Труды XXIV научной конференции по радиофизике

# СЕКЦИЯ «СТОХАСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ»

Председатель – Б. Спаньоло (Италия), секретарь – А.А. Харчева. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

#### **MULTI-PARAMETER ESTIMATION, CRITICALITY AND QUANTUM-NESS**

A. Carollo<sup>1,2)</sup>, B. Spagnolo<sup>1,2)</sup>, D. Valenti<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Lobachevsky State University <sup>2)</sup> University of Palermo

In this paper we report a measure of quantum-ness in quantum multi-parameter estimation problems. We can show that the ratio between the mean Uhlmann Curvature and the Fisher Information provides a figure of merit which estimates the amount of incompatibility arising from the quantum nature of the underlying physical system. This ratio accounts for the discrepancy between the attainable precision in the simultaneous estimation of multiple parameters and the precision predicted by the Cramèr-Rao bound. As a testbed for this concept, we consider a quantum many-body system in thermal equilibrium, and explore the quantum compatibility of the model across its phase diagram.

The solution of a quantum parameter estimation problem amounts to find a measurement strategy and optimal estimators,  $\hat{\lambda}_i$ , of a set parameters  $\lambda_i$ . Optimal unbiased estimators in are those saturating the quantum Cramér-Rao (QCR) inequality [1]

$$tr[WCov(\hat{\lambda})] \ge tr(WJ^{-1}), \tag{1}$$

where  $J_{ij} = \frac{1}{2} tr[\rho\{L_i, L_j\}]$  is the quantum Fisher information matrix(QFIM),  $J_i$  are symmetric logarithmic derivatives, that are solutions of the operator equations  $\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{2} \{L_i, \rho\}$ ,  $\rho$  is the ( $\lambda_i$ -dependent) density matrix of the quantum system, {.,.} is the anticommutator and W is a positive definite weighing matrix. Contrary to the classical counter-part, the QCR bound may not be saturated, unless  $U_{ij} = 0$ , where

$$U_{ij} = \frac{1}{2} tr[\rho[L_i, L_j] \tag{2}$$

is the so called mean Uhlmann curvature [2], provides the so called *compatibility condition* [3].

The amount by which the optimal quantum estimation strategy can possibly deviate from the QCR bound (1) can be quantified by the *incompatibility index* [4], i.e.

$$R \coloneqq \left\| 2iJ^{-1}U \right\|_{\infty},\tag{3}$$

where  $||..||_{\infty}$  is the large eigenvalue of a matrix. One can show that  $0 \le R \le 1$  [4]. The lower limit condition The lower limit condition, R=0, is equivalent to the compatibility condition. On the other hand, the value R=1 marks the *condition of maximal incompatibility*. When this condition is met, the indeterminacy arising from the quantum nature of the estimation problem reaches the order  $||J^{-1}||_{\infty}$ , i.e. the same order of magnitude of the QCR bound itself.

As an application of the above considerations, let's consider a paradigmatic model of spin-1/2 chains in thermal equilibrium, the (rotated) one dimensional Ising model in transverse field. The model is defined by the Hamiltonian  $H(\phi, h) = g(\phi)H(h)g(\phi)^{\dagger}$ , with  $g(\phi) \coloneqq e^{i\frac{\phi}{2}\sum \sigma_i}$  and

$$H(h) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M} [\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + h \sigma_n^z],$$
(4)

where  $\sigma_n^i$  (i=x,y,z) are Pauli operators on the n-th site of the chain. At T=0, the chain undergoes a quantum phase transition at h=1. For h>1, the system is in a disordered paramagnetic phase, with quasi-particle excitations given by spin-flips. For h<1, it is in an ordered phase, whose ground state is characterized by a long-range order.

One can calculate the incompatibility index R from its definition in Eq.(4), by using the thermodynamic limit of the matrices U and J. In the left panel of Fig.1, we display the contour plot of  $R(h, \varphi)$  as a function of T and h. Here, h and  $\varphi$  are the parameter to be determined in the parameter estimation model. Notice that the plot does not depend on  $\varphi$ , since both J and U are independent of the specific value of  $\varphi$ . This plot is obtained through the exact diagonalization in terms of quasi-momentum k, and the numerical integration of J(k), and U(k). An analogous result is displayed in the right panel of Fig.1, for  $R(h, \varphi, \beta)$ , where  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  is the inverse temperature, and is considered as an extra parameter in the estimation problem.



Both panels display the typical "V-shaped" phase diagram of quantum phase transitions, and one can recognize three distinctive regimes. The high temperature region, for  $T \gg E_{max}$ , where  $E_{max}$  is the largest energy eigenvalue. The low temperature regime, for  $T \leq \Delta/k_B$  and the quantum critical regime at  $T \sim 0$  and  $h \sim 1$ .

In the high temperature regime, for any fixed value of h, the parameter R decreases asymptotically to zero, revealing that the quantum nature of the parameter estimation model is lost, due to thermal averaging. In this regime R is expected to vanish with a universal 1/T rate.

In the low temperature regime, for values which are far from the critical value of the magnetic field, h=1, the parametric model shows its quantum incompatibility at its maximum. The phase diagram displays a plateau as function of temperature, and the quantumness of the system is nearly independent of T, showing a behaviour which is dictated by its zero temperature features.

Close to criticality, the system system displays a sharp minimum corresponding to T=0 and h=1, where the value of R, in both parametric schemes drops abruptly to zero. This behaviour is due to the critical scaling of the QFIM which increases dramatically in the vicinity of a quantum criticality. The U diverges too in this regime, but with a slower rate compared to the QFIM. This causes the incompatibility condition to be relatively negligible in this regime and shows how the quantum multi-parameter scheme converges to a quasiclassical estimation problem. This implies that quantum nearly-critical systems, when used as probes in quantum estimation protocols, are quite beneficial not only for the dramatic enhancement of the sensitivity due to the divergent Fisher information, but also for the multi-parameter compatibility provided by the negligible value of R.

This work was supported by the Grant of the Government of the Russian Federation, contract No. 074-02-2018-330 (2). We acknowledge also partial support by Ministry of Education, University and Research of the Italian Government.

- Helstrom C.W. Quantum detection and estimation theory. New York: Academic Press, 1976, 305 p.
- [2] Carollo A., Spagnolo B., Valenti D. // Sci. Rep. 2018. Vol. 8. P. 9852.
- [3] Ragy S, Jarzyna M and Demkowicz-Dobrzanski R. // Phys. Rev. A. 2016. Vol. 94. P. 052108.
- [4] Carollo A., Spagnolo B., Dubkov A.A., Valenti D. // J. Stat. Mech. Theory Exp. 2019. Vol. 2019. P. 094010.

## EFFECTS OF A LÈVY NOISE SOURCE ON THE SWITCHING CURRENT DISTRIBUTIONS OF A SHORT JOSEPHSON TUNNEL JUNCTION

C. Guarcello<sup>1)</sup>, D. Valenti<sup>2)</sup>, B. Spagnolo<sup>2)</sup>, V Pierro<sup>3)</sup>, G Filatrella<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> University of Salerno
 <sup>2)</sup> University of Palermo
 <sup>3)</sup> University of Sannio

In this paper we demonstrate how Lévy-distributed current fluctuations affect the distribution of switching currents of a current-biased short Josephson tunnel junction [1,2].

The electrodynamics of a short Josephson junction (JJ) can by studied through the resistively and capacitively shunted junction model for the phase difference  $\varphi$ , which reads as follow [3,4,5]

$$\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 C \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dU}{d\varphi} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right) I_n,\tag{1}$$

where *C* and *R* are the capacitance and the normal state resistance of the device, respectively. In the previous equation,  $I_n$  consists of the sum of all the current contributions, i.e., the bias current  $I_b$ , the thermal noise, and the Lévy noise source. The term *U* is the so-called washboard potential

$$U(\varphi) = U_0 [1 - \cos \varphi - i_b \varphi], \qquad (2)$$

where  $i_b$  is the bias current normalized to the critical current  $I_c$  of the junction and  $U_0 = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)I_c$ . This potential is composed by a sequence of minima and maxima, so that the phase is "confined" in a superconducting metastable state by the potential barrier

$$\Delta U = 2U_0 \left[ \sqrt{1 - i_b^2} - i_b \arcsin(i_b) \right].$$
(3)

In this picture, the current bias flowing through the junction represents the slope of the potential  $U(\varphi)$ , thus, if  $i_b < 1$  the phase remains confined within a potential well until a noisy fluctuation pushes it out, and the device switches to the voltage state. If we assume to slowly increases the bias current, the value at which the escape process occurs is called switching current,  $i_{SW}$ . Since this phenomenon is intrinsically stochastic, by repeating the measurement several times, we can build a distribution of switching currents.

In normalized units, the RCSJ model can be recast in

$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m\eta\frac{d\varphi}{dt} + U_0\frac{du}{d\varphi} = U_0i_n,\tag{4}$$

where  $m = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2 C$ , the friction is  $\eta = \frac{1}{RC}$ , and, in this units, the plasma frequency of the junction is  $\omega_p = \sqrt{U_0/m}$ . The bias current is assumed to linearly increase,  $i_b(t) = v_b t$ , at a velocity  $v_b = t_{max}^{-1}$ . In this work we assume  $\eta = 0.1\omega_p$ ,  $v_b = 10^{-7}\omega_p$ , and the switching current distributions consists of a sequence of  $N = 10^4$  bias current ramps.

In this work we consider the contemporaneous presence of a thermal noise source, with the usual Gaussian white-noise statistics, and a Lévy noise source  $S_{\alpha}(\sigma, \beta, \lambda)$ . In particular,

we consider only symmetric (i.e., with  $\beta = 0$ ), bell-shaped, standard (i.e., with  $\sigma = 1$  and  $\lambda = 0$ ), stable distributions  $S_{\alpha}(1,0,0)$ , with  $\alpha \in (0,2]$ . The Gaussian and Lévy noise amplitude are  $\gamma_G = 10^{-3}$  and  $\gamma_L = 5 \times 10^{-5}$ .



Fig. 1

Fig. 1 shows the probability distribution functions (PDFs) and the cumulative distribution functions (CDFs) of the switching currents at different values of the stability index  $\alpha \in$ (0,2]. The PDFs show a peak at high values of switching currents due to the thermal Gaussian noise source, which produce switching events at current values close to the critical current. The height of this peak reduces by increasing  $\alpha$ . Another clear distinction between low and high  $\alpha$  cases lies in the low-current behavior of the PDFs: in the former case, the switching probability is sizable, while in the latter case it is vanishingly small.

The behavior of the CDFs, that is the probability that  $i_{SW}$  takes a value less than or equal to  $i_b$ , makes even more evident the distinctions between the curves obtained changing  $\alpha$ . In fact, the CDFs are organized in well distinct curves, that is, in other words, at a given  $i_b$  the CDF clearly decreases with  $\alpha$ .

We estimated also an analytical closed expression for both the PDF and the CDF in the case of an escape process from a metastable state driven by Lévy distributed fluctuations.

To this aim, first we recall that, for arbitrary spatial and energy scale, by rescaling time, energy, and space, the mean escape time  $\tau$  for the Lévy statistics reads [2,10]

$$\tau(\alpha, D) = \left(\frac{\eta^{1-\alpha} \Delta x^{2-2\alpha-\alpha\mu_{\alpha}}}{4^{1-\alpha} \Delta U^{1-\mu_{\alpha}} 2^{\alpha\mu_{\alpha}}}\right) \frac{\mathcal{C}_{\alpha}}{D^{\mu_{\alpha}}}.$$
(5)

By assuming  $\mu_{\alpha} \cong 1$  in the prefactor [10], the previous equation becomes

$$\tau(\alpha, D) = \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{\alpha} \frac{\mathcal{C}_{\alpha}}{D^{\mu_{\alpha}}},\tag{6}$$

that is, the mean escape time only depends upon the distance  $\Delta x$ . The CDF of  $i_{SW}$  as a function of  $i_b$  for a generic initial value of the bias ramp,  $i_0$ , reads

$$CDF(i_b|i_0) = 1 - Prob[i_{SW} > i_b|i_0],$$
(7)

and the PDF associated to Eq. (7) as a function of the average escape time  $\tau(i_b)$  is

$$P(i_b|i_0) = \mathcal{N} \frac{1}{v_b} \frac{1}{\tau(i_b)} exp\left[-\frac{1}{v_b} \int_{i_0}^{i_b} \frac{di}{\tau(i)}\right].$$
(8)

The expression of  $\tau(\alpha, D)$ , Eq. (6), inserted in Eq. (8) gives for the Lévy statistics (at the first order in  $i_b$ ) the relation

$$P(i_b|i_0) \propto exp\left[-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha} \frac{i_b D^{\mu_{\alpha}}}{v_b C_{\alpha}}\right].$$
(9)

The PDF can be analytically expressed in a compact form as

$$P(i_b|i_0) = \mathcal{N} \frac{d\mathcal{F}_{\alpha}}{di_b} exp\left\{-\frac{D^{\mu_{\alpha}}}{v_b \mathcal{C}_{\alpha}} [\mathcal{F}_{\alpha}(i_b) - \mathcal{F}_{\alpha}(i_0)]\right\}.$$
(10)

Here, we defined the nonlinear function  $\mathcal{F}_{\alpha}$  as

$$\mathcal{F}_{\alpha}(i_{b}) = 2^{\alpha} \left\{ \frac{\cosh^{-1}(i_{b})}{2[\pi - 2 \arcsin(i_{b})]} \{ E_{\alpha}[\cosh^{-1}(i_{b})] - E_{\alpha}[-\cosh^{-1}(i_{b})] \} + \frac{i\pi^{1-\alpha}}{4} \left[ E_{\alpha} \left( -\frac{i\pi}{2} \right) - E_{\alpha} \left( \frac{i\pi}{2} \right) \right] \right\},$$
(11)

where  $E_{\alpha}[]$  is the exponential integral with  $\alpha$  argument, and  $\mathcal{N}$  is a proper normalizing factor defined as

$$\mathcal{N} = \left(1 - \exp\left\{-\frac{D^{\mu_{\alpha}}}{v_b \mathcal{C}_{\alpha}} \left[\mathcal{F}_{\alpha}(1) - \mathcal{F}_{\alpha}(i_0)\right]\right\}\right)^{-1}.$$
(12)

The corresponding CDF is



Fig. 2

Fig. 2 shows a comparison between the Lévy induced "marginal" CDFs, i.e., restricted to the maximum bias value  $i_b = 0.6$ , obtained by solving Eq.(4) numerically (solid lines) and that analytically estimated from Eq.(13) (dashed line), for  $\alpha \in [0.1 - 1.1]$ ,  $\gamma_L = 10^{-7}$ , and  $\gamma_G = 0$ . In the considered range of  $i_b$  values, the effects of the Gaussian noise's contri-

bution could be in any case safely ignored, and this is why we set the Gaussian noise intensity to zero. The agreement between the computational results and the theoretical analysis, see Eq. (13), for  $\alpha \leq 1$  is quite accurate.

In conclusion, the analysis of the CDFs of switching current distributions allows to recognize the presence of a Lévy noise source, and to study its characteristics, also in the case of a thermal noisy background in which the system is embedded.

- Guarcello C., Valenti D., Spagnolo B., Pierro V., Filatrella G. // Nanotechnology. 2017. Vol. 28. P. 134001.
- [2] Guarcello C., Valenti D., Spagnolo B., Pierro V., Filatrella G. // Phys. Rev. Applied. 2019. Vol. 11. P. 044078.
- [3] Spagnolo B., Valenti D., Guarcello C., Carollo A., Persano Adorno D., Spezia S., Pizzolato N., Di Paola B. // Chaos, Solitons Fract. 2015. Vol. 81. Part B. P. 412.
- [4] Guarcello C., Valenti D., Spagnolo B. // Phys. Rev. B. 2015. Vol. 92. P. 174519.
- [5] Spagnolo B., Guarcello C., Magazzú L., Carollo A., Persano Adorno D., Valenti D. // Entropy. 2017. Vol. 19. P. 20.
- [6] Guarcello C., Valenti D., Augello G., Spagnolo B. // Acta Phys. Pol. B. 2013. Vol. 44. P. 997.
- [7] Valenti D., Guarcello C., Spagnolo B. // Phys. Rev. B. 2014. Vol. 89. P. 214510.
- [8] Guarcello C., Valenti D., Carollo A., Spagnolo B. // Entropy. 2015. Vol. 17. P. 2862.
- [9] Guarcello C., Valenti D., Carollo A., Spagnolo B. // J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2016. P. 054012.
- [10] Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Klafter J., Metzler R. // Europhys. Lett. 2005. Vol. 72. P. 348.

## ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В МОДЕЛИ МЕМРИСТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Д.В. Гусейнов<sup>1)</sup>, И.В. Матюшкин<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup>ОАО «НИИМЭ И Микрон»

#### Введение

Мемристор является перспективным функциональным устройством в рамках электронной компонентной базы микро- и наноэлектроники. Нестабильность его характеристик, в частности, при циклировании, сдерживает применение мемристоров в некоторых приложениях, но в то же время может быть полезным в нейроморфных системах, а также для генерации случайных чисел. Следует также различать представление о мемристоре как абстрактном объекте, проявляющем гистерезис зависимости выхода (ток) от входа (напряжение), от его реализации, характеризующейся сложностью многообразием физико-химических процессов. Мы будем неявно предполагать однофиламентарную концепцию работы мемристивной структуры «металл нестехиометрический окисел металла - металл», но сосредоточимся именно на абстрактности математического описания. Основная цель работы заключается в предсказании детерминированного хаоса в рамках простой модели. Его проявление экспериментально наблюдается в динамике четверки ключевых параметров мемристора  $Out = \langle V_{SET}, V_{RESET}, R_{ON}, R_{OFF} \rangle$ , напряжений переключения и сопротивлений. Предполагается, что мемристор имеет только два метастабильных состояния. Циклирование состоит подаче на мемристор периодической развертки напряжений, при которой он проходит все свои метастабильные состояния.

Необходимым условием гистерезиса является наличие внутренних фазовых переменных X, которые связаны дифференциальными, алгебраическими или интегральными уравнениями, например, законом dX = F(X, V(t), t)dt. Очевидно, внутренние переменные детерминируют внешние, т.е.  $X(t) \rightarrow Out(n)$ . Модель мемристора первого порядка, т.е. когда dim X = 1 (в качестве переменной X часто берут длину филамента), принципиально неспособна объяснить псевдослучайное поведение Out(n). Здесь мы ссылаемся на теорему Пуанкаре-Бендиксона, при некоторых естественных условиях на гладкость функции F запрещающей появление хаоса в системе размерности меньше трех, т.е. dim X < 3.

Требуются дополнительные фазовые переменные, чтобы получить мемристор второго или, что лучше, третьего порядка. Если они ассоциированы с разнородными физическими переменными, то тем самым практически гарантирована их независимость. Мы выбрали [1] тройку  $X = (x, Q, \theta)$ , где  $0 \le x \le 1$  – длина филамента, нормированная на толщину диэлектрика, Q – величина динамического электрического заряда, накопленного в области филамента при протекании тока,  $\theta$  – локальная температура филамента. Все три переменные носят умозрительный и интегральный характер, нельзя приписывать им в точности физический смысл; они им обладают только «в общем», приближенно. Запрет, следующий из теоремы Пункаре-Бендиксона, несколько ослабляется тем, что: 1) ток I формально тоже фазовая переменная, на которую наложена алгебраическая связь  $I = V(\tau)/R(x)$  закона Ома; 2) хотя динамика

определяется непрерывным параметром времени *t*, но хаос ищется при дискретном *n*; 3) система уравнений не является автономной, т.е. присутствует внешнее напряжение. Поэтому можно высказать предположение, что модели мемристора второго порядка для  $X = (x, Q, \theta)$  окажется достаточно. Вместе с тем отметим, что и теоретические расчеты, и эксперимент показывают, что область филамента разогревается до высоких температур выше 1000К, и температурный фактор нельзя не учитывать. Однако мы попытаемся найти хаос минимальными и простейшими средствами.

#### Модель мемристора второго порядка

Мы опираемся на модель Струкова [2] с нашими модификациями. Во-первых, учтем, что на практике измерения проводятся в режиме ограничения по току. Вовторых, предположим, что по мере протекания тока через филамент в нем накапливается или истощается электрический заряд, что вызвано насыщением оборванных химических связей, перезарядкой ловушек и внесением беспорядка в структуру вещества. Хранимый заряд небольшой по величине и описывается дискретной переменной N = Q/e (e – заряд электрона). Тем не менее, в расчетах примем, что N непрерывна. Влияние заряда на величину протекающего тока представим кулоновской поправкой  $\Delta V$  к внешнему напряжению, как если бы возникал дополнительный барьер и совершалась бы работа по его преодолению электронами. Динамику заряда N опишем с помощью функции захвата  $f_v$ , по форме аналогичной функции окна: вне отрезка [ $-N_{MAX}$ ;  $N_{MAX}$ ] она обращается в ноль. Также можно внести асимметрию скорости захвата заряда в зависимости от знака N. Таким образом, получаем следующую модель:

$$\begin{cases} I(t) = \frac{V(\tau) - \Delta V(x, N)}{R(x, N)}, \\ \frac{dx}{dt} = k_2 f_w(x) I(t), \\ \frac{dN}{dt} = k_3 f_v(N) I(t). \end{cases}$$
(1)

Режим ограничения тока состоит в последовательном подключении нагрузочного сопротивления (по умолчанию *R*<sub>load</sub> =0.5), что дает (2):

$$R(x) = R_{load} + R_{min}x + R_{max}(1-x).$$
 (2)

Кулоновская поправка допускает присутствие константы *a* в знаменателе (3), что технически не дает возникнуть сингулярности, а физически отражает и наличие у филамента толщины (задача квазиодномерна), и распределение заряда по объему филамента:

$$\Delta V(x,N) = k_1 \frac{N}{x+a}, k_1 = \begin{cases} k_{1+}, N \ge 0\\ k_{1-}, N < 0 \end{cases}.$$
(3)

Для функции захвата примем вид «крыши» (4) с асимметрией  $k_3$ :

$$f_{\nu}(N) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{N}{N_{max}} \right|, N \in [-N_{max}; N_{max}] \\ 0, N \notin [-N_{max}; N_{max}] \end{cases}, k_{3} = \begin{cases} k_{3+}, N \ge 0 \\ k_{3-}, N < 0 \end{cases}$$
(4)

Конкретный вид функции захвата, соответствующий физической ситуации, требует большой работы по квантово-химическому моделированию. В модели используется простейший вид функции окна для *x* (5):

$$f_w(x) = \begin{cases} 1, x \in [0; 1] \\ 0, x \notin [0; 1] \end{cases}$$
(5)

#### Результат численного эксперимента

• •

Численная схема основана на явном методе Эйлера, причем на отрезке [0; T = 1] равномерно индексированы  $M = 5 \cdot 10^5$  точек. По умолчанию примем  $k_3=0.006$ , a=0.1,  $N_{max}=10, x(0)=0, N(0)=0$ , а развертку напряжения зададим формулой (5):

$$V(\tau) = A \cdot \sin(2\pi v\tau), A \equiv 1.5, v = 1, \tau \in [0; 1].$$
(6)

Протокол вычислительного эксперимента зафиксируем в виде трехфакторной таблицы 1: Табл.

N⁰	$V(\tau)$	<i>k1+/ k1</i> -	$k_2$	Out	
1.	sin (τ)	0.03/0.03	0,0006	Повторе-	
				ние входного	
				сигнала с 5-го	
				периода	
2.	$\sin(\tau)$	0.03/0.03	0,00093	Хаотиче-	
				ское поведение	
3.	$\sin(\tau)$	0.03/0.03	0,0012	2-	
				периодическая	
				орбита с 3-го	
				периода	
4.	$\sin(\tau)$	0.06/0.03	0,00093	3-	
				периодическая	
				орбита с 20-го	
				периода	

На рис. 1-3 показаны расчетные вольт-амперные характеристики для 2-4 строк табл. соответственно. На рисунках показаны 100 последовательных циклов переключения.



Рис. 3

Таким образом, в рамках простой модели мемристора второго порядка продемонстрирована возможность наблюдения хаотической динамики и переходных режимов.

Работа поддержана Правительством Российской Федерации (соглашение № 074-02-2018-330 (2)).

- Mikheev R., Teplov G., Matyushkin I. // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). 2019. P. 2057-2061.
- [2] Strukov D.B. et al. // Nature. 2008. Vol. 453, №. 7191. P. 80.

## РАЗРАБОТКА НЕЙРОНОПОДОБНОГО ГЕНЕРАТОРА НА ОСНОВЕ МЕМРИСТИВНОГО УСТРОЙСТВА

## И.М. Кипелкин, В.В. Сдобняков, С.А. Герасимова, В.Б. Казанцев

#### ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Проектирование компактных нейроморфных систем (в том числе микро - и наночипов), способных воспроизводить информационные и вычислительные функции клеток мозга, является актуальной междисциплинарной задачей современной науки и техники. Разработка электронных нейронов и синапсов (соединений между нейронами) на основе тонкопленочных наноструктур (мемристивных устройств) является одним из наиболее перспективных направлений междисциплинарных исследований в развитии нейроморфных систем [1]. В перспективе электронные устройства на основе мемристоров, воспроизводящих свойство синаптической пластичности и функционирующих в сопряжении с живыми нейронами, смогут осуществлять обработку информации, используя принципы работы мозга. Основными качествами мемристивных устройств являются плотность записи, время переключения, энергопотребление, время хранения информации, ресурс записи и себестоимость. Считается, что новый тип запоминающих устройств сможет опередить по показателям существующие устройства, что приведет к революции на рынке энергонезависимой памяти, где основным конкурентом на данный момент является Flash-память.

В данной работе была спроектирована, реализована и протестирована схемотехническая модель нейроподобного генератора ФитцХью-Нагумо с нелинейностью на мемристивных устройствах, а также произведена оценка возможности использования мемристивных структур в элементах рабочей памяти. Параметры схемотехнической мемристивного устройства соответствуют параметрам модели структуры Zn<sub>0.29</sub>O<sub>0.60</sub>Y<sub>0.11</sub>, полученную с помощью литографии и одновременного реактивного магнетронного распыления катодов из золота и циркония в среде кислорода. Было проведено сравнение полученных вольт-амперных характеристик (ВАХ) с характеристиками образцов тонких пленок. Эксперимент проводился с помощью оборудования Agilent B1500a. Таким образом, при исследовании ВАХ мемристивной структуры, было установлено, что при приложении напряжения с меньшей амплитудой, чем напряжение переключения, будет наблюдаться сохранение состояния, такое же, как и в нервных клетках. Данные импульсы дают возможность считывать состояние мемристора и хранить необходимое состояние неопределенное время. В интервале рабочих напряжений ВАХ мемристора имеет нелинейность, что дает возможность гладко управлять выходным током мемристора при малом отклонении уровня входного сигнала. Такое преобразование позволяет более гибко идти к созданию звеньев из нескольких соединенных мемристоров, по которым распространяется восходящий импульс в нейроморфной структуре. Кроме того, ВАХ структуры совпадает с используемой в моделировании нейроморфных систем суммирующей функцией нейрона. Это позволит использовать мемристор не только в качестве синапсов, но и в качестве суммирующего элемента искусственных нейронов. Данная структура имеет высокую стабильность и надежность характеристик вследствие равномерного распределения элементов по толщине пленки. Разработанная схемотехническая мемристивная модель генератора ФитцХью-Нагумо демонстрирует качественное совпадение основных

характеристик нейронов: наличие порога возбуждения, наличие возбудимого и автоколебательного режимов с возможностью переключения между ними. Показано, что при подаче коротких (порядка длительности импульса возбуждения) прямоугольных импульсов генератор работает в режиме периодической генерации спайков. Возникновение периодической спайковой активности в ответ на кратковременное воздействие соответствует динамическому хранению информации о поступившем импульсе. За хранение информации понимается возникновение периодической нейронной активности в ответ на одиночный прямоугольный импульс. Разработанный мемристивный генератор обладает следующими характеристиками: амплитуда 20 В, частота 3,5 Гц, длительность 298 мс. Предлагаемая модель имеет принципиальное значение для построения биологоправдоподобных моделей нейронов с мемристивными элементами, поскольку такие модели представляют собой устройства, позволяющие получать информацию о режимах нейронной активности в реальном времени, что важно при исследовании свойств нейронной активности, а также качественно воспроизводящими динамику ионных каналов нервной клетки. Применение подобных моделей в конструировании больших нейронных сетей благодаря адаптивным свойствам мемристивных систем [2] позволит увеличить энергоэффективность и производительность последних.

В заключении отметим, что одной из перспектив нейровычислений является смена моделей в вычислительных системах, выходящих за классическую и до сих пор доминирующую архитектуру фон Неймана, которая разделяет хранение и вычисление на отдельные блоки. Обработка данных в системе ведется последовательно, что требует обмена большими объемами информации между процессором и модулем памяти. Процессоры в современных компьютерах способны обрабатывать данные гораздо быстрее, чем скорость доступа к памяти, что является существенным ограничением и его преодоление необходимо для дальнейшего повышения скорости обработки данных. В качестве перспективной модели видится организация работы компьютера по аналогии с пластичными нейросетями мозга. Другим направлением является создание нейрогбридных устройств, соединяющих живые клетки (нервную ткань) с электронными системами [3], позволяющих использовать живые нейронные сети в процессах обработки информации.

Работа поддержана Правительством Российской Федерации (соглашение № 074-02-2018-330 (2)).

- [1] Герасимова С.А., Михайлов А.Н., Белов А.И, Королев Д.С., Горшков О.Н., Казанцев В.Б. // Журнал технической физики. 2017. Т. 87, №. 8. С. 1248.
- [2] Jo S., Chang T., Ebong I., Bhadviya B., Mazumder P., Lu W. // Nano letters. 2010. Vol. 10, № 4. P. 1297.
- [3] Jacobo D.S., Aliaga J. // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 76, № 5. P. 051919.

# ЭФФЕКТ КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В МОДЕЛИ МЕМРИСТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

## М.А. Мищенко, Д.В. Гусейнов, А.Н. Михайлов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Пластичность синаптических связей является фундаментальным свойством нейронных сетей мозга. Синапс представляет собой контакт между отростками двух нейронов и выполняет функцию направленной передачи сигнала от нейрона, называемого пресинаптическим, к постсинаптическому нейрону.

Как только потенциал действия достигает пресинаптического окончания, запускается каскад механизмов, приводящий к выбросу нейропередатчиков в синаптическую щель. Нейропередатчики, попавшие на постсинаптическое окончание, открывают ионные каналы постсинаптического нейрона. Возникающие ионные постсинаптические токи изменяют концентрацию ионов и, как следствие, мембранный потенциал.

Величина постсинаптического тока, возникающая в результате выброса нейропередатчика, непостоянна даже среди синапсов одного нейрона и называется силой или весом синаптической связи. Более того, сила связи непостоянна во времени и зависит от предыдущей активности пре- и постсинаптического нейронов. Такое временное изменение силы связи называется синаптической пластичностью. В зависимости от временного масштаба таких изменений пластичность разделяют на долговременную и кратковременную.

Долговременная пластичность действует на временных масштабах часов и дней и считается механизмом обучения. Кратковременная пластичность вызывает изменения, которые длятся несколько десятков-сотен миллисекунд. Причиной таких изменений являются метаболические особенности нейрона, такие как расходование ресурса нейропередатчика, накопление ионов Ca<sup>2+</sup> в клетке или воздействие нейромодуляторов. В случае слишком частой активации произойдет истощение ресурса нейропередатчика и наступит синаптическая депрессия -- снижение амплитуды постсинаптических токов. В случае прекращения стимуляции ресурс нейропередатчика восстановится, и сила связи вернется к исходным значениям. Кроме того, при некоторых условиях накопление ионов Ca<sup>2+</sup> в пресинаптическом окончании может увеличить амплитуду сигнала после восстановления ресурса. Другими словами, синапсы демонстрируют частотную зависимость [1].

Мемристивное устройство представляет собой физическую модель мемристора – элемента электрических цепей, способного менять сопротивление в зависимости от параметров поступающего на вход электрического сигнала. Способность мемристивной структуры менять проводимость под воздействием импульсных сигналов делает ее почти идеальным электронным аналогом синапсов [2].

Предложена модель мемристора, последовательно соединенного с резистором. Данная модель мемристора формулируется в виде системы двух дифференциальных уравнений (1). В модели рассматриваются два параметра состояния: *x* – доля проводящей части мемристора, изменяемая в пределах от 0 до 1, и N – концентрация заряженных ионных ловушек. Предполагается, что заряд на ловушках создает поле заряженной плоскости и в зависимости от полярности внешнего напряжения и направления прыжков ионов, может увеличивать или уменьшать потенциальный барьер.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10^{13} * exp\left(-\frac{E_b \pm \beta N - \frac{0.08 * U}{1 + (x\sigma_1 + (1 - x)\sigma_2)R}}{kT}\right) \\ \frac{dN}{dt} = \frac{I\sigma}{eS}(N_t - N) - \sigma v_0 N_c N * exp\left(-\frac{E_c - E_t}{kT}\right), \end{cases}$$
(1)

где  $E_b$  – барьер для прыжка ионов кислорода, U – полное внешнее напряжение на схеме «мемристор + резистор»,  $R_c$  – последовательно сопротивление для ограничения тока,  $\sigma_1$  – проводимость в состоянии низкого сопротивления,  $\sigma_2$  – проводимость в состоянии высокого сопротивления,  $\beta$  – коэффициент влияния заряда на ловушках на изменение потенциального барьера, I – ток,  $\sigma$  – сечение захвата электрона на ловушку, e – заряд электрона, S – площадь структуры,  $N_t$  – концентрация ловушек,  $v_0$  – скорость насыщения электронов,  $N_c$  – эффективная плотность состояний в зоне, ( $E_c - E_t$ ) – глубина уровня ловушки.

Выходная характеристика мемристора в таком случае запишется в следующем виде (2).

$$I = \frac{U}{\frac{1}{(x\sigma_1 + (1-x)\sigma_2)} + R_c}.$$
 (2)

В качестве источника напряжения на мемристоре использовалась модель нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки [3,4].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = y, \qquad \frac{\partial y}{\partial \tau} = z,$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial z}{\partial \tau} = \gamma - z(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y,$$
(3)

где в применении к динамике нейрона *у* можно интерпретировать как мембранный потенциал нейрона,  $\gamma$  – как внешний ток, а параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  позволяют задавать различные динамические режимы. Такая модель способна воспроизводить регулярную импульсную активность, а также пачечную активность, характерную для некоторых типов нейронов. При этом количество импульсов в пачке может быть как регулярным, так и хаотическим.

Пачечная активность достаточно широко встречается в динамике живых нейронов. Она представляет собой последовательности импульсов, объединенных в группы (пачки или бёрсты), что приводит к появлению нескольких временных масштабов в наблюдаемых межимпульсных интервалов. Период следования пачек может в десятки раз отличаться от периода следования отдельных импульсов в пачке. В ходе численного моделирования динамики мемристора в ответ на пачечную последовательность было обнаружено, что эффект изменения проводимости мемристора происходит неравномерно в ответ на импульсы пачки, как это представлено на рис.1.



С одной стороны, это связано с вариациями амплитуд импульсов внутри пачки, с другой стороны – влиянием накапливающегося заряда ловушек, что приводит к увеличению потенциального барьера. Последний эффект возникает лишь при достаточной частоте следования импульсов, когда ловушки не успевают полностью опустошаться, что можно увидеть из графика переменной состояния N на рис. 1.

Похожий эффект обнаружен при воздействии хаотической импульсной активности. Существенные изменения в проводимости мемристора наблюдаются в те моменты времени, когда частота следования импульсов оказывается ниже, что позволяет ловушкам освобождаться от накопленного заряда, как это можно увидеть из рис.2.



Рис. 2

Полученный результат демонстрирует наличие частотной зависимости в динамике мемристора. В зависимости от частоты следования импульсов наблюдается нерегулярность при переключении проводимости мемристора. Для того, чтобы исключить влияние амплитудных вариаций при изменении частоты, присущих используемой выше модели нейрона, был проведен вычислительный эксперимент по исследованию динамики переключения состояний мемристора с различной проводимостью под воздействием последовательности прямоугольных импульсов постоянной амплитуды и длительности. В качестве характеристики, демонстрирующей частотную зависимость исследуемой модели мемристора 2 порядка, рассматривалось количество импульсов, необходимое для переключения в состояние с максимальной проводимостью из фиксированного начального состояния x=0.1, N=1e12. Обнаружено, что в зависимости от частоты в диапазоне 1-50 кГц требуется различное количество импульсов для полного переключения (рис. 3).



Рис. 3

При увеличении амплитуды количество требуемых импульсов снижается, однако общая закономерность продолжает сохраняться – чем выше частота, тем больше требуется импульсов для полного переключения проводимости мемристора. Данный эффект может быть объяснен заполняемостью ловушек, которые не успевают полностью разрядиться за время между импульсами, что повышает потенциальный барьер и препятствует переключениям проводимости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23001 мк.

- [1] Tsodyks M., Markram H. // Proc. Natl. Acad. Sci. 1997. Vol. 94, № 2. P. 719.
- [2] Тихов С.В., Белов А.И., Королев Д.С., Антонов И.Н., Сушков А.А., Павлов Д.А., Тетельбаум Д.И., Горшков О.Н., Михайлов А.Н. // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, №. 2. С. 298.
- [3] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
- [4] Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В. // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43, № 13. С. 10.

#### ХЕББОВСКОЕ ОБУЧЕНИЕ МЕМРИСТИВНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

К.Э. Никируй<sup>1)</sup>, А.В. Емельянов<sup>1,2)</sup>, В.В. Рыльков<sup>1)</sup>, В.А. Демин<sup>1,3)</sup>

<sup>1)</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» <sup>2)</sup> Московский физико-технический институт <sup>3)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

### Введение

Одно из наиболее перспективных направлений в развитии нейроморфных вычислений связано с искусственными нейронными сетями, способными к обучению без учителя, а именно с импульсными нейронными сетями (ИНС) с мемристорными синаптическими весами. ИНС обучаются с помощью пластичности, зависящей от времени спайка (STDP), которая является типом Хеббовского обучения [1]. Механизм изменения мемристивного веса по правилу STDP был продемонстрирован на примере некоторых мемристивных систем [2–6] и использован для построения аппаратных ИНС [7–12]. В данной работе изучена возможность обучения аппаратных ИНС с помощью пуассоновских последовательностей спайков с различными частотами.

## Архитектура нейроморфной сети

Для исследований была разработана импульсная нейронная сеть (ИНС), состоящая из четырех пресинаптических нейронов, соединенных с пост-синаптическим нейроном посредством мемристивных синапсов, как показано на рис. 1. Было построено две аналогичные импульсные нейроморфные сети, в которых в качестве синапсов использовались либо нанокомпозитных мемристивных наноструктур (НКМН) на основе (CoFeB)<sub>x</sub>(LiNbO<sub>3-y</sub>)<sub>100-x</sub>, либо мемристоры на основе диоксида циркония стабилизированного иттрием Au/Zr/ZrO<sub>2</sub>(Y)/TiN/Ti. Все нейроны были программными: они были запрограммированы генерировать заранее заданную шумовую последовательность (пуассоновски распределенных по времени следования спайков). Форма спай-



432

ков была двух типов: пилообразной с амплитудой 6 В, длительностью 60 мс для НКМН и с амплитудой 4 В, длительностью 60 мс для мемристоров на основе ZrO<sub>2</sub>(Y). Частота входного шумового сигнала могла изменяться от 1 до 10 Гц.

Обучение мемристивных синапсов (изменение их проводимости) в ИНС осуществлялось по протоколу STDP. При этом нижний электрод каждой НКМН был использован как пресинаптический вход, а верхний – как постсинаптический. Амплитуда и длительность спайка была выбрана таким образом, что сам по себе спайк не изменял сопротивление НКМН. При этом, если два спайка будут сложены определенным образом, падение напряжения на мемристоре может быть достаточным для изменения его проводимости. Положительная (отрицательная) задержка по времени  $\Delta t$  означает, что пресинаптический спайк приходит раньше (позже) постсинаптического. Проводимость *G* мемристора можно связать с синаптическим весом, тогда изменение проводимости проводились до и после подачи последовательности пре- и постсинаптических спайков. Зависимость абсолютного изменения вса от времени задержки между пре- и постсинаптическими спайками (окно STDP) для различных НКМН структур представлена на рис. 2. Каждое значение бралось как медианное по 5 измерениям, частота дискретизации по  $\Delta t$  составляла 5 мс.

Хеббовское обучение импульсных нейроморфных сетейС использованием локальных правил обучения, зависящих от межспайковых интервалов (STDP) была изучена возможность обучения типа Хебба импульсных нейросетевых архитектур с мемристивными весами обоих типов, в котором потенциации (росту) подвергаются веса высокочастотных входов, в то время как веса низкочастотных входов оказываются депрессированными (стремятся к нулю). В качестве входных сигналов использовались временные последовательности импульсов, моменты начала которых распределены по Пуассону. В построенной ИНС на два входа подавалась последовательность спайков с высокой частотой (2, 5 или 10 Гц), на два других входа – с низкой частотой (1 Гц).



На рис. 3 представлена зависимость изменения проводимости НКМН от времени. Из рисунка видно, что проводимость НКМН, связанных с высокочастотными входами (частота спайков в этом случае составляла 10 Гц), увеличивается. В то время как проводимость НКМН, связанных с низкочастотными входами (частота спайков в этом

случае составляла 1 Гц), остается низкой. Полученный результат соответствует обучению типа Хебба для ИНС, поскольку можно однозначно разделить мемристивные веса, соответствующие входам с разной частотой. Также обучение было проведено для случая, когда частота спайков на высокочастотных входах составляла 5 Гц. Частота спайков на низкочастотных входах была неизменной и составляла 1 Гц. Из рис. 4 видно, что и в этом случае происходит однозначное разделение весов по проводимостям НКМН. Для случая, когда частота спайков на высокочастотных входах составляла 2 Гц, однозначного разделения весов по проводимостям не происходит. В данном случае только один из высокочастотных входов увеличил свой вес.

Аналогичные эксперименты были проведены для случая, когда в качестве связей между пре- и постсинаптическими нейронами использовались мемристоры на основе ZrO<sub>2</sub>(Y) (рис. 5, рис. 6). Из рис. 5 и рис. 6 видно, что в данном случае однозначного разделения весов по проводимостям не происходит. Это может быть связано с разбросом характеристик мемристоров, в частности, по параметру порогового напряжения переключения. Необходимо проведение дополнительных исследований.



Таким образом, в работе реализована программно-аппаратная импульсная нейронная сеть, состоящая из 4 входных нейронов, соединенных с одним выходным нейроном посредством мемристивных связей и проведено обучение разработанной импульсной нейронной сети на шумовом сигнале с распределением пуассоновского типа по локальным правилам обучения типа STDP. Полученные результаты открывают возможность разработки эффективных алгоритмов обучения и самообучения и построения перспективных надежных архитектур ИНС на основе аналоговых мемристивных устройств. Кроме того, анализ кривых обучения типа пластичности, зависящей от частоты входного сигнала, показывает, что, разделение весов в мемристивной ИНС может поддерживаться даже на шумовом сигнале (на всех входах сети пуассоновский сигнал одной частоты) в некотором диапазоне входных частот. Однако требуются дополнительные исследования параметров вариабельности мемристоров, при которых возможна экспериментальная демонстрация этого эффекта.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 074-02-2018-330 (2).

[1] Caporale N., Dan Y. // Annu. Rev. Neurosci. 2008. Vol. 31. P. 25.

- [2] Ielmini D., Waser R. Resistive Switching: From Fundamentals of Nanoionic Redox Processes to Memristive Device Applications. – Saarbruken: Wiley-VCH, 2016. 751 p.
- [3] Kim S. et al. // Nano Lett. 2015. Vol. 15. P. 2203.
- [4] Prezioso M. et al. // Sci. Rep. 2016. Vol. 6. P. 21331.
- [5] Minnekhanov A.A. et al. // Sci. Rep. 2019. Vol. 9. P. 10800.
- [6] Jo S.H. et al. // Nano Lett. 2010. Vol. 10. P. 1297.
- [7] Covi E. et al. // J. Phys. D. Appl. Phys. IOP Publishing. 2018. Vol. 51. P. 34003.
- [8] Wang Z. et al. // Nat. Electron. 2018. Vol. 1. P. 137.
- [9] Prezioso M. et al. // Nat. Commun. Springer US, 2018. Vol. 9. P. 5311.
- [10] Nikiruy K.E. et al. // Tech. Phys. Lett. 2019. Vol. 45, № 4. P. 386.
- [11] Emelyanov A. V. et al. // Nanotechnology. 2019. Accepted for publication.
- [12] Serb A. et al. // Nat. Commun. 2016. Vol. 7. P. 12611.

# ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО ШУМА НА КОНТАКТЕ АСМ-ЗОНДА К ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНКИ ZRO<sub>2</sub>(Y)

А.С. Новиков<sup>1)</sup>, Д.О. Филатов<sup>1)</sup>, Д.А. Антонов<sup>1)</sup>, И.Н. Антонов<sup>1)</sup>, Б. Спаньоло<sup>1, 2)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup> Университет Палермо

## Введение

В последнее время эффект резистивного переключения (РП) является предметом интенсивных исследований [1]. Данный эффект заключается в обратимом бистабильном (или мультистабильном) изменения сопротивления тонкого диэлектрического слоя, заключенного между двумя проводящими электродами, под действием внешнего электрического напряжения. Перспективными материалами для устройств резистивной памяти считаются оксиды металлов, отличающиеся хорошей совместимостью с технологией структур металл-оксид-полупроводник (МОП) [2]. Как показывают исследования, мемристор обладает признаками стохастической мультистабильной системы, описываемой мультистабильным потенциальным профилем, включающим несколько потенциальных ям, разделенных потенциальными барьерами, отделяющими различные состояния системы [3]. При воздействии шума на стохастическую систему ее отклик представляет собой случайный телеграфный сигнал (СТС) [4]. В данном исследовании на контакте зонда атомно-силового микроскопа (АСМ) к поверхности пленки ZrO<sub>2</sub>(Y) был изучен шум, генерируемый самим проводящим филаментом. Было установлено, что данный шум имеет форму СТС, что является прямым следствием дискретного и, в то же время, стохастического характера теплового движения ионов  $O^{2-}$  в ZrO<sub>2</sub>(Y) в нанометровом масштабе размеров.

#### Экспериментальная часть

Пленки СДЦ толщиной  $d \approx 4$  нм создавались при помощи высокочастотного магнетронного распыления при использовании установки Torr International R2G1-1G2-EB4-TH1 для нанесения тонких пленок. Использовалась индустриальная подложка Si(001) с заранее нанесенными слоями SiO<sub>2</sub> (толщиной 500 нм), Ti (25 нм), и TiN (25 нм). Температура подложки во время нанесения ZrO<sub>2</sub>(Y) составляла 300 °C. Давление газовой смеси Ar-O<sub>2</sub> (50:50 % мол.) равнялось ~ 10<sup>-2</sup> Торр. Молярная доля стабилизирующего оксида Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> в материале мишени составляла ~ 0.12.

Собственный шум филамента исследовался в сверхвысоковакуумной (CBB) среде (давление остаточных газов ~  $10^{-10}$  Topp) при помощи CBB атомносилового/сканирующего туннельного микроскопа (ACM/CTM) Omicron UHV AFM/STM LF1, установленного в CBB систему Omicron MultiProbe RM. Использовались ACM зонды NT-MD NSG-11 DCP с алмазоподобным покрытием. Схема экспериментальной установки и поперечное сечение исследуемой структуры показаны на рис. 1. Для создания проводящего филамента в плёнке ZrO<sub>2</sub>(Y), перед началом измерений проводится электроформинг. Между ACM зондом и проводящим слоем TiN прикладывалось напряжение смещения  $V_g$  при помощи цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) USB модуля Lcard E502, использовавшегося как программируемый источник напряжения.





АСМ зонд приводился в контакт с поверхностью пленки ZrO<sub>2</sub>(Y) и между АСМзондом и образцом подавалось напряжение 5–6 В до тех пор, пока сила тока  $I_t$  через АСМ зонд не достигала заранее заданного значения 10–15 нА. Далее измерялись вольт-амперные характеристики (BAX)  $I_t(V_g)$  контакта АСМ зонда к образцу (в совокупности образующих виртуальный мемристор размерами ~10 нм) при развёртке напряжения  $V_g$  от  $V_{min} < V_{RESET} \approx -6$  В до  $V_{max} > V_{SET} \approx +5$  В. Здесь  $V_{SET}$  и  $V_{RESET}$ напряжения переключения виртуального мемристора из состояния с высоким сопротивлением (CBC) в состояние с низким сопротивлением (CHC) и обратно, соответственно . На циклических ВАХ наблюдался гистерезис биполярного типа, связанный с формированием и разрушением в плёнке  $ZrO_2(Y)$  филаментов, состоящих из вакансий кислорода Vo. Далее измерялись осциллограммы тока через контакт АСМ зонда к сформированному филаменту в CHC  $I_t(t)$  (t – время) при  $V_g = +2$  В  $<<|V_{SET}|$ ,  $|V_{RESET}|$  в течение ~1 мин. Частота оцифровки аналого-цифрового преобразователя (АЦП) составляла ~15 кГц.

#### Результаты и обсуждения

На рис. 2 показан фрагмент осциллограммы тока через ACM зонд  $I_t(t)$ , на котором наблюдается выраженный CTC. Такая форма осциллограмм  $I_t(t)$  может быть связана с прыжками индивидуальных ионов O<sup>2-</sup> на соседние V<sub>0</sub> в образовавшемся филаменте под действием тепловых колебаний кристаллической решётки ZrO<sub>2</sub>(Y), что является случайным процессом. Электронная проводимость по филаментам в оксидах металлов в CHC осуществляется по прыжковому механизму [2]. Если филамент формируется из малого числа вакансий, то перескок одного иона O<sup>2-</sup> на соседнюю  $V_0$  (как показано на рис. 3) приводит к скачкообразному изменению  $I_t$ , величина которого вполне измерима при помощи используемого предусилителя Omicron UHV AFM/STM.





Рис. 3

Вышеописанный процесс можно рассматривать в формализме движения броуновской частицы в двухъямном потенциале, показанном на рис. 4). Он модулирует ток электронов и фиксируется, выражаясь в прямоугольном импульсе на осциллограмме. В классическом приближении Больцмана, частота перескока броуновской частицы из одной потенциальной ямы в другую  $f_i$  (частота Крамерса) связана с высотой потенциального барьера между ямами  $E_a$  выражением [5]:

$$f_i \sim f_0 exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right),$$

где  $f_0$  – частота колебаний частицы в минимуме потенциальной ямы, k – постоянная Больцмана, T – температура.

На рис. 5 показано распределение времён жизни в состоянии с более низким сопротивлением, полученное из статистического анализа осциллограмм  $I_i(t)$ . Данное распределение может быть аппроксимировано распределением Максвелла-Больцмана с максимумом  $\tau = 1/f_i \approx 0.2 - 0.3$  мс.



Принимая  $f_0$  равной характерной частоте колебаний кристаллической решётки, получаем для T = 300 K, получаем  $E_a = 0,55 - 0,57$  зВ. Полученное значение согласуется с полученными независимо методами спектроскопии фликкер-шума ( $E_a = 0,52 - 0,68$  зВ при 300 K) [6] и измерения тока ионной миграционной поляризации мемристоров на основе ZrO<sub>2</sub>(Y) ( $E_a = 0,53 - 0,55$  зВ в диапазоне температур 300 – 500 K) [7].

## Заключение

В настоящей работе впервые наблюдалась генерация случайного телеграфного сигнала в контакте зонда атомно-силового микроскопа к плёнке  $ZrO_2(Y)$  на проводящей подложке, в совокупности образующих виртуальный прибор резистивной памяти (мемристор) нанометровых размеров. Обнаруженный эффект связан с прыжками отдельных ионов кислорода по кислородным вакансиям внутри филамента. Таким образом, результаты настоящей работы показывают, что метод атомно-силовой микроскопии с проводящим зондом позволяет отслеживать динамику теплового движения индивидуальных ионов кислорода в материале проводящих филаментов. Значения энергии активации перескоков ионов кислорода в ZrO<sub>2</sub>(Y) на соседние вакансии, определённые из результатов статистического анализа времён жизни виртуального мемристора в состояниях с низким и высоким сопротивлением (0,55 – 0,57 эВ при 300 K) хорошо согласуются с результатами независимых измерений методами спектроскопии фликкер-шума и измерений тока миграционной ионной поляризации в мемристорах на основе ZrO<sub>2</sub>(Y).

Настоящая работа поддержана Правительством Российской Федерации, договор № 074-02-2018-330 (2). Измерения методом атомно-силовой микроскопии выполнены с использованием оборудования центра коллективного пользования — Научнообразовательного центра «Физика твердотельных наноструктур» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

- Ielmini D., Waser R. Resistive Switching: From Fundamentals of Nanoionic Redox Processes to Memristive Device Applications. – Saarbruken: Wiley-VCH, 2016. 751 p.
- [2] Sawa A. // Mater. Today. 2008. Vol. 11, № 6. P. 28.
- [3] Filatov D.O., Vrzheshch D.V., Tabakov O.V., Novikov A.S., Belov A.I., Antonov I.N., Sharkov V. V., Koryazhkina M.N., Mikhaylov A.N., Gorshkov O.N., Dubkov A.A., Carollo A., Spagnolo B. // jSTAT. 2019. № 12. P. 124026.
- [4] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70, № 1. P. 223.
- [5] Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1984. 322 p.
- [6] Yakimov A.V., Filatov D.O., Gorshkov O.N., Antonov D.A., Liskin D.A., Antonov I.N., Belyakov A.V., Klyuev A.V., Carollo A., Spagnolo B. // Appl. Phys. Lett. 2019. Vol. 114, № 25. P. 253506.
- [7] Filatov D., Tikhov S., Gorshkov O., Antonov I., Koryazhkina M., Morozov A. // Adv. Condens. Matter Phys. 2018. P. 2028491.

# МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОБЛУЧЕНИЯ ИОНАМИ SI⁺ НА СТРУКТУРУ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

Е.В. Окулич<sup>1)</sup>, В.И. Окулич<sup>2)</sup>, А.Н. Михайлов<sup>1)</sup>, Д.И. Тетельбаум<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup> НИУ РАНХиГС

## Предпосылки и цель исследования

Вопросы о природе стохастичности электрофизических характеристик мемристивных устройств и их стабильности до сих пор остаются основными для исследователей в этой области. В общепринятой модели образования путей проводимости (филаментов) для диэлектриков на основе неорганических окислов основным агентом, обеспечивающим их высокую проводимость, являются вакансии кислорода. Однако, в литературе нет достоверных оценок уровня концентрации вакансий, необходимого для обеспечения высокой проводимости. В этом связи можно упомянуть работы Мехоника [1], в которых утверждается, что мемристивный эффект в плёнках аморфного диоксида кремния наблюдается, если их изначальный стехиометрический состав соответствует формуле SiO<sub>1.7</sub>, что соответствует 15% концентрации кислородных вакансий. Очевидно, что в зоне филамента радиусом  $\approx$  (10-20) А, эта концентрация может быть существенно выше. Можно предположить, что, с большой степенью вероятности, она может достигать 30% уровня.

С другой стороны, оценка развивающихся в зоне филамента температур дает значения порядка (800-1000) К, что означает повышенную амплитуду колебаний атомов и, как следствие, значительную перестройку атомной структуры в области филамента, приводящую к изменению электронных характеристик этой зоны. Можно ожидать, что в плёнках аморфного диоксида кремния степень атомной перестройки и влияние её на электронную структуру дефектов в области филамента будут заметнее, чем для поликристаллических плёнок неорганических окислов, так как α-SiO<sub>2</sub> изначально является метастабильным материалом, меняющим свои характеристики с течением времени даже при комнатных температурах.

В связи с этим возникает вопрос о скорости и «глубине» процессов атомной перестройки, ответ на который даст информацию об их влиянии на быстротекущие процессы переключения мемристоров между состояниями с высокой и низкой проводимостью.

Получить ответ на сформулированный вопрос можно с помощью соответствующего моделирования атомной перестройки методом молекулярной динамики (МД). Так, в работе [2] методом МД было показано что в области филамента с 15% содержанием кислородных вакансий при температурах 300-900 К за время порядка 10<sup>-9</sup> с происходит формирование компактных 2-3-ёх атомных образований из атомов Si, которые могут являться прекурсорами кремниевых кластеров большего размера.

Полученный результат даёт предположить, что механизм проводимости по филаменту в  $\alpha$ -SiO<sub>2</sub> может реализовываться не только с участием вакансий кислорода, но и нанокластеров кремния. Действительно, в литературе приводятся результаты экспериментальных исследований, доказывающих факт развития филаментов по цепочкам нанокластеров кремния в  $\alpha$ -SiO<sub>2</sub>. Одним из способов создания нанокластеров кремния в аморфном диоксиде кремния является внедрение избыточных атомов кремния методом ионной имплантации с использованием ионов Si<sup>+</sup> с последующим отжигом в интервале (700-1500) К. Для оценки скорости этого процесса на начальном этапе отжига нами было проведено соответствующее молекулярно-динамическое моделирование.

## Метод реализации

Главной задачей проведения численного эксперимента было создание для программы LAMMS кластера, насыщенного атомами кремния при облучении ионами с заданной дозой на определённой глубине. За основу был взят тот же кластер, что и использованный в работе [2]. Программа SRIM, позволяющая оценить количество смещённых в междоузлия атомов кремния и кислорода, а также их вакансий на разных глубинах проникновения ионов в мишень была использована для их оценки на глубине 20 нм аморфного SiO<sub>2</sub> для дозы  $1*10^{15}$ см<sup>-2</sup> и энергии внедряемых ионов Si<sup>+</sup> с энергией = 20 кэВ. Методика расчёта приведена ниже. Соответствующее число вакансий атомов Si и O создавалось их случайным удалением, а междоузельные атомы их случайным внедрением при выполнении того условия, что расстояние между двумя атомами не должно было быть меньше суммы атомных радиусов соответствующих соседей.

Схема проведения расчёта приведена на рис. 1.





Для оценки нового взаимного расположения атомов в кластере после отжига:

- строились радиальные функции распределения пар Si-Si как для всего объёма моделируемого кластера (размером 60х60х60 А<sup>3</sup>, так и вокруг одиночных узлов кремния в кубических зонах разного размера;
- рассчитывались параметры локальных зон (их число и размеры), содержащих только атомы кремния до и после отжигов при разных температурах.

## Анализ результатов

#### Результаты для всего объёма кластера

На рис. 2 представлены рассчитанные РФР для исходного кластера SiO<sub>2</sub> (2a), который имеет вид характерный для этой структуры, после насыщения атомами кремния (2б) и после отжига при двух температурах (2в – 900К, 2г – 1500К). Видно, что РФР насыщенного ионами Si<sup>+</sup> кластера до отжига имеет хаотичный вид. Отжиг приводит к появлению пиков на расстоянии  $\approx 2.34$  А и началу формирования пика на расстоянии  $\approx 3.6$  А, характерных для кристаллического кремния.



#### Результаты для отдельных зон, построенных вокруг отдельных атомов Si

На рис. 3 показаны результаты по найденным зонам вокруг отдельных атомов Si, содержащим только атомы кремния, до (рис. 3а) и после отжига (900К – 36, 1500К – 3в).

а	до отжига											
	Число зон											
Количест	сторона сторона		сторона	б	900K			в	1500K			
во Si	куба зоны	куба зоны	куба зоны		Число зон			Число зон				
3	3A 499	4./A	7.3A	Количест	сторона	сторона	сторона	Количеств	сторона	сторона	сторона	
3	400	30		BO Si	wufe against	www.for.com.r	wwfo porma	o Si	1	1	1	
4	152	108			куба зоны	куба зоны	куба зоны		кубазоны	кубазоны	куба зоны	
5	36	92	1		3A	4.7A	7.5A		3A	4./A	7.5A	
6	6	108		3	2	85	1	3				
7	2	74	4	4		147		4	1	129		
8		34	1	5		76		5		39		
9		38	1	6		22		6		12	1	
10		18	3	7		2					-	
11		7	1	/		3		/			1	
12		4	1	8				8				
13		2	1	9			1	9			1	

Рис. 3

На рис. За после насыщения зон малого размера, содержащих только атомы кремния гораздо больше, чем зон такого размера с большим числом только таких атомов. Естественно, что по мере увеличения размера зоны число содержащих только атомы кремния зон, уменьшается из-за появления в таких зонах атомов кислорода. Следует отметить и образование единичных зон большего размера содержащих большее число атомов кремния.

Отжиг приводит практически приводит к исчезновению зон со стороной 3 А, содержащих малое число атомов Si, что свидетельствует об упорядочивании структуры в локальных областях по направлению к кристаллическому кремнию с расстоянием между ближайшими атомами кремния, равным 2.34 и 4 А соседями в первой координационной сфере, и с 12 вторыми соседями на расстоянии центрального атома 3.6 А во второй координационной сфере. Одновременно наблюдается исчезновение зон, содержащих большое число только атомов Si, что также свидетельствует о постепенной эволюции таких агломератов в стороны объединения с атомами кислорода. При этом результаты для зоны со стороной 7.5А свидетельствует о нарастании числа атомов кремния во второй координационной сфере.

Сделанные выводы подтверждаются графиками РФР, построенными для одиночных атомов в центре двух кубических зон стороной = 7.5 A (рис. 4).



#### Выводы

Результат проведённого численного эксперимента на наш взгляд достаточно убедительно показывают возможность образования нанокластеров кремния в аморфном оксиде кремния при пострадиционном отжиге, что, само по себе, не является неожиданным. Ведь это явление достаточно давно обнаружено экспериментально, в том числе и в работах исследователей НИФТИ. Интересно другое – то, что он показал возможность заметных перестроек за достаточно малое время – порядка 10<sup>-9</sup> с. Это время соответствует характерным временам процессов переключения в мемристорах. И, следовательно, в области филамента могут наблюдаться непрерывные структурные микроперестройки. В связи с этим можно высказать осторожное предположение, что одной из возможных причин наблюдаемой стохастичности ВАХ мемристоров могут являться именно эти процессы.

Работа поддержана Правительством Российской Федерации (соглашение № 074-02-2018-330 (2)).

- [1] Mehonic A., Shluger A.L., Gao D., Valov I., Miranda E., Ielmini D., Bricalli A., Ambrosi E., Li C., Yang J.J., Xia Q., Kenyon A. J. // Adv. Mater. 2018. Vol. 30, № 43. P. 1801187(1).
- [2] Окулич Е.В., Окулич В.И., Тетельбаум Д.И. // ПЖТФ. 2020. Т. 46, вып. 1. С. 24.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В МЕМРИСТОРАХ

В.А. Шишмакова<sup>1)</sup>, Д.О. Филатов<sup>1)</sup>, А.И. Белов<sup>1)</sup>, Д.С. Королёв<sup>1)</sup>, И.Н. Антонов<sup>1)</sup>, Д.В. Гусейнов<sup>1)</sup>, А.Н. Михайлов<sup>1)</sup>, Н.В. Агудов<sup>1)</sup>, А.А. Дубков<sup>1)</sup>, Б. Спаньоло<sup>1, 2)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup> Университет Палермо

#### Введение

В последние годы значительное внимание исследователей привлекает эффект резистивного переключения (РП), заключающийся в обратимом бистабильном (мультистабильном) изменении электросопротивления диэлектрической прослойки между двумя проводящими электродами под действием электрического напряжения, приложенного к электродам [1]. Электронные приборы, принцип действия которых основан на эффекте РП, получили название *мемристоров*. Для описания свойств мемристора может быть использована модель движения броуновской частицы в двухъямном потенциале. Известно, что при подаче на такую систему периодического возмущения, соотношение сигнал/шум в её отклике максимально, когда частота периодического возмущения совпадает со средней частотой термовозбуждённых перескока броуновской частицы между потенциальными ямами (частота Крамерса). Данное явление получило название *стохастического резонанса* [2].

Целью настоящей работы являлось экспериментальное обнаружение эффекта стохастического резонанса при резистивном переключении мемристора.

#### Экспериментальная часть

В качестве объекта исследований был выбран мемристор на основе двухслойных структур ZrO<sub>2</sub>(Y)/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> типа кросс-пойнт с размерами активной области 20×20 µм<sup>2</sup> [3].

На исследуемый мемристор подавался тестирующий сигнал V(t), представляющий собой синусоидальный переключающий сигнал амплитудой 1 В и частотой 10 Гц, на который накладывался шумовой сигнал, имитирующий белый Гауусов шум, сгенерированный при помощи генератора псевдослучайных чисел, входящего в состав программного обеспечения ADSView 2.0. Мощность шумового сигнала характеризовалась стандартным отклонением значений напряжения в последовательности псевдослучайных чисел  $\sigma$ . Сгенерированный в цифровой форме тестирующий сигнал преобразовывался в аналоговый при помощи цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) модуля National Instruments USB 6211, используемого источника напряжения, работающего под управлением программного обеспечения LabView 2016. Частота выборки ЦАП составляла 250 кГц. Токовый отклик мемристора на тестирующий сигнал I(t) подавался с сопротивлением нагрузки на аналогово-цифровой преобразователь (АЦП) модуля National Instruments USB 6211. В эксперименте измерялись осциллограммы I(t), регистрировавшиеся в течение 1 мин при различных значениях  $\sigma$ , которые варьировались в пределах от 0 до 0,5 В.

Спектры мощности токового отклика вычислялись при помощи функции быстрого преобразования Фурье (БПФ) программного обеспечения Origin Pro 7.0.



#### Результаты и обсуждения

На рис. 2 показана зависимость отношения сигнал/шум в осциллограммах токового отклика мемристора от  $\sigma$ . Отношение сигнал/шум определялось как отношение амплитуды первой гармоники в спектре мощности токового отклика на частоте синусоидального переключающего сигнала (10 Гц) к средней амплитуде шума, которая, в свою очередь, определялась как среднее значение амплитуд спектральных гармоник в полосе между 1-ой и 2-ой гармониками (см. рис. 1). На зависимости отношения сигнал/шум от  $\sigma$  наблюдается выраженный максимум (рис. 2). Это позволяет утверждать, что в эксперименте, проводимом в настоящей работе, наблюдался эффект стохастического резонанса. Форма зависимости отношения сигнал/шум от  $\sigma$  на рис. 2 соответствует типично для являения стохастического резонанса (см. обзор [2] и ссылки в нём).

#### Заключение

Экспериментальное обнаружение эффекта стохастического резонанса при переключении мемристора демонстрирует фундаментальные свойства мемристора как стохастической мультистабильной системы С практической точки зрения, результаты данной работы показывают возможность применения эффекта конструктивной роли шума для повышения стабильности параметров мемристоров.

Работа выполнена при поддержке Программы мегагрантов Правительства Российской Федерации (Постановление № 220), № госконтракта 074-02-2018-330 (2).

- Ielmini D., Waser R. Resistive Switching: From Fundamentals of Nanoionic Redox Processes to Memristive Device Applications. – Saarbruken: Wiley-VCH, 2016. 751 p.
- [2] Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. // Rev. Mod. Phys. 1998. Vol. 70, № 1. P. 223.
- [3] Mikhaylov A., Belov A., Korolev D., Antonov I., Kotomina V., Kotina A., Gryaznov E., Sharapov A., Koryazhkina M., Kryukov R., Zubkov S., Sushkov A., Pavlov D., Tikhov S., Morozov O., Tetelbaum D. // Adv. Mater. Technol. 2019. P. 190060.

## NONEQUILIBRIUM PHENOMENA AND METASTABILITY IN MESOSCOPIC AND QUANTUM SYSTEMS

B. Spagnolo<sup>1, 2)</sup>, A. Carollo<sup>1, 2)</sup>, C. Guarcello<sup>3)</sup>, N. Agudov<sup>1)</sup>, A. Dubkov<sup>1)</sup>, D. Persano Adorno<sup>2)</sup>, D. Valenti<sup>2)</sup>

Lobachevsky State University
 University of Palermo
 University of Salerno

Here we summarize some relevant results related to nonequilibrium phenomana in mesoscopic and quantum systems. A common phenomenon in the dynamics of out-of-equilibrium systems is the metastability, and the problem of the lifetime of metastable states involves fundamental aspects of nonequilibrium statistical mechanics. Metastability (see fig. 1) is a signature of a first order phase transition, often characterized by a long-living meta-stable state. In particular, the stability of a metastable state can be enhanced by Gaussian and non-Gaussian noise sources. This counterintuitive effect has been found in different physical areas, ranging from spintronics, aggregation kinetics of Brownian particles, Josephson junction systems, to interdisciplinary physical models.

It is widely believed that environmental fluctuations enhance the escape from metastable states of classical, mesoscopic and quantum systems. Here we show that environmental noise can enhance the stability of mesoscopic and quantum metastable systems strongly interacting with a thermal bath, giving rise to a nonmonotonic behavior of the lifetime of the metastable state as a function of the noise intensity. This is the noise enhanced stability (NES) phenomenon [1], which is a resonancelike behavior in contrast with the monotonic behavior predicted by Kramers theory [2] (see fig. 2). We analyze the escape stochastic dynamics of four mesoscopic and quantum systems: (*i*) a long Josephson junction (JJ) driven by Lévy noise; (*ii*) an electron spin system and its relaxation process in n-type GaAs crystals driven by a fluctuating electric field; (*iiii*) a memristor stochastic model; and (*iv*) a metastable quantum dissipative system driven by an external periodical driving; and finally, (*v*) we summarise some relevant results related to non-equilibrium quantum systems.



(i) A Josephson junction (JJ) is a device realised by sandwiching two superconducting plates on a interlayer of nonsuperconducting material (see fig. 3). In this mesoscopic device, macroscopic quantities as voltage and current are directly related to a microscopic order parameter  $\varphi$ , representing the phase difference between the wavefunctions of charge carriers in the two superconducting electrodes. The  $\varphi$  evolution is described by the well-known sine-

Gordon (SG) equation, including bias and fluctuating currents  $i_b(x, t)$  and  $i_f(x, t)$ , respectively, and a damping term

$$\beta \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin(\varphi) = -\varphi_t + i_b(x, t) + i_f(x, t). \tag{1}$$



Fig. 3

The fluctuating current  $i_f$  is a Lévy noise source, the variables x and t are normalised to the Josephson penetration length  $\lambda_J$  and the characteristic JJ frequency  $\omega_c$ , respectively, and  $\beta = \omega_c RC$ , where R and C are the effective normal resistance and capacitance of the device. The  $\sin(\varphi)$  term is the supercurrent. All the current terms in (1) are normalised to the JJ critical current  $I_c$ . In fig. 4 we show the NES phenomenon in the long JJ system [3].



Fig. 4

(ii) In *n*-type III-V semiconductors the dominant electron spin relaxation process is the D'yakonov-Perel (DP) mechanism [4]. The spin-orbit interaction couples the spin of conduction electrons to the carrier momentum, randomised by interactions with phonons, impurities and other electrons. In a semiclassical formalism we describe the spin dynamics by the classical equation of precession motion as  $\frac{ds}{dt} = \Omega \times S$ . In our simulations the semiconductor bulk is driven by a fluctuating external electric field  $F(t) = F_0 + \eta(t)$ , where  $F_0$  is the deterministic amplitude and  $\eta(t)$  is an external noise source. The results of our Monte-Carlo simulations are shown in fig. 5, where it is shown the normalized electron spin relaxation time  $\tau/\tau_0$  as a function of the normalized noise correlation time. Random fluctuations can play a relevant role on controlling and tuning the coherence of spin-relaxation processes. By using appropriate noise characteristic times, it is possible to select the most favorable condition for the transmission of information by electron spin [5].

*(iii)* The dynamics of the stochastic model for a memristive system proposed in [6] is described by the following Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial}{\partial t}n_D(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ n_D(x,t) \frac{\mu dU(x)}{dx} \right] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_D(x,t), \tag{2}$$

where D is diffusion coefficient,  $\mu$  is the coefficient of mobility of defects and U(x) is the potential profile for hopping particles. Our final results on the relaxation time as a function of dimensionless noise intensity  $\theta/E_a$ , with  $E_a$  the barrier height, are shown in fig. 6.



(*iv*) Common wisdom is that environmental fluctuations always enhance the escape from a quantum metastable state. Here we show that the dissipation can enhance the stability of a quantum metastable state, by analyzing the escape process and the relaxation dynamics from a quantum metastable state with and without a monochromatic external driving, and with an out-of-equilibrium initial condition are shown. Specifically, the quantum dynamics of an asymmetric bistable system coupled to a bosonic Ohmic thermal bath in a strong dissipation regime through the Caldeira-Leggett model is analyzed (see fig. 7). The full Hamiltonian H(t), the reservoir and interaction Hamiltonians  $H_R$ ,  $H_{SR}$  are

$$H(t) = \frac{p^2}{2M} + V(t) + H_R + H_{SR},$$
  
$$H_R + H_{SR} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} \left[ \frac{p_j^2}{m_j} + m_j \omega_j^2 \left( x_j - \frac{c_j}{m_j \omega_j^2} q \right)^2 \right].$$
 (3)

The study is performed by a non-perturbative method based on the real-time path integral approach of the Feynman-Vernon influence functional. In the absence of driving we observe a nonmonotonic behavior of the escape time from the metastable region, as a function both of the system-bath coupling coefficient and the temperature (see fig. 8). This indicates a stabilizing effect of the quantum fluctuations. In the presence of driving our findings indicate that, as the coupling coefficient  $\gamma$  increases, the escape time becomes frequency-independent for higher  $\gamma$  values (see fig. 8). Moreover, the escape time from the metastable state displays a nonmonotonic behavior as a function of the temperature, the frequency of the driving, and the thermal-bath coupling, which indicates the presence of a quantum noise enhanced stability phenomenon [7-9].



(v) We characterise quantum phase transitions (QPT) in out-of-equilibrium quantum systems through a novel approach based on geometrical and topological properties of mixed quantum systems [10]. The evolution of non-equilibrium steady state (NESS) QPT is driven by a Liouvillean superoperator which is parameterized by a set of control variables, which determine, independently of the chosen initial state, the corresponding unique NESS. We have introduced the mean Uhlmann curvature (MUC) and we have investigated its role in the characterisation of dissipative NESS-QPT. The MUC, defined as the Uhlmann GP per unit area of a density matrix evolving along an infinitesimal loop, has also a fundamental interpretation in multi-parameter quantum metrology: it marks the incompatibility between independent parameters arising from the quantum nature of the underlying physical system [11]. In this sense, the MUC is a measure of "quantumness" in the multi-parameter estimation problem, and its singular behaviour responds only to quantum fluctuations occurring across a phase transitions. We have found that a non-analytic behavior of Uhlmann GP is a signature of NESS-QPT in open-quadratic fermionic lattice models. This method does not need the knowledge of any order parameter, and most important the Uhlmann phase may provide information on whether the NESS-QPT is driven by quantum or classical fluctuations [11-12].



Fig. 9

This work was supported by the Grant of the Government of the Russian Federation, contract No. 074-02-2018-330 (2).

- [1] Agudov N.V. and Spagnolo B. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 035102(R).
- [2] Kramers H.A. // Physica (Amsterdam). 1940. Vol. 7. P. 284.
- [3] Valenti D., Guarcello C., Spagnolo B. // Phys. Rev. B. 2014. Vol. 89. P. 214510.
- [4] D'yakonov M.I. and Perel V.I. // JETP Lett. 1971. Vol. 13. P. 467-9.
- [5] Spezia S. et al. // Europhys. Lett. 2013. Vol. 104. P. 47011.
- [6] Agudov N.V. et al. // J. Stat. Mech. The. Exp. 2020. P. 024003.
- [7] Spagnolo B., Carollo A., Valenti D. // Entropy. 2018. Vol. 20. P. 226.
- [8] Valenti D., Carollo A., Spagnolo B. // Physical Review A. 2018. Vol. 97. P. 042109.
- [9] Valenti D., Magazzù L., Caldara P., Spagnolo B. // Physical Review B. 2015. Vol. 91. P. 235412.
- [10] Carollo A., Spagnolo B., Valenti D. // Sci. Rep. 2018. Vol. 8. P. 9852.
- [11] Carollo A., Spagnolo B., Dubkov A.A., Valenti D. // J. Stat. Mech. Theory Exp. 2019. P. 094010.
- [12] Leonforte L., Valenti D., Spagnolo S., Carollo A. // Sci. Rep. Nature. 2019. Vol. 9. P. 9106.

# АНАЛИЗ ДЕГРАДАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МЕМРИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Д.В. Суняйкин<sup>1)</sup>, А.В. Якимов<sup>1)</sup>, А.В. Клюев<sup>1)</sup>, О.Н. Горшков<sup>1)</sup>, Д.О. Филатов<sup>1)</sup>, Д.А. Антонов<sup>1)</sup>, А.Н. Михайлов<sup>1)</sup>, Р. Dimitrakis<sup>2)</sup>, В. Spagnolo<sup>1, 3, 4)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup> National Center for Scientific Research "Demokritos", Greece <sup>3)</sup> Università di Palermo and CNISM, Italy <sup>4)</sup> Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Italy

Приведены результаты анализа связи между спектром фликкерного шума в электрическом токе через контакт зонда атомно-силового микроскопа (ACM) к плёнкам Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> на проводящих подложках и характеристиками деградации этих плёнок. Использована методика анализа фликкерных шумов, отработанная на тонкоплёночных образцах ZrO<sub>2</sub>(Y) [1–2]. Исследованы две тонкоплёночные структуры. В образце SN6 (рис. 1) между плёнкой Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> и подложкой наносился подслой SiO<sub>2</sub> толщиной 2 нм. В образце SN8 (рис. 2) данный слой отсутствует. Для каждой структуры измерения проводились в двух состояниях: высокого (CBC) и низкого (CHC) сопротивления.





Рис. 2

В СВС наблюдались только собственные шумы измерительной установки, поэтому здесь приводятся данные только для СНС.

При обработке спектров каждый график содержит три компоненты: спектр собственного шума установки (нижняя ломаная кривая «Setup»); спектр шума образца, полученный путём вычитания спектра собственного шума установки из полного спектра, полученного из соответствующего файла (верхняя ломаная кривая «Net spectrum»); результат ручной аппроксимации описанного выше спектра шума образца (гладкая кривая «Fit»).

Для аппроксимации использовался спектр  $S_{Fit}(f)$ , содержащий две компоненты (белый шум, плюс фликкерный шум):

$$S_{Fit}(f) = S_0 + \frac{A}{f^{\gamma}}.$$
 (1)

Здесь  $S_0$  – высота плато, обусловленного белым шумом; A – параметр, численно равный значению фликкерной компоненты спектра на частоте анализа f = 1 Гц;  $\gamma$  – параметр формы фликкерной компоненты спектра.

Для образцов SN6 обработаны четыре последовательно записанных парных файла при напряжении 2 В: (1) 38+39 – запись тока после формовки образца; (2–4) 41+42, 44+45, 47+48 – после измерения циклической ВАХ. Отдельный файл содержит NY = 1024 выборки, количество отсчётов в выборке NX = 1024. Максимальная частота анализа 7997.5 Гц. Разрешение по частоте 15.62 Гц. Статистическая погрешность измерения отдельного спектра составляет 2.2 процента.

Перейдём к анализу статистических характеристик тока через образец SN6. На рис. 3–5 представлены: осциллограмма тока после формовки, выраженная в единицах отсчёта АЦП N(t), то есть в бинах; функция плотности вероятности (pdf); результат обработки спектра.



Осциллограмма (рис. 3) демонстрирует нестационарность шума. Сначала образец находился в СНС, затем перешёл в СВС. Указанный переход проявился в pdf (рис. 4): видны два локальных максимума: первый соответствует СВС, второй – СНС. После учёта статистических характеристик собственного шума установки определены следующие характеристики шума образца. Среднее значение тока  $\langle I_t \rangle = 4.1$  нА; среднеквадратическое отклонение  $\sigma_{It} = 3.7$  нА; коэффициент асимметрии  $\gamma_3 = 1.34$ ; коэффициент эксцесса  $\gamma_4 = 1.65$ . Спектр шума образца (рис. 5) аппроксимируется соотношением (1), выраженным в единицах [пА<sup>2</sup>/Гц]:  $S_0 = 13$ ;  $A = 2.5 \times 10^4$ ;  $\gamma = 1.0$ .

Перейдём к анализу шумов образца SN8, отличающегося от рассмотренного выше образца SN6 отсутствием подслоя SiO<sub>2</sub>. Файлы 61-76 для образца SN8 записывались при той же частоте взятия отсчётов. В отличие от предыдущего образца количество выборок уменьшено до NY = 200. Последовательно записаны 8 сканов, содержащих парные файлы при напряжении 2 В. Все осциллограммы демонстрируют нестационарность шума. Сначала образец находится в СНС (файл 65, рис. 6), проявляя шум, имеющий характер случайного телеграфного процесса (СТП). Потом начинаются переходные процессы (файл 69), которые можно проследить на рис. 7. Эти процессы приводят к переходу образца в СВС (файл 73), где он окончательно и остаётся, что можно увидеть на рис. 8, проявляя шум, близкий к собственному шуму измерительной установки.



Рис. 8

Для образца SN8 на рис. 9–10 представлены pdf из сканов 1–7 (файлы 61–74). Данные из сканов 3, 4 и 5 ограничены по горизонтальной оси током  $2 \times 10^5$  пА для большей наглядности представляемых результатов. Та же процедура применена к скану 6 на рис. 10. СТП, выявленный в осциллограммах из файлов 61, 63, 65, отчётливо проявляется в плотности вероятности шума, полученной из сканов 1–3.

На рис. 11 представлены измеренные спектры шумов образца SN8 и собственного шума измерительной установки. Из рисунка видна тенденция, обнаруженная при анализе осциллограмм, представленных на рис. 6-8. Для определения спектра шума, генерируемого образцом SN8, произведено вычитание спектра собственного шума измерительной установки из полного измеренного спектра. Для аппроксимации используется спектр (1). Пример подобной обработки представлен на рис. 12.

Сравним данные, полученные для образца SN6, с данными образца SN8.

Отсутствие слоя SiO<sub>2</sub> в образце SN8 привело к существенному увеличению шума по сравнению с SN6. В SN8 наблюдается относительно сильный СТП, проявляющийся существенного слабее в SN6. При этом в SN6 переход в CBC происходил в разных записях примерно через 65 с, 40 с, 13 с, при полной длительности каждой записи, равной 131 с. В образце SN8, при полной длительности записи  $8 \times 25.6[c]=205$  с, переход в CBC происходит после пятой записи, т.е. примерно через 128 с.



Таким образом, показано, что наличие дополнительного слоя SiO<sub>2</sub> в образце SN6 приводит к снижению низкочастотного шума по сравнению с образцом SN8, где этот слой отсутствует. Однако наблюдаемое снижение шума сопровождается уменьшением срока службы образца.

Настоящая работа поддержана Правительством Российской Федерации, договор № 074-02-2018-330 (2). Экспериментальные образцы изготовлены в рамках двустороннего совместного исследовательского проекта Греция – Россия МЕМ-Q при поддержке GSRT, финансируемого национальными и европейскими фондами (proj. no. / MIS T4ΔPΩ-00030 / 5021467). Измерения проводились на оборудовании Научнообразовательного центра физики твердотельных наноструктур ННГУ.

- Yakimov A.V., Filatov D.O., Gorshkov O.N., Antonov D.A., Liskin D.A., Antonov I.N., Belyakov A.V., Klyuev A.V., Carollo A., Spagnolo B. // Appl. Phys. Lett. 2019. Vol. 114. P. 253506.
- [2] Klyuev A.V., Yakimov A.V., Filatov D.O., Gorshkov O.N., Antonov D.A., Liskin D.A., Antonov I.N., Anikina Yu.I. Proc. 25th International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF 2019). 18–21 June 2019, Neuchâtel, Switzerland. P. 136.

# АНАЛИЗ АТОМНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В МЕМРИСТОРЕ КАК ЭНЕРГОНЕЗАВИСИМОМ УСТРОЙСТВЕ ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

Н.И. Штрауб<sup>1</sup>), А.В. Якимов<sup>1</sup>), А.В. Клюев<sup>1</sup>), О.Н. Горшков<sup>1</sup>), Д.О. Филатов<sup>1</sup>), В.С. Кочергин<sup>1</sup>), В. Spagnolo<sup>1, 2, 3)</sup>

> <sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского <sup>2)</sup> Università di Palermo and CNISM, Italy <sup>3)</sup> Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Italy

Настоящий анализ опирается на работу [1], в которой определен диапазон энергий активации диффузии ионов кислорода внутри проводящего филамента мемристивной структуры, выполненной на основе ZrO<sub>2</sub>(Y). Выявлено, что ток через филамент мемристивной структуры, выполненной на основе ZrO<sub>2</sub>(Y), в CHC имеет характер ФШ; определены параметры его спектра в заданном диапазоне частот.

В настоящей работе сделана численная оценка эффективной величины изменения тока, обусловленного единичным диффузионным скачком отдельного иона кислорода внутри филамента. Эти результаты предназначены для уточнения разрабатываемой физической макромодели мемристора.

При измерении шума в СНС спектр тока описывается модельным соотношением:

$$S_{Fit}(f) = \frac{A}{f^{\gamma}} \left[ \mathbb{A}^2 / \Gamma \mathfrak{u} \right], f \in [f_L; f_H].$$
(1)

Здесь  $A = 2.3 \cdot 10^{-21}$ ; параметр формы спектра равен  $\gamma = 1.3$ .

Указанный спектр получен в диапазоне частот от  $f_{\rm L} = 15.6$  Гц до  $f_{\rm H} = 7$  980 Гц. Это позволило определить диапазон, в котором распределены энергии активации  $E_{\rm a}$  диффузии ионов кислорода вдоль проводящей нити:  $E_{\rm a} \in [0.52; 0.68]$  эВ, а также вид функции плотности вероятности (pdf)  $W_{E_{\rm a}}(E_{\rm a})$  (см. [2], [3]).

Оценим эффективную величину размаха  $i_0$  скачка в токе  $I_t(t)$  через зонд (филамент), соответствующего единичному акту диффузии отдельного иона кислорода.

Для простоты считаем, что ион имеет только два метастабильных состояния ("0", "1"), разделённых энергетическим барьером  $E_a$ . То есть ион формирует так называемую "двухуровневую систему" (ДУС). Её энергетическая диаграмма приведена на рис. 1. Здесь  $E_b$  – разница глубин локальных потенциальных минимумов.

Термоактивированные переходы иона кислорода между состояниями "0" и "1" приводят к модуляции проводимости филамента, G = G(t), имеющей характер случайного телеграфного





процесса (СТП–RTN). Соответствующие изменения тока через филамент, вызванные этими переходами, тоже имеют характер СТП.

Средние времена пребывания иона в рассматриваемых состояниях определяются следующими соотношениями:

$$\tau_0 = \frac{1}{f_T} exp\left(\frac{E_a}{kT}\right); \ \tau_1 = \tau_0 exp\left(\frac{E_b}{kT}\right). \tag{2}$$

Здесь  $f_{\rm T}$  – средняя частота тепловых колебаний решётки,  $f_{\rm T} \approx 10^{11}$  Гц.

Обозначим через M полное число ионов, диффундирующих внутри филамента. Каждый ион формирует отдельную ДУС (с номером  $m \in [1; M]$ ). Таким образом, полный ток  $I_t(t)$  через филамент содержит суперпозицию M элементарных СТП  $i_m(t)$ :

$$I_t(t) = < I_t(t) > + \sum_{m=1}^{M} i_m(t).$$
(3)

Здесь  $< I_t(t) > -$  среднее значение тока через филамент.

Пример реализации отдельного процесса изображён на рис. 2.



Рис. 2

Процесс состоит из прямоугольных импульсов "1", разделённых паузами "0". Высота импульса (размах СТП) в процессе номер m составляет  $a_m$ .

Для простоты предполагается, что длительности пауз и импульсов распределены по закону Больцмана:

$$W_{0,1}(\tau) = \frac{1}{\tau_{0,1}} exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{0,1}}\right), \tau \ge 0.$$
(4)

Здесь  $\tau_0$  и  $\tau_1$  – средние длительности пауз и импульсов.

В этом случае спектр отдельного СТП  $i_m(t)$  имеет лоренцев вид:

$$S_{RTN}(f|f_c) = A_{RTN} \frac{f_c}{f_c^2 + f^2}.$$
 (5)

В приведённом соотношении введены следующие обозначения:

$$A_{RTN} = \frac{2}{\pi} < a_m^2 > p; \ p = \frac{\tau_1}{\tau_0 + \tau_1} \tag{6}$$

– параметр, характеризующий мощность отдельного процесса, определяемый высотой импульса  $a_m$ , а также вероятностью p появления импульсов.

$$f_c = \frac{1}{2\pi} (\tau_0^{-1} + \tau_1^{-1}) \tag{7}$$

- частота среза спектра рассматриваемого СТП.

Эффективное значение размаха  $i_0$  элементарного импульса определяется выражением (8).

$$i_0 = \sqrt{\langle a_m^2 \rangle}, \ m \in [1; M].$$
 (8)

Примем, что все ДУС, формируемые ионами, являются симметричными,  $E_b = 0$ . Это, согласно (2), означает совпадение средних длительностей пауз и импульсов,  $\tau_0 = \tau_1$  и p = 1/2.

Полный спектр определяется следующим образом:

$$S_{I_t}(f) = M \int_{(f_c)} S_{RTN}(f|f_c) W_c(f_c) df_c.$$
(9)

Здесь интегрирование ведётся по всем частотам среза.

Для получения фликкерного спектра 1/f<sup>7</sup> необходимо, чтобы функция плотности вероятности (pdf) частот среза имела следующий вид:

$$W_c(f_c) = \frac{B_c}{f_c^{\gamma}}; \ B_c = \frac{1 - \gamma}{f_H^{1 - \gamma} - f_L^{1 - \gamma}}; \ f_c \in [f_L; f_H].$$
(10)

Использование функции плотности вероятности (10) приводит к следующему выражению для спектра (9):

$$S_{I_t}(f) = \frac{A}{f^{\gamma}}; A = X_A C_A.$$
(11)

Здесь  $X_A = Mi_0^2$ ;  $C_A = pB_c \frac{\gamma}{2-\gamma} \frac{1}{\sin(\gamma\pi/2)}$ .

Перейдём к численным оценкам, основанным на результате (1). Все величины приводятся в СИ.

Итак, имеем:  $A = 2.3 \cdot 10^{-21}$ ,  $\gamma = 1.3$ ;  $f_{\rm L} = 15.6$  Гц;  $f_{\rm H} = 7$  980 Гц.

Нормировочный коэффициент для плотности вероятности (10) частот среза составляет  $B_c = 0.808$ . Также при параметре p = 0.5, имеем  $C_A = 0.843$ , что дает  $X_A = 2.7 \cdot 10^{-2} A^2$ .

Для нахождения эффективного значения размаха элементарного импульса тока  $i_0 = \sqrt{\langle a_m^2 \rangle}$  необходимо оценить величину *M* полного числа ионов, диффундирующих внутри филамента. Для этого необходимо знать длину и диаметр филамента.

Длина *L* филамента определяется толщиной пленки YSZ,  $L \approx 4 \cdot 10^{-9}$  м (4 нм). Постоянную кристаллической решетки пленки примем равной  $a_{\rm L} = 5 \cdot 10^{-1}$  м (0.5 нм). То есть,  $L \approx 8$  периодов решетки.

Диаметр филамента, грубо, примем равным шести постоянным решётки:  $d = 6a_{\rm L} = 3 \cdot 10^{-9}$  м.

Таким образом, объём филамента  $V_{\rm F} = \left(\frac{\pi}{4}\right) d^2 L \approx 226 a_{\rm L}^3$ , или примерно 226 ячеек решётки.

Допустим, только половина этих ячеек занята ионами кислорода, то есть  $M \approx 113$ .

Для эффективного значения размаха элементарного импульса тока находим:  $i_0 \approx 4.9 \cdot 10^{-12} A$  ( $\approx 4.9$  пА). Этот размах отражает эффект от единичного диффузионного скачка иона кислорода, приводящего к изменению проводимости филамента.

Сделаем дополнительные оценки, характеризующие состояние филамента.

Приложенное к филаменту напряжение  $V_g = 3$  В индуцирует в нём электрическое поле  $E = V_g/L \approx 6 \cdot 10^8$  В/м (6 МВ/см).

Среднее (по всем записям для СНС) значение тока есть  $< I_t >= 128 \text{ пA} = 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ A}$ . Для принятой выше оценки диаметра филамента d это означает, что средняя плотность тока через филамент равна  $< J_t >= 1.8 \cdot 10^7 \text{ A/m}^2$ .

Таким образом, в настоящей работе получена оценка эффективного значения размаха элементарного импульса тока, обусловленного единичным актом диффузии иона кислорода внутри филамента:  $i_0 \approx 4.9 \cdot 10^{-1}$  A = 4.9 пA.

Этот результат получен из анализа спектра фликкерного шума тока через филамент с учётом геометрических параметров филамента.

Оценки величины электрического поля внутри филамента,  $E \approx 6 \cdot 10^8$  В/м, а также средней плотности тока через филамент,  $< J_t >= 1.8 \cdot 10^7$  А/м<sup>2</sup> пока не обсуждаются.

Настоящая работа поддержана Правительством Российской Федерации, договор № 074-02-2018-330 (2). Измерения проводились на оборудовании Научнообразовательного центра физики твердотельных наноструктур ННГУ.

- [1] Yakimov A.V., Filatov D.O., Gorshkov O.N., Antonov D.A., Liskin D.A., Antonov I.N., Belyakov A.V., Klyuev A.V., Carollo A., and Spagnolo B. // Applied Physics Letters. 2019. Vol. 114. P. 253506.
- [2] Klyuev A.V., Yakimov A.V., Filatov D.O., Gorshkov O.N., Antonov D.A., Liskin D.A., Antonov I.N., and Anikina Yu.I. // Proc. 25th International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF 2019). 18–21 June 2019, Neuchâtel, Switzerland. P. 136.
- [3] Belyakov A.V., Klyuev A.V., and Yakimov A.V. // Radiophys. Quantum Electron. 2008. Vol. 51, № 2. P. 134.

Секция «Стохастические мультистабильные системы»

Заседание секции проводилось 26 мая 2020 г. Председатель – Б. Спаньоло (Италия), секретарь – А.А. Харчева. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.