероятностного распределения $P(x, \eta, t)$ описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}(\eta - bx^3 - 3b\Delta^2x - ax)P + \rho \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta P) \\ & - \frac{\partial}{\partial x}(3bx^2 + b\Delta^2 + a)Q + D \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & -2\gamma Q - \frac{\partial}{\partial x}(\eta - bx^3 - 3b\Delta^2x - ax)Q + \rho \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta Q) \\ & - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x}(3bx^2 + b\Delta^2 + a)P + D \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где введена вспомогательная функция $Q(x, \eta, t) = \langle \xi_{DN}(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle$.

Рис. 6 демонстрирует установившиеся вероятностные распределения для различных темпов переключения γ и различных значений дихотомического шума: а) $\Delta = 1$, б) $\Delta = 2$, в) $\Delta = 4$. Левый столбец соответствует потенциалу четвертой степени ($a = 0, b = 1$), в то время как правый столбец – «смеси» параболического потенциала и потенциала четвертой степени ($a = 1, b = 1$). Значения других параметров: $1/\tau_c = 0.05, D = 1$. Можно сделать вывод, что для соответствующего выбора параметров, количество мод может быть увеличено.

Одномерная модель с комбинированным действием симметричного марковского дихотомического шума и шума Орнштейна-Уленбека может быть обобщена до двухмерной. Рассмотрим двумерный потенциал четвертой степени

$$U(x, y, t) = \frac{1}{4} ([x - \xi_{DN}^1(t)]^2 + [y - \xi_{DN}^2(t)]^2)^2, \quad (9)$$

где $\xi_{DN}^i(t)$ ($i = 1, 2$) – два независимых симметричных марковских дихотомических шума с одинаковыми величинами $\pm\Delta$. Стационарные состояния для двумерных фиксированного и случайного потенциалов, заданных уравнением (9) изображены на рис. 7. Верхний ряд изображает стационарные состояния в фиксированном одноянном потенциале четвертой степени. Различные строки соответствуют различным темпам переключения дихотомического шума γ . Разные столбцы соответствуют разным значениям $1/\tau_c$ шума Орнштейна-Уленбека.

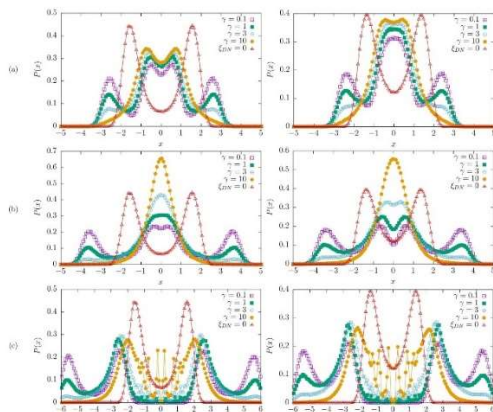


Рис. 6

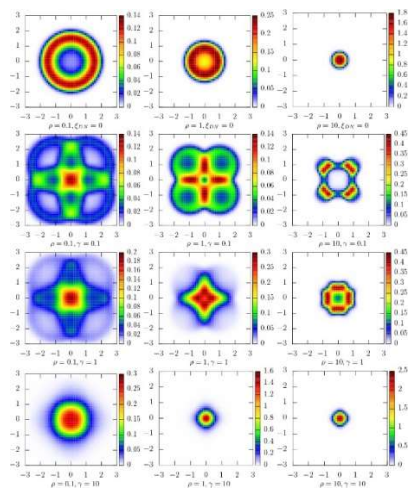


Рис. 7

- [1] Chua L.O. // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. Vol. 18, P. 507.
- [2] Chua L. // Applied Physics A. 2018. P. 563-1.
- [3] Slipko V.A., Pershin Y.V., Di Ventra M. // Phys. Rev. E. 2013. Vol. 87, P. 042103-1.
- [4] Strukov D.B., Snider G.S., Stewart D.R., Williams R.S. // Nature. 2008. Vol. 453. P. 80.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В.М. Овсянникова, А.В. Шиндин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В данной работе рассматривается метод JEC FDTD для моделирования распространения электромагнитных волн в диспергирующих анизотропных средах.

Метод JEC основан на описании плазмы как среды распространения электромагнитных волн в уравнениях Максвелла через плотность тока. Такой подход может быть использован и в случае моделирования анизотропной плазмы.

Рассмотрим неоднородную анизотропную магнитоактивную плазму. Исходные уравнения для этого случая состоят из уравнений Максвелла в дифференциальной форме для электромагнитных полей в вакууме с плотностью тока, связанного с движением электронов в плазме и из уравнения, связывающего плотность тока с электрическим полем. Его можно получить из закона движения электронов в электромагнитном поле и выражения для плотности тока через заряд, концентрацию и скорость электронов.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nu_c \mathbf{J} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_{ce} \times \mathbf{J}. \quad (3)$$

Метод FDTD базируется на двух концепциях: сетка Yee и конечно-разностная аппроксимация частных производных. Пространственно-временная сетка YEE определяет в каких узлах определены поля. Шаг сетки при этом половинчатый, а индексы характеризующие узлы сетки могут быть дробными. Поля E и H чередуются как в пространстве, так и во временной области.

На рис. 1 представлен трехмерный вариант сетки YEE. Видно, что в этом варианте, компонента E_x определена в узлах дробных по X и целых по Y и Z. А, например, поле H_z определено в узлах дробных по X и Y и целых по Z. Если поле E определено узлах с целым временным индексом, то

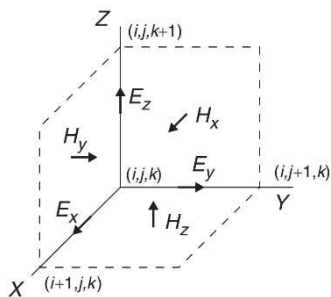


Рис. 1

поле H определяется в дробных временных узлах. Ток определяется аналогично полю E в пространстве и аналогично полю H во временной области.

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется вдоль оси Z , магнитное поле направленно под углом к оси Z и лежит в плоскости YZ . При такой геометрии (см. рис. 2) нулевой является только компонента H_z .

Применим центрально-разностную аппроксимацию для производных всех трех проекций поля E и двух проекций поля H :

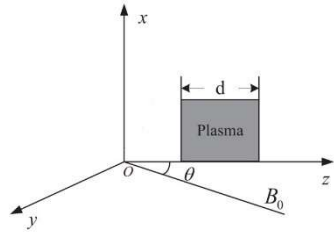


Рис. 2

$$\tilde{E}_x^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta x} \left(H_y^n \left(k + \frac{1}{2} \right) - H_y^n \left(k - \frac{1}{2} \right) \right) - \tilde{j}_x^n(k) \quad (4)$$

$$\tilde{E}_y^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_y^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta x} \left(H_x^n \left(k + \frac{1}{2} \right) - H_x^n \left(k - \frac{1}{2} \right) \right) - \tilde{j}_y^n(k) \quad (5)$$

$$\tilde{E}_z^{n+1/2}(k) = \tilde{E}_z^{n-1/2}(k) - \tilde{j}_z^n(k) \quad (6)$$

$$H_x^{n+1} \left(k + \frac{1}{2} \right) = H_y^n \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta x} \left(\tilde{E}_y^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_y^{n+1/2}(k) \right) \quad (7)$$

$$H_y^{n+1} \left(k + \frac{1}{2} \right) = H_x^n \left(k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta x} \left(\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k) \right) \quad (8)$$

$$H_z = const. \quad (9)$$

Уравнения, связывающие ток и электрическое поле, после такой аппроксимации образуют систему ОДУ, которая решалась с помощью чисто неявной схемы. Результирующие уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{j}_x^{n+1} = C \left(e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_x^n + \omega_p^2 \Delta t^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{cez} \Delta t e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_y^n \right. \\ \left. - \omega_{cez} \Delta t^3 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{cey} \Delta t e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_z^n \right. \\ \left. + \omega_{cey} \Delta t^3 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_z^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}_y^{n+1} = C & (\omega_{cez} e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_x^n + \omega_{cez} \omega_p^2 \Delta t^3 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + (\omega_{cey}^2 \Delta t^2 + 1) e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_y^n \\
 & + (\omega_{cey}^2 \Delta t^2 + 1) \Delta t^4 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + \omega_{cey} \omega_{cez} \Delta t^2 e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_z^n \\
 & + \omega_{cey} \omega_{cez} \Delta t^4 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_z^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}_z^{n+1} = C & \left(-\omega_{cey} \Delta t e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_x^n - \omega_{cey} \omega_p^2 \Delta t^3 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
 & + \omega_{cey} \omega_{cez} \Delta t^2 e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_y^n \\
 & + \omega_{cey} \omega_{cez} \Delta t^4 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}} \\
 & + (\omega_{cez}^2 \Delta t^2 + 1) e^{-v_c \Delta t} \tilde{j}_z^n \\
 & \left. + (\omega_{cez}^2 \Delta t^2 + 1) \Delta t^2 \omega_p^2 e^{-\frac{v_c \Delta t}{2}} \tilde{E}_z^{n+\frac{1}{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $C = \frac{1}{(\omega_{cez}^2 \Delta t^2 + \omega_{cey}^2 \Delta t^2 + 1)}$.

В уравнениях (4-12) $\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{J}} = c \Delta t \mathbf{J}$.

На рис. 3-5 представлен пример визуализации электромагнитного поля, построенного на основе формул (7-15) в различные моменты времени. Параметры магнитного поля заданы близкими к типичным значениям в ионосфере в районе западно-европейской части РФ: угол наклона к оси z – 19 градусов, циклотронная частота – 1,4 МГц. Параметры падающего импульса: длительность – 1 мкс; частота – 4,5 МГц. Параметры счетной области: пространственный шаг – 5 м, временной шаг – 8 нс. Параметры плазменного слоя (серая область на рисунках): длина – 500 м, плазменная частота линейно растет с пространственной координатой от 0 до 5 МГц. Из данной визуализации видно следующее:

- Э/м волна линейной поляризации расщепляется на обыкновенную и не-обыкновенную составляющие, каждая из которых имеет эллиптическую поляризацию.

- Частота заполнения падающего импульса подобрана таким образом, что обыкновенная волна практически полностью отражается от некоторой точки пространства в плазме, а необыкновенная волна, напротив, проходит слой плазмы насквозь.
- В области отражения обыкновенной волны наблюдается т.н. плазменный резонанс, когда частота импульса совпадает с частотой

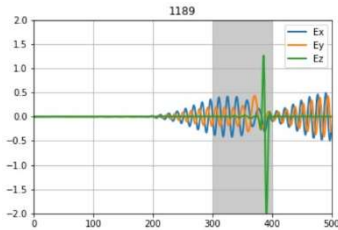


Рис. 4

сделать следующие выводы:

1. Учет плазмы через плотность тока (а не через материальные уравнения) в уравнениях Максвелла дает возможность достаточно простым и прозрачным способом использовать метод FDTD для моделирования распространения э/м волн в плазме (в том числе неоднородной и анизотропной).
2. Разностные уравнения для тока могут быть получены различными способами.
3. Для того, чтобы пронаблюдать многие известные эффекты, не обязательно использовать трехмерную пространственную сетку, достаточно одномерной сетки (все компоненты поля при этом зависят от одной координаты).
4. Разработанные программы, включающие анимированные визуализации, могут использоваться в качестве демонстрационного материала в дисциплинах, связанных с электродинамикой и распространением радиоволн, а также для симуляции реальных экспериментов по зондированию ионосферы короткими э/м импульсами и т.н. “синтеза ионограмм”.

[1] Zhang J., Fu H., Scales W. // IEEE Transactions on Plasma Science. 2018. PP (99), doi: 10.1109/TPS.2018.2830416.

[2] Chen Q., Katsurai M., Aoyagi P.H. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1998. Vol. 46, № 11. P. 1739.

[3] Sullivan D. M. Electromagnetic simulation using the FDTD method. Second edition. – Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 1949.

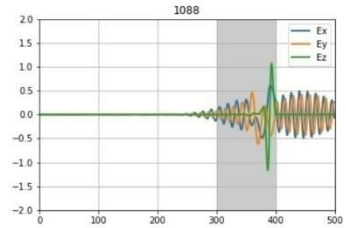


Рис. 3

собственных колебаний электронов в этой области и возникают достаточно интенсивные продольные (вдоль направления распространения) колебания плотности тока и электрического поля, которые еще долго затухают даже после того, как импульс вышел из счетной области.

В результате проведенного моделирования можно

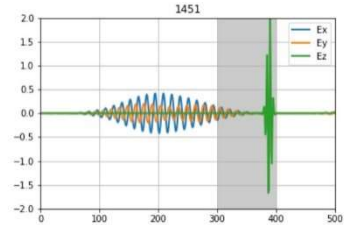


Рис. 5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТОЙ КУБИЧЕСКОЙ РШЕТКИ КРИСТАЛЛА ФУЛЛЕРИТА

И.С. Павлов^{1,2)}, А.В. Муравьева¹⁾

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Институт проблем машиностроения РАН

В настоящее время всё больше технологических применений находят материалы на основе углерода. Одним из таких материалов, наряду с нанотрубками и графеном, являются фуллериты – твердотельные структуры, образованные на основе фуллеренов (как C_{60} , так и высших фуллеренов – C_{70} , C_{76} , C_{78} , C_{80} и т.д.) [1]. Принадлежность фуллеритов к кристаллам молекулярного типа позволяет рассматривать образующие их фуллерены подобно молекулам, причем могут легко менять при тепловом движении относительную пространственную ориентацию даже в условиях кристаллического окружения, т.е. совершать так называемые ориентационные фазовые переходы. Такая способность фуллеренов обусловлена их высокосимметричной, почти сферической формой. В частности, фуллерены C_{60} в кристалле находятся в состоянии почти свободного вращения с тремя степенями свободы [1].

Сверх- и ультратвердые фуллериты характеризуются уникально высокими значениями скоростей продольных упругих волн в пределах от 11 км/с до 26 км/с в зависимости от их структуры, определяемой условиями синтеза [2]. Измеренное в одной из фуллеритовых фаз значение 26 км/с является рекордным – оно почти на 20% больше скорости продольных волн в графите вдоль атомных слоев, равной 21,6 км/с (до последнего времени это значение было наибольшим для всех известных веществ) и на 40% больше соответствующей скорости в алмазе (18,6 км/с). Скорости поперечных волн в твердых фуллеритовых фазах также высоки (их значения лежат в пределах от 7 км/с до 9,7 км/с), но все же они меньше, чем в алмазе (11,6 – 12,8 км/с), которые попрежнему остаются рекордными среди известных в настоящее время веществ.

При комнатной температуре фуллерены C_{60} кристаллизуются с образованием гранцентрированной кубической решетки (ГЦК) – самой плотноупакованной из кубических решеток с периодом решетки $a=1,417$ нм [1]. Расстояние между центрами ближайших фуллеренов C_{60} в кристаллической структуре 1,002 нм, плотность фуллерита составляет 1,72 г/см³. При понижении температуры до 250 К, кристаллическая структура фуллерита C_{60} испытывает фазовое превращение первого рода, при котором ГЦК-решетка перестраивается в простую кубическую (ПК) решетку [3].

Для описания физико-механических свойств таких сред и протекающих в них динамических (волновых) процессов необходимы математические модели, которые позволили бы установить аналитические зависимости между параметрами микро- и макрохарактеристиками среды. Для построения такой модели рассмотрим кубическую решетку из жестких шарообразных частиц (зерен) массы M , имеющих форму шара диаметром d . В исходном состоянии они сосредоточены в узлах решетки с периодом a . Каждая частица обладает шестью степенями свободы: центр масс частицы с номером $N=N(i, j)$ может смещаться вдоль осей x , y и z (трансляционные степени свободы $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ и $w_{i,j}$), а сама частица может поворачиваться вокруг каждой из этих осей (ротационные степени свободы $\theta_{i,j}$, $\psi_{i,j}$ и $\varphi_{i,j}$) (рис. 1).

Считается, что каждая частица взаимодействует лишь с ближайшими соседями, удаленными от нее на расстояние a (частицы 1-й координационной сферы), $a\sqrt{2}$ (2-й координационной сферы) и $a\sqrt{3}$ (3-й сферы). Центральные и нецентральные взаимодействия соседних частиц моделируются упругими пружинами пяти типов: центральными (с жесткостью K_0), нецентральными с жесткостью K_1 (рис. 2), диагональными (K_2), а также пружинами с жесткостями K_3 и K_4 , соединяющими центральную частицу с зернами, соответственно, второй и третьей координационными сферами. Центральные пружины K_0 соединяют центры соседних частиц, точки соединения с частицами пружин вида K_1 и K_2 лежат в вершинах куба со стороной b , вписанного в шар диаметра $d = b\sqrt{3}$ (на рис. 2 $A_2B_1', B_2A_1', E_2C_1', C_2E_1'$ – пружины с жесткостью K_1 , $A_2C_1', E_2B_1', B_2E_1', C_2A_1'$ – пружины вида K_2), а пружины с жесткостями K_3 и K_4 прикреплены к серединам ближайших друг к другу ребер кубов, геометрические центры которых в исходном состоянии расположены на расстояниях $a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{3}$. Взаимодействия при растяжении-сжатии материала моделируются центральными и нецентральными пружинами. Через пружины K_1 передаются также моменты при поворотах частиц. Пружины с жесткостью K_1 и K_2 характеризуют силовые взаимодействия частиц при сдвиговых деформациях в материале.

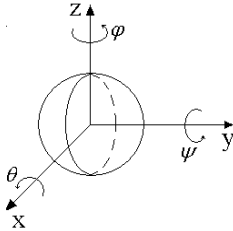


Рис. 1

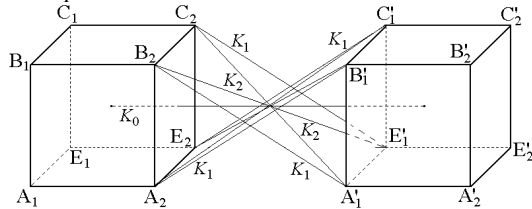


Рис. 2

Предполагается, что смещения зёрен малы по сравнению с размерами элементарной ячейки рассматриваемой решетки. Взаимодействие частиц при их отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин и описывается квадратичным потенциалом, пропорциональным жесткостям пружин. По процедуре, изложенной в работе [4], можно получить дифференциально-разностные уравнения, описывающие динамику кубической решетки из шарообразных частиц.

В случае длинноволновых возмущений функция Лагранжа L рассматриваемой среды из шарообразных частиц с точностью до квадратичных слагаемых примет вид:

$$L = \frac{M}{2}(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + \frac{J}{2}(\varphi_t^2 + \theta_t^2 + \psi_t^2) - \frac{M}{2}[c_1^2(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + c_2^2(v_x^2 + v_z^2 + u_y^2 + u_z^2 + w_x^2 + w_y^2) + s^2(v_y w_z + v_z w_y + u_x w_z + u_z w_x + u_x v_y + u_y v_x) + \beta_1^2(\varphi^2 + \theta^2 + \psi^2) + \beta_2^2(v_x \varphi - w_x \psi + w_y \theta - u_y \varphi + u_z \psi - v_z \theta) + b^2 c_3^2(\varphi_z^2 + \theta_x^2 + \psi_y^2) + b^2 c_4^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 + \psi_x^2 + \psi_z^2)]. \quad (1)$$

Здесь введены обозначения: c_1 и c_2 – скорости распространения продольной и поперечной волн, c_3 и c_4 – скорости ротационных волн различной поляризации, s –

коэффициент связи между продольными и сдвиговыми деформациями, β_1 и β_2 – параметры связи микроповоротов с поперечной и продольной волнами. С помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского из функции Лагранжа (1) можно вывести систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение акустических и ротационных волн в кубической решетке из сферических частиц [5].

Коэффициенты функции Лагранжа (1) выражаются через силовые постоянные K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , K_4 период решетки a и размер частицы $b = d/2\sqrt{3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 c_1^2 &= \frac{a^2}{M} \left(K_0 + \frac{8(a-b)^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{4(a-b)^2}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 + \frac{K_3}{\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3} \right), \\
 c_2^2 &= \frac{a^2}{M} \left(\frac{4b^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{4b^2}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 + \frac{K_3}{2\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3} \right), \\
 s^2 &= \frac{a^2}{M} \left(\frac{K_3}{\sqrt{2}} + \frac{4K_4}{3} \right), \\
 \beta_1^2 &= \frac{8a^2b^2}{M} \left(\frac{K_1}{(a-b)^2 + b^2} + \frac{K_2}{(a-b)^2 + 2b^2} \right), \\
 \beta_2^2 &= \frac{8a^2b^2}{M} \left(\frac{K_2}{(a-b)^2 + 2b^2} \right), \\
 c_3^2 &= \frac{2a^2b^2}{M} \left(\frac{K_1}{(a-b)^2 + b^2} \right), \\
 c_4^2 &= \frac{a^2}{M} \left(\frac{(a-b)^2 + a^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{a^2}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Из (2) следует, что $\beta_1^2 + s^2 = 2c_2^2$ и $\beta_2^2 + 4c_3^2 = \beta_1^2$. Таким образом, в данной анизотропной модели лишь 5 независимых макроконстант, а при переходе к изотропной среде останется лишь 4 константы. Аналогичный результат получен для изотропной среды в работе [6].

Анализ зависимости нормированных на $c_0 = a\sqrt{K_0/M}$ скоростей акустических и ротационных волн от относительного размера зерна d/a при $K_{10}=0,3$, $K_{20}=0,9$, $K_{30}=1$, $K_{40}=1$ (здесь и далее $K_{i0}=K_i/K_0$) показал, что скорость продольных волн c_1 является наибольшей, а скорость ротационных волн c_3 – наименьшей (рис. 3). И если в данном случае $c_4 > c_2$, то уменьшение параметра моментных взаимодействий K_{20} и увеличение параметров K_{30} и K_{40} приводит к тому, что $c_2 > c_4$ (рис. 4-6). На рис. 4-6 $K_{30}=1,2$, $K_{40}=1,6$. Кроме того, на рис. 4 $K_{20}=0,3$, $d/a=0,1$, на рис. 5 $K_{10}=0,3$, $d/a=0,9$, на рис. 6 $K_{20}=0,3$, $d/a=0,9$. Заметим, что при малых размерах зерна скорости волн c_2 и c_3 практически неизменны (рис. 4). Наиболее существенный рост этих скоростей наблюдается при малом K_{20} и больших размерах частиц (рис. 6).

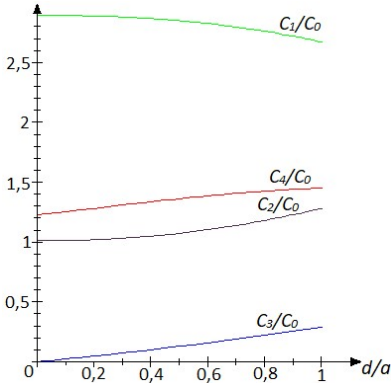


Рис. 3

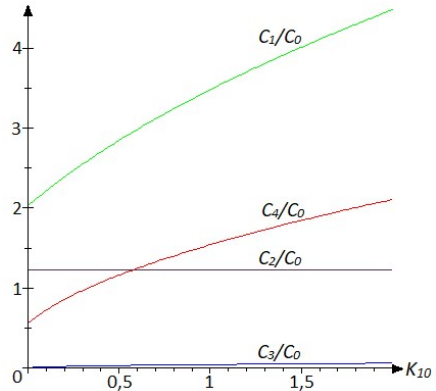


Рис. 4

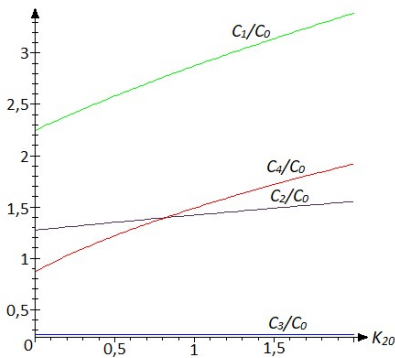


Рис. 5

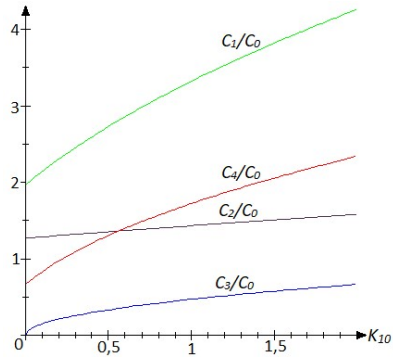


Рис. 6

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00965-а).

- [1] Сидоров Л.Н. и др. Фуллерены: Учебное пособие. – М.: Экзамен, 2005, 688 с.
- [2] Бланк В.Д. и др. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. С. 1364.
- [3] Кобелев Н.П. и др. // Физика твердого тела. 1994. Т. 36, № 9. С. 2732.
- [4] Pavlov I.S., Potarov A.I., Maugin G.A. // Int. J. of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, № 20. P. 6194.
- [5] Ерофеев В.И., Павлов И.С., Леонтьев Н.В. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2013. Т. 19, № 3. С. 299.
- [6] Садовский В.М. // Дальневосточный математический журнал. 2016. Т. 16, № 2. С. 209.

РЕГУЛЯРНЫЕ И НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ КАЛЬЦИЯ В АСТРОЦИТАХ

М.С. Синицина, С.Ю. Гордлеева, В.Б. Казанцев, Е.В. Панкратова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Астроциты – это глиальные клетки центральной нервной системы, которые, в отличие от электрически возбудимых нервных клеток, способны генерировать импульсы химической активности, представляющие собой изменения во времени концентрации свободного цитозольного кальция. Такого рода химическая активность экспериментально фиксируется различными методами флюоресцентной и конфокальной лазерной микроскопии. *Результаты исследований показывают, что для астроцитов характерны как спонтанные изменения концентрации кальция [1, 2], так и кальциевые сигналы, вызванные активностью нейронов [3]. При этом астроцитарные кальциевые сигналы могут быть локализованы в синапсах либо распространяться по астроцитарной сети. Характерной особенностью таких сигналов является наличие различных по амплитуде изменений концентрации кальция: так называемых всплесков (blips) и импульсов (puffs) [4]. Под всплесками понимаются короткие и слабые пики, которые соответствуют открытию одного канала IP₃R (или одного тетрамера IP₃R канала), в то время как импульсы являются более длинными и более высокими пиками, возникающими в результате согласованного открытия группы соседних IP₃R каналов (или их тетрамеров) через кальций-индуцированный принцип высвобождения кальция (CICR). В связи с тем, что формирование различных пространственно-временных изменений концентрации кальция связывают с различными физиологическими функциями, особое значение приобретает анализ динамических режимов, наблюдаемых при изменении параметров соответствующей математической модели.*

В данной работе были рассмотрены уравнения Лаврентовича-Хемкина [5], моделирующие особенности спонтанного изменения концентрации кальция в цитозоли астроцита с учетом изменения концентрации кальция в эндоплазматическом ретикулуме и Ca²⁺-зависимой динамики концентрации инозитол-1,4,5-трифосфата (IP₃), индуцирующего высвобождение ионов кальция из внутриклеточных депо:

$$\frac{d[Ca^{2+}]_{cyt}}{dt} = J_{in} - k_{out}[Ca^{2+}]_{cyt} + J_{CICR} - J_{serca} + k_f([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]_{cyt}), \quad (1)$$

$$\frac{d[Ca^{2+}]_{ER}}{dt} = J_{serca} - J_{CICR} + k_f([Ca^{2+}]_{cyt} - [Ca^{2+}]_{ER}),$$

$$\frac{d[IP_3]_{cyt}}{dt} = J_{PLC} - k_{deg}[IP_3]_{cyt},$$

где выражения для J_{serca}, J_{CICR} и J_{PLC} имеют следующий вид:

$$J_{serca} = v_{M2} \left(\frac{[Ca^{2+}]_{cyt}^2}{[Ca^{2+}]_{cyt}^2 + k_2^2} \right), \quad (2)$$

$$J_{ICR} = 4v_{M3} \left(\frac{k_{CaA}^2 [Ca^{2+}]_{cyt}^n}{([Ca^{2+}]_{cyt}^n + k_{CaA}^n)([Ca^{2+}]_{cyt}^n + k_{CaI}^n)} \right) \cdot \left(\frac{[IP_3]_{cyt}^m}{([IP_3]_{cyt}^m + k_{ip3}^m)} \right) ([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]_{cyt}),$$

$$J_{PLC} = v_p \left(\frac{[Ca^{2+}]_{cyt}^2}{([Ca^{2+}]_{cyt}^2 + k_p^2)} \right)$$

и параметры выбраны такими же, как в работе [5]. В качестве контрольных параметров были рассмотрены параметры, определяющие величину потока ионов кальция из эндоплазматического ретикулума в цитозоль клетки и в обратном направлении, а также величина обратной связи концентрации кальция и IP_3 . В частности, на рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма, полученная при увеличении параметра v_{M3} . На диаграмме отмечены значения локальных максимумов концентрации кальция в цитозоли, наблюдаемые в реализации после завершения переходных процессов.

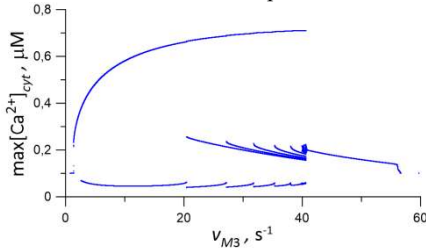


Рис. 1

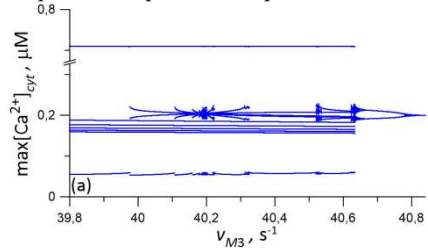


Рис. 2

Следует отметить, что при малых и больших значениях рассматриваемого параметра единственное состояние равновесия системы устойчиво, здесь наблюдается эффект гибели колебаний [6]. Выход из данных режимов при малых и больших v_{M3} происходит по-разному. При увеличении параметра (при $v_{M3} > 1.36 \text{ s}^{-1}$) достаточно быстро для концентрации кальция в цитозоли устанавливаются колебания большой амплитуды, частота таких колебаний мала. При уменьшении параметра (при $v_{M3} < 56.4 \text{ s}^{-1}$), напротив, возникает высокочастотная химическая активность малой амплитуды. При изменении v_{M3} внутри диапазона этих значений наблюдаются разнообразные колебательные режимы, некоторые из которых представлены на рис. 3 ($v_{M3} = 7 \text{ s}^{-1}$), рис. 4 ($v_{M3} = 40.633 \text{ s}^{-1}$) и рис. 5 ($v_{M3} = 40.64 \text{ s}^{-1}$). В частности, реализации для концентрации кальция в цитозоли, представленные на рис. 3 и рис. 4 (нижние графики), поясняют появление дополнительных «веток» на бифуркационной диаграмме, обусловленные появлением высокочастотных колебаний малой амплитуды вслед за импульсом большой амплитуды. Число таких всплесков при увеличении v_{M3} растет сначала регулярным образом, однако, начиная с некоторого значения, интервалы с повторяющимися последовательностями импульсов и всплесков сменяются интервалами нерегулярной динамики. При дальнейшем увеличении v_{M3} химическая активность астроцитов не содержит изменений большой амплитуды, рис. 5. Нерегулярная

динамика всплесков становится регулярной в результате обратного каскада бифуркаций удвоения периода.

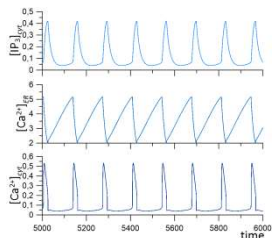


Рис. 3

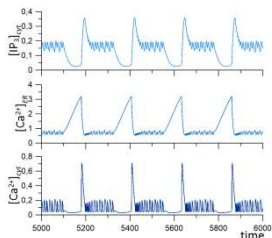


Рис. 4

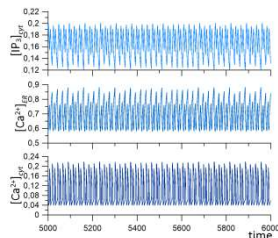


Рис. 5

Таким образом, в данной работе изучены различные сценарии смены динамических режимов концентрации астроцитарного кальция в рамках модели Лаврентовича-Хемкина при изменении потоков ионов кальция из эндоплазматического ретикулума в цитозоль клетки и в обратном направлении (ввиду ограниченного объема тезисов графики не представлены). Изучены особенности перехода в режим гибели кальциевых колебаний. Так как изменения концентрации кальция способны корректировать процессы обработки информационных сигналов нервными клетками, на основе проведенного анализа особенностей различных режимов астроцитарной химической активности в дальнейшем будет исследована их роль при взаимодействии структурных элементов в комплексных многоклеточных системах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-11-00294).

- [1] Wang X., Lou N., Xu Q., Tian G.F., Peng W.G., Han X., et al. // *Nature Neuroscience*. 2006. Vol. 9, № 6. P. 816.
- [2] Parri H.R., Crunelli V. // *Neuroscience*. 2003. Vol. 120, № 4. P. 979.
- [3] Perea G., Araque A. // *The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience*. 2005. Vol. 25, № 9. P. 2192.
- [4] Swillens S., Dupont G., Combettes L., Champeil P. // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1999. Vol. 96, № 24. P. 13750.
- [5] Lavrentovich M., Hemkin S. // *J. of Theor. Biol.* 2008. Vol. 251. P. 553.
- [6] Pankratova E.V., Kalyakulina A.I. // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2016. Vol. 21, №7-8. P. 840.

СТРУЙНЫЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕСАМОСOPЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ROT

И.Н. Солдатов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В работах [1, 2] были построены точные решения задач о малых движениях вязкой жидкости со свободной и инерционной поверхностью в полости быстровращающегося цилиндрического ротора. Для построения решений использовалась суперпозиция собственных функций оператора rot, собственные значения которого удовлетворяют определенному уравнению. Предложенный способ решения показал свою эффективность в задачах с вращающейся микрополярной [3] и проводящей вязкой жидкостью в безиндукционном приближении [4]. В докладе показано использование техники работ [1-4] на более сложной задаче распространения возмущений в колоннообразном вихре с аксиальным течением вязкой несжимаемой жидкости в ядре, окруженным потенциальным невязким течением.

Ещё лордом Кельвином было установлено [5], что колоннообразный вихрь без осевого течения в идеальной жидкости нейтрально устойчив к инфинитезимальным возмущениям цилиндрической поверхности ядра вихря. Неустойчивость возникает, как было показано авторами [6], когда есть достаточно быстрое осевое течение в ядре. Позднее были выполнены более детальные исследования неустойчивости [7-10]. Влияние вязкости жидкости во внутренней области вихря на устойчивость, за исключением частного случая с отсутствием осевого течения [11, 12] аналитически ранее не рассматривалось. Как известно, вязкость может быть стабилизирующим фактором, но может быть и причиной неустойчивости (например, вязкость ответственна за неустойчивость течения в плоском канале при больших числах Рейнольдса). В отличие от ранее проводившихся исследований, в данной работе учитывается вязкость жидкости ядра вихря с аксиальным течением, плотность жидкости ядра отличается от плотности жидкости во внешней области и учитывается возможность из-за действия центробежных сил образования каверны в ядре. Сила Кориолиса в быстровращающейся жидкости является доминирующей, влиянием нелинейных эффектов, как и влиянием силы тяжести пренебрегаем. Благодаря силе Кориолиса при возмущениях стационарного движения несжимаемой жидкости возникают волновые движения, называемые инерционными или гироскопическими волнами.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения колоннообразного вихря с аксиальным течением W (или, другими словами, закрученной струи) $b \leq r \leq a$ и внешнего течения $r > a$ в равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω (совпадающей со скоростью вращения невозмущенной струи) цилиндрической системе координат (с осью z вдоль оси симметрии) имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + 2[\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}], \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, b \leq r \leq a \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \frac{V_e}{r} \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial \varphi} - 2 \frac{V_e}{r} v_1 \mathbf{e}_r + \left(\frac{V_e}{r} u_e + u_e \frac{\partial V_e}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi = \\ - \frac{1}{\rho} \nabla p_e + 2[\mathbf{v}_e, \Omega], \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0, r > a, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{v} – кинематическая вязкость жидкости; величины, относящиеся к внешнему течению, снабжены индексом 1, W , V_e – скорости, характеризующие невозмущенное течение, остальные обозначения традиционные. Линеаризованные граничные условия на границе раздела двух жидкостей при $r = a$ суть следующие

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} - u + W \frac{\partial h}{\partial z} = 0, -u + u_1 + W \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{a} = 0, \\ -p - \rho \Omega^2 a h + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial r} + f = -p_1 - \rho_1 \Omega^2 a h, \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

где f – член, описывающий вклад поверхностного натяжения, функция h определяет поверхность раздела жидкостей. Из граничных условий удобно исключить h ; после этой несложной операции число условий уменьшается до 4. На границе с полостью в ядре вихря $r = b$ условия аналогичны с очевидными изменениями, написанными выше, и мы их опустим.

Далее, в отличие от традиционного подхода с привлечением погранслойных функций к задачам с малым параметром при старших производных, мы используем собственные функции оператора rot . Собственные вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ оператора $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{kv}$ в пространстве соленоидальных полей, чаще всего, определяются из самосопряженной задачи на собственные значения, например, из задачи в односвязной области с краевым условием непротекания $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Мы используем более широкое понятие собственных функций [13] как регулярного решения соответствующего дифференциального уравнения со спектральным параметром. В докладе исследуются свойства собственных функций и результаты рассмотрения применяются для построения решения. Чтобы собственные вектор-функции удовлетворяли линеаризованным уравнениям Навье-Стокса (1) требуется выполнение следующего условия совместности $\kappa \frac{\partial}{\partial t} + \kappa(\mathbf{W}\nabla) - 2(\Omega\nabla) + v\kappa^3 \mathbf{v} = 0$. Для гармонических возмущений $\sim e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}$ при коллинеарности векторов \mathbf{W} и Ω это условие сводится к алгебраической зависимости собственного числа от параметров волны, угловой скорости вращения и кинематической вязкости жидкости

$$\omega\kappa + \kappa k W - 2\Omega\kappa - iv\kappa^3 = 0, \quad (3)$$

где k – аксиальное волновое число, m – азимутальное волновое число, ω – циклическая частота. Собственные функции выражаются через функции Ганкеля, а решение уравнений (1) выражается через первые следующим образом

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{v}_{m,j}(\kappa_j, r) e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, j = 1, 2, 3; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где $\mathbf{v}_{m,j} = (u_{m,j}, v_{m,j}, w_{m,j})^T$ (запятая не обозначает ковариантную производную),

$$\begin{aligned}
 w_{m,j} &= C_{2j-1} H_m^{(1)}(\lambda_j r) + C_{2j} H_m^{(2)}(\lambda_j r), \\
 u_{m,j} &= \frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j} w_{m-1,j}, \\
 v_{m,j} &= \frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} w_{m-1,j}, \quad p_{m,j} = -2\rho\Omega\kappa_j^{-1} w_{m,j},
 \end{aligned}$$

где $\kappa_j, \text{Im}\kappa_j \geq 0$ ($j = 1, 2, 3$) – корни уравнения (3), $\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$, C_n ($n = 1, \dots, 6$) – произвольные постоянные.

Решение уравнений (2), описывающих невязкое возмущенное течение во внешней области, удовлетворяющее условию на бесконечности, имеет (опуская множитель $\sim e^{i(kz + m\varphi - \omega t)}$) вид

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -C_7 \left(sk K_{m-1}(skr) + \frac{m}{r} K_m(skr) \right), \quad v_1 = \frac{im}{r} C_7 K_m(skr), \\
 w_1 &= ik C_7 K_m(skr), \quad p_1 = -i\rho_1 \left[\omega + m \left(\frac{\Omega a^2}{r^2} - \Omega \right) \right] C_7 K_m(skr),
 \end{aligned}$$

где K_m – модифицированная функция Бесселя 2 типа, $s = \text{sign}(\text{Re}k)$. Суперпозиция парциальных решений дает решение в виде нормальной моды, удовлетворяющей всем граничным условиям и условию на ∞ .

После подстановки решений в граничные условия получим линейную однородную алгебраическую систему уравнений относительно произвольных постоянных C_n ($n = 1, \dots, 7$), условие разрешимости которой является дисперсионным уравнением. Дисперсионное уравнение имеет достаточно громоздкий вид и здесь не приводится. В предельном случае, когда вязкость жидкости в ядре вихря не учитывается, и область, занимаемая ядром, является односвязной, дисперсионное уравнение приобретает компактный простой вид

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{m(\kappa - k)k}{\lambda^2} J_m(\lambda) + \frac{k^2}{\lambda} J_{m-1}(\lambda) \right) \times \\
 &\times \left(\Pi\tau^2 + [1 - \Pi + L(1 - m^2 - k^2)] \left(m + sk \frac{K_{m-1}(sk)}{K_m(sk)} \right) \right) \\
 &- (\tau - kW)^2 \left(m + sk \frac{K_{m-1}(sk)}{K_m(sk)} \right) J_m(\lambda) = 0,
 \end{aligned}$$

где $\kappa = s_2 \sqrt{\tau/E}$, $s_2 = \text{sign}(\text{Im}\sqrt{\tau})$, $\lambda^2 = \kappa^2 - k^2$, $\Pi = \rho_1/\rho$, $L = \gamma/\rho a^3 \Omega^2$ – параметр Хокинга.

В докладе детально анализируется влияние вязкости на дисперсионные характеристики волн и появление растущих решений.

В предпоследней части приведены примеры, показывающие более широкие возможности использования собственных функций, чем было продемонстрировано выше. В частности, для закрученной струи проводящей вязкой несжимаемой жидкости в осевом магнитном поле

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + W \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{\mu\rho} B_0 \mathbf{B} \right) + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B},$$

(\mathbf{B} – малые возмущения осевого магнитного поля $B_0 \mathbf{e}_z$) предложенный способ работает столь же успешно. Разумеется, выкладки становятся более сложными и, причем, даже и в отсутствие аксиального течения собственные числа κ , число которых возрастает до пяти,

$$E\kappa^5 + i\tau(1 + Re_m E)\kappa^3 - 2ik\kappa^2 + (k^2 Al - \tau^2)Re_m \kappa + 2\tau Re_m k = 0, \quad (4)$$

не выражаются через параметры задачи посредством радикалов. Здесь уравнение совместности (4) записано в безразмерном виде, $\tau = \omega/\Omega$, $k' = ka$, $\kappa' = \kappa a$, $E = \nu/(\Omega a^2)$ – число Экмана, $Re_m = \mu\sigma\Omega a^2$ – магнитное число Рейнольдса, $Al = B_0^2/(\mu\rho\Omega^2 a^2)$ – число Альфена. Однако это не является серьёзным затруднением.

В заключительной части дается сравнительный анализ влияния вязкости и других дестабилизирующих механизмов на потерю устойчивости стационарным течением.

- [1] Солдатов И.Н. // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 2. С. 15.
- [2] Солдатов И.Н. // Математическое моделирование 2019. Т. 31, № 3. С. 97.
- [3] Солдатов И.Н. // Вестник научно-технического развития (<http://www.vntr.ru>). 2018. № 3 (127). С. 28.
- [4] Солдатов И.Н. // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 3. С. 30.
- [5] Kelvin, Lord // Philos. Mag. 1880. Vol. 10. P. 155.
- [6] Krishnamoorthy V. // Southampton, 1966. Ph.D. thesis.
- [7] Moore D.W., Saffman P.G. // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. A272. P. 403.
- [8] Uberoi M.S. et al // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15, № 10. P. 1718.
- [9] Lessen M. et al // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 60. P. 459.
- [10] Loiseleux T. et al // Phys Fluids. 1998. Vol. 10. P. 1120.
- [11] Gillis J., Kaufman B. // Applied Mathematics Quarterly. 1962. Vol. 19. P. 301.
- [12] Kubitschek J.P., Weidman P.D. // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 572. P. 261-286.
- [13] Ильин В.А., Крицков Л.В. // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 96, ВИНТИ, М., 2006.

Секция «Математическое моделирование
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 21 мая 2020 г.
Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.