

Труды XXIV научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ»**

Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНЫЕ И ХИМЕРНЫЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ДИФФУЗИОННОЙ СВЯЗЬЮ

Д.И. Болотов<sup>1)</sup>, М.И. Болотов<sup>1)</sup>, Л.А. Смирнов<sup>1, 2)</sup>, Г.В. Осипов<sup>1)</sup>,  
А.С. Пиковский<sup>3, 1)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2)</sup> Институт прикладной физики РАН

<sup>3)</sup> Потсдамский университет, Германия

Химерные состояния в колебательных средах вызывают большое внимание с момента их первого наблюдения и теоретического объяснения [1]. Удивительной особенностью химер является нарушение трансляционной симметрии: хотя существует однородное полностью симметричное синхронное состояние, возможно ещё одно нетривиальное устойчивое состояние, сочетающее в себе синхронные и асинхронные домены. В терминах локального комплексного параметра порядка химера представляет собой решение, в котором для одной области этот параметр имеет абсолютное значение равное единице (элементы полностью синхронны), а в другой части его абсолютное значение меньше единицы (частично синхронны). Это описание связывает химерные состояния с общей проблемой формирования структур в средах, описываемых комплексным общим полем [2].

В данной работе проводится анализ существования и устойчивости пространственно-однородных полностью синхронных и асинхронных состояний в зависимости от параметра временного масштаба распространения взаимодействия в среде, изучается влияние этого параметра на простейшие пространственно-неоднородные решения – однокластерные химерные состояния. Описывается метод нахождения данных решений как периодических траекторий в некоторой вспомогательной системе ОДУ.

Рассмотрим модель нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов, распределенных на кольце длины  $L$ :

$$\partial_t \varphi(x, t) = \text{Im} [e^{-i(\varphi(x, t) + \alpha)} H(x, t)], \quad (1)$$

где  $x$  – координата точки в одномерной пространственной среде,  $\varphi(x, t)$  – фаза точки  $x$  в момент времени  $t$ ,  $H(x, t)$  – комплексное поле, действующее на элемент среды в точке  $x$ , динамика которого задается уравнением:

$$\tau \partial_t H(x, t) = \partial_{xx}^2 H(x, t) - H(x, t) + e^{i\varphi(x, t)}. \quad (2)$$

Данное поле  $H(x, t)$  определяет нелокальное взаимодействие в среде. Параметр  $\tau$  задаёт временной масштаб распространения взаимодействия в среде [3]. Параметр  $\alpha$  – фазовый сдвиг ( $-\pi < \alpha < \pi$ ), определяющий тип взаимодействия элементов в системе: при  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$  – связь притягивающая, а при  $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$  – отталкивающая.

Основная часть обсуждаемых ниже режимов поведения среды фазовых осцилляторов будет обладать той особенностью, что  $\varphi(x, t)$  не удовлетворяет свойству гладкости по пространственной координате  $x$ . С помощью процедуры усреднения по пространству можно определить локальный параметр порядка  $Z(x, t) = \langle e^{i\varphi(x, t)} \rangle_{\text{loc}}$ , представляющий собой непрерывную комплексную функцию координаты  $x$  и времени  $t$  и удовлетворяющий неравенству  $|Z(x, t)| \leq 1$ . В случае  $|Z(x, t)| = 1$  все осцилляторы в окрестности точки  $x$  синхронизированы по фазе. При выполнении условия

$0 < |Z(x, t)| < 1$  принято говорить, что наблюдается режим частичной синхронизации. Равенство  $|Z(x, t)| = 0$  указывает на то, что элементы среды вращаются полностью асинхронно. Используя подход, предложенный Оттом и Антонсенем [4], можно записать динамические уравнения относительно  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_t Z(x, t) &= (e^{-i\alpha} H(x, t) - e^{i\alpha} H^*(x, t) Z^2(x, t))/2, \\ \tau \partial_t H(x, t) &= \partial_{xx}^2 H(x, t) - H(x, t) + Z(x, t), \end{aligned} \quad (3)$$

где граничные условия задаются равенствами:

$$H(0, t) = H(L, t), \quad \partial_x H(0, t) = \partial_x H(L, t). \quad (4)$$

Таким образом, для анализа коллективных эффектов в системе фазовых осцилляторов (1), (2) можно рассматривать как динамику ансамбля осцилляторов, так и эволюцию комплексного параметра порядка  $Z(x, t)$ , задаваемого системой дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (4).

Интересующие нас режимы будем искать в классе стационарных равномерно вращающихся решений системы (3):

$$Z(x, t) = z(x) e^{i\Omega t}, \quad H(x, t) = h(x) e^{i\Omega t}, \quad (5)$$

где  $\Omega$  – частота вращения. В случае пространственно-однородных состояний функции  $z(x)$  и  $h(x)$  имеют следующий вид:

$$z(x) = z_0, \quad h(x) = h_0. \quad (6)$$

Подставляя выражения (5), (6) в систему (3), получим алгебраическую систему:

$$2i\Omega z_0(1 + i\tau^2\Omega^2) = e^{-i\alpha} z_0^* z^2(1 + i\tau\Omega), \quad (7)$$

$$z_0 = (1 + i\tau\Omega) h_0. \quad (8)$$

Решения уравнения (7) определяют пространственно-однородные стационарные решения системы (3): (а) полностью асинхронное  $Z_{as} = 0$ ; (б) полностью синхронное  $Z_s = e^{i\Omega_s t}$ , где  $z_s = 1$ , а частота  $\Omega_s$  определяется как вещественный корень кубического уравнения  $\tau^2\Omega_s^3 + (1 + \tau \cos \alpha)\Omega_s + \sin \alpha = 0$ .

Определим далее устойчивость пространственно-однородных решений. Для этого представим  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$  в виде:

$$Z(x, t) = (z(x) + \tilde{Z}(x, t)) e^{i\Omega t}, \quad H(x, t) = (h(x) + \tilde{H}(x, t)) e^{i\Omega t}, \quad (9)$$

где  $\tilde{Z}(x, t)$  и  $\tilde{H}(x, t)$  описывают периодические по  $x$  малые отклонения от профилей  $z(x)$  и  $h(x)$ , соответственно. В результате линеаризации получим уравнение, определяющее динамику функций  $\tilde{Z}(x, t)$  и  $\tilde{H}(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{Z} &= -(i\Omega + e^{i\alpha} h^* z) \tilde{Z} + (e^{-i\alpha} \tilde{H} - e^{i\alpha} z^2 \tilde{H}^*)/2, \\ \tau \partial_t \tilde{H} &= \partial_{xx}^2 \tilde{H} - (1 + i\tau\Omega) \tilde{H} + \tilde{Z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Представим возмущения  $\tilde{Z}(x, t)$  и  $\tilde{H}(x, t)$  в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(x, t) &= a e^{\lambda t - ikx} + b^* e^{\lambda^* t + ikx}, \\ \tilde{H}(x, t) &= c e^{\lambda t - ikx} + d^* e^{\lambda^* t + ikx}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $k = 2\pi m/L$ , определяет моду возмущения  $\tilde{Z}(x, t)$  и  $\tilde{H}(x, t)$  с номером  $m$ . Подставляя (11) в (10), для каждого режима получим задачу на собственные значения  $\lambda$ . Результаты численного анализа устойчивости асинхронного и полностью синхронного режимов в зависимости от управляющих параметров  $\alpha$  и  $\tau$  представлены на рисунке 1. Пустая область означает, что соответствующий режим устойчив при любой длине  $L$ , область с одинарной штриховкой – устойчивость зависит от длины среды  $L$ , область с двойной штриховкой – режим неустойчив при любой длине  $L$ .

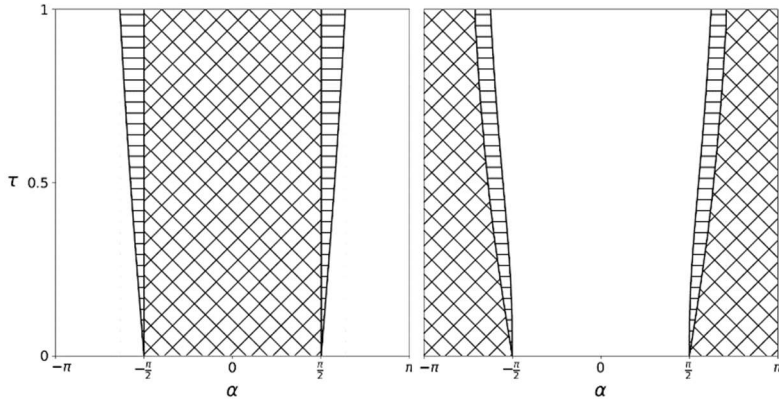


Рис. 1

Рассмотрим далее однокластерный химерный режим, который представляет собой простейшее неоднородное решение системы (3). Для их поиска подставим выражение (5) в систему (3). Получим систему относительно функций  $z(x)$  и  $h(x)$ :

$$2i\Omega z = e^{-i\alpha} h - e^{i\alpha} h^* z^2, \tag{12}$$

$$h'' - (1 + i\tau\Omega)h(x) = -z. \tag{13}$$

Здесь штрихом обозначена производная по пространственной координате  $x$ . Разрешая уравнение (12) относительно  $z$ , возьмём одно из его решений:

$$z(x) = -e^{i\beta} (\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h(x)|^2}) / h^*(x), \tag{14}$$

где  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Подставляя (14) в (13), мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно комплексной функции  $h(x)$ :

$$h''(x) - (1 + i\tau\Omega)h(x) = e^{i\beta} (\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h(x)|^2}) / h^*(x). \tag{15}$$

В рассматриваемой стационарном случае выражения периодических граничных условий (4) для интервала  $[0; L]$ , на котором распределены осцилляторы, принимаю вид:  $h(0) = h(L)$  и  $h'(0) = h'(L)$ . Представим комплексную величину  $h(x)$  в форме:

$$h(x) = r(x)e^{i\theta(x)}, \tag{16}$$

где  $r(x)$  и  $\theta(x)$  – вещественные функции. Однако в отличие от классического определения амплитуды и фазы комплексной функции мы будем предполагать, что  $r(x)$  может принимать и отрицательные значения. В этом случае  $\theta(x)$  не будет совершать  $\pm\pi$  скачки в точках, где  $r(x) = 0$ , сохраняя свою гладкость в этих точках. Заметим, что функции  $Z(x, t)$  и  $H(x, t)$ , а следовательно  $z(x, t)$  и  $h(x, t)$  определены с точностью до фазового сдвига. Таким образом, можно положить, что  $\theta(0) = 0$ .

Подставим (16) в (15), приравняем вещественную и комплексную части получившегося выражения к нулю, приходим к системе ОДУ третьего порядка:

$$r'' = r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega}{r} \cos \beta - \frac{\sqrt{r^2 - \Omega^2}}{r} \sin \beta, \tag{17}$$

$$q' = \tau r^2 \Omega + \Omega \sin \beta + \sqrt{r^2 - \Omega^2} \cos \beta, \tag{18}$$

где  $|r(x)| \geq |\Omega|$ , в области синхронной динамики осцилляторов, и

$$r'' = r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - r^2}}{r} \cos \beta, \quad (19)$$

$$q' = \tau r^2 \Omega + (\Omega + \sqrt{\Omega^2 - r^2}) \sin \beta, \quad (20)$$

где  $|r(x)| \leq |\Omega|$ , в области частично синхронной динамики осцилляторов. Для удобства записи была введена замена переменных  $q(x) = r^2(x)\theta'(x)$ .

Уравнения (17) – (20) инвариантны относительно сдвига по пространственной координате  $x$ , а также относительно замен переменных  $x \rightarrow -x, r(x) \rightarrow r(-x)$  и  $q(x) \rightarrow -q(-x)$ . Следовательно, частные решения могут быть найдены в классе симметричных функций  $r(x)$  и антисимметричных функций  $q(x)$  относительно точки  $x = L/2$ . Для таких решений, в силу периодических граничных условий, равенства  $r'(0) = r'(L)$  и  $q(0) = q(L)$  должны выполняться, только если  $r'(x)$  и  $q(x)$  принимают нулевое значение в точках  $x = 0, x = L/2, x = L$ .

Опишем процедуру поиска подобных решений. Система (17) – (20) определяется параметрами исходной системы (1), (2):  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $\tau$ , а также параметром стационарного решения  $\Omega$ . Численно можно построить её периодические решения с начальными условиями  $r(0) = r_0, r'(0) = 0, q(0) = 0$ . Тогда длина такой траектории  $L$  будет определять длину среды, в которой существует стационарное решение (5) с частотой  $\Omega$  и пространственным профилем  $h(x)$ , определяемым построенной траекторией. На рисунке 2 изображена устойчивая химера при  $\alpha = 1.7, \tau = 0.295, L = 8.6326, \Omega = -0.64$ . На фрагменте (а) показан разброс фазы осцилляторов в различные моменты времени. На фрагменте (б) показана эволюция абсолютного значения комплексного параметра порядка.

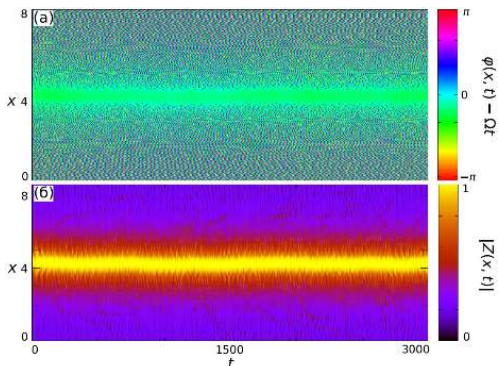


Рис. 2

В данной работе была исследована устойчивость синхронного и асинхронного состояний в зависимости от фазового сдвига и параметра временного масштаба. Показано, что химерные состояния могут существовать в случае отталкивающей связи.

Работы выполнены при финансовой поддержке РФФ (проект 19-12-00367). Анализ устойчивости проведен при поддержке РФФИ (проект 19-52-12053).

- [1] Kuramoto Y., Battogtokh D. // Coexistence of Coherence and Incoherence in Non-locally Coupled Phase Oscillators. *Nonlinear phenomena in complex systems*. 2002. Vol. 5, No. 4. pp. 380-385.
- [2] Panaggio M.J., Abrams D.M. // *Nonlinearity*. 2015. Vol. 28. P. R67–R87.
- [3] Shima S.I., Kuramoto Y. // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 18. P. 036213.
- [4] Ott E., Antonsen T.M. // *Chaos*. 2008. Vol. 18. P. 037113.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЙРОПОДОБНОГО ГЕНЕРАТОРА С ВОЗБУДИМЫМ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫМ РЕЖИМОМ

Д.И. Большаков, В.П. Деревяшкин, М.А. Мищенко,

В.В. Матросов

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Моделирование динамики нейронов и их сетей остается важным инструментом для понимания физиологии работы мозга и нервной системы. Кроме того, осознание принципов работы мозга в перспективе откроет возможность работать над нейроподобными компьютерами на принципиально новой архитектуре и лечить болезни, связанные с нервной системой, в том числе путём нейропротезирования. Создание аппаратных моделей нейронов актуально на сегодняшний день именно по причине высокого интереса к нейроморфным электронным устройствам. Создание же аппаратной модели на основе системы фазовой автоподстройки частоты (далее ФАПЧ) особо актуально, тем, что системы ФАПЧ очень распространены в радиотехнике и легкодоступны.

В работе [1] была описана модель такого нейроподобного генератора на основе ФАПЧ с полосовым RC-CR фильтром, в которой имеются состояния равновесия при параметре расстройки частоты системы  $\gamma < 0$  за счёт включения в цепь полосового фильтра параллельно дифференцирующему звену электронно-управляемого ключа с управляющей петлёй слежения за сигналом. В остальном пространстве параметров наблюдаются различные автоколебательные режимы, соответствующие различным предельным циклам разной кратности в цилиндрическом фазовом пространстве. Таким образом при параметре  $\gamma < 0$  система способна работать в возбудимом режиме, а при  $\gamma > 0$  – в автоколебательном. Динамика нейроподобного генератора с автоколебательным режимом была подробно рассмотрена в работах [2, 3].

Так же в работе [1] были записаны системы дифференциальных уравнений (1) и (2), характеризующих динамику аппаратной реализации нейроподобного генератора в автоколебательном и возбудимом режиме соответственно.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= y, & \frac{\partial y}{\partial \tau} &= z, \\ 3\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial z}{\partial \tau} &= (\gamma - y)(2d + 1) - z(\varepsilon_1(2d + 1) + 3\varepsilon_2) - d \sin(\varphi) - 2\varepsilon_2 \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= y, & \frac{\partial y}{\partial \tau} &= z, \\ 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial z}{\partial \tau} &= (\gamma - y)(d + 1) - z(\varepsilon_1(d + 1) + 2\varepsilon_2) - \varepsilon_2 \cos(\varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где параметры  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  являются параметрами инерционности фильтра, параметр  $\gamma$  является параметром начальной частотной расстройки системы, а параметр  $d$  является безразмерным параметром введенным для упрощения записи и приведения систем (1) и (2) к единым параметрам. Данные параметры вычисляются согласно уравнениям (3).

$$d = \frac{R+R_2}{R}, \varepsilon_i = \Omega R_i C_i, \gamma = \frac{\omega_{ref} - \omega_{vco}}{\Omega} \quad (3)$$

В рамках исследования аппаратной реализации нейроподобного генератора на основе системы ФАПЧ, описанной в работе [1], было проведено исследование областей существования различных режимов автоколебаний модели при параметре  $\gamma > 0$  и проведено разбиение пространства параметров на области существования этих режимов. Пример осциллограмм нескольких из возможных режимов колебаний системы представлен на рисунке 1, разбиение пространства параметров на области приведено на рисунках 2, 3. Для каждой области можно сопоставить количество колебаний в пачке с кратностью предельного цикла в цилиндрическом фазовом пространстве. Результаты, полученные в экспериментальном исследовании данной модели нейроподобного генератора на основе системы ФАПЧ качественно похожи на результаты исследований в работе [2].

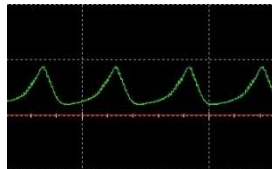


Рис. 1(а). Пример осциллограммы режима автоколебаний с одним импульсом в пачке

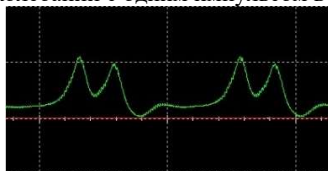


Рис. 1(б). Пример осциллограммы режима автоколебаний с двумя импульсами в пачке



Рис. 1(в). Пример осциллограммы режима автоколебаний с четырьмя импульсами в пачке

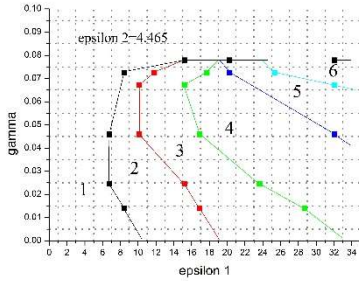


Рис. 2. Границы режимов автоколебаний системы при фиксированном параметре  $\varepsilon_2$

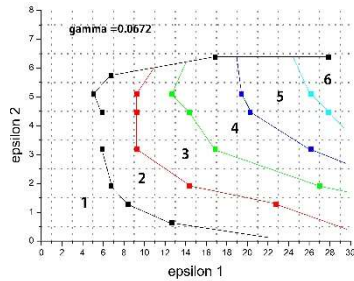


Рис. 3. Границы режимов автоколебаний системы при фиксированном  $\gamma$

Далее проводилось исследование модели в возбужденном режиме при  $\gamma < 0$ . В возбужденном режиме модель нейроподобного генератора находится в состоянии равновесия. Для того, чтобы система покинула состояние равновесия, необходимо оказать воздействие на генератор. Данное воздействие может быть направлено на изменение устойчивости состояния равновесия, что может быть осуществлено путем изменения значений параметров  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , либо на исчезновение данного состояния равновесия, что легко достигается изменением значения параметра  $\gamma$  в положительную сторону. Далее мы будем рассматривать именно этот способ воздействия, рассмотренный в работе [4].

Из работы [4] известно, что можно кратковременно изменять параметр  $\gamma$  путём подачи прямоугольного возбуждающего импульса. Следовательно, при подаче достаточно большого по амплитуде и достаточно длительного импульса можно кратковременно вывести систему из состояния равновесия и получить генерацию колебаний. Также в работе [4] было показано, что ключевую роль играет площадь подаваемого воздействия.

В рамках исследования была получена минимальная пороговая площадь возбуждающего импульса  $S = A * t = 0,3 \text{ В*мс}$ , достаточная для генерации колебания при  $\gamma = 0$ , где  $A$  – амплитуда импульса,  $t$  – длительность импульса. На рисунках 4 и 5 представлены осциллограммы с выхода петли управления ФАПЧ, при площадях возбуждающего импульса меньше пороговой и равной пороговой соответственно. Параметры  $\varepsilon$  при измерении:  $\varepsilon_1 = 6,754$ ,  $\varepsilon_2 = 4,465$ .



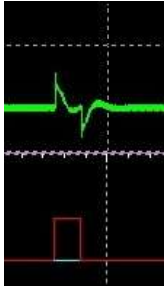


Рис. 4. Осциллограмма при значении  $S$  меньше пороговой



Рис. 5. Осциллограмма при значении  $S$  равной пороговой

Далее была получена зависимость минимальной площади импульса, необходимого для возбуждения ответа в нейрноподобном генераторе, от значения параметра  $\gamma$ , определяющего удаленность устойчивого состояния равновесия от границы автоколебательного режима. График зависимости представлен на рисунке 6. При уменьшении  $\gamma$  нужно подавать больший по площади импульс, для выведения системы из состояния равновесия.

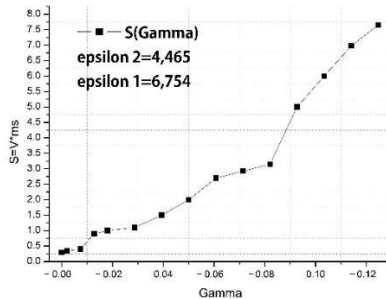


Рис. 6. Зависимость порогового значения  $S$  от параметра  $\gamma$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23001 мк.

- [1] Большаков Д.И., Мищенко М.А., Матросов В.В. // Труды XXIII Научной конференции по радиофизике. ННГУ, 2019. С. 214.
- [2] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4, с. 122.
- [3] Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В. // Письма в ЖТФ, 2017. Т. 43, вып. 13. С. 10.
- [4] Мищенко М.А., Жукова Н.С., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2018. Т. 26, вып. 5. С. 6.

## ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ С ПОТЕРЕЙ СИММЕТРИИ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Д.С. Хорькин<sup>1)</sup>, М.И. Болотов<sup>1)</sup>, В.О. Муняев<sup>1)</sup>, Л.А. Смирнов<sup>2, 1)</sup>, Г.В. Осипов<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2)</sup> Институт прикладной физики РАН

Синхронизация – один из основных динамических эффектов, наблюдаемых в ансамблях и сетях связанных осцилляторов. Известно, что даже слабая связь в системе идентичных элементов может привести к полной синхронизации фаз и частот [1]. Однако в силу явления потери симметрии в популяциях идентичных элементов, в то время как существует полностью синхронный режим, могут реализовываться решения, в которых состояния некоторых элементов могут отличаться друг от друга [2].

В данной работе мы рассматриваем вращательные режимы с потерей симметрии в цепочке связанных маятников. Многие из этих состояний появляются в результате развития неустойчивости синфазного вращательного режима [3, 4]. В случае малой диссипации наш теоретический анализ позволяет находить границы областей неустойчивости синфазного режима, определять тип установившегося несинфазного вращательного движения для цепочек с произвольным количеством маятников. Аналитические результаты подтверждены в рамках прямого численного моделирования цепочки.

Рассмотрим цепочку  $N$  связанных идентичных маятников ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), описываемую системой уравнений:

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma + k[\sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n)]. \quad (1)$$

В качестве граничных условий для (1) примем свободные концы, т.е.  $\varphi_0 = \varphi_1$ ,  $\varphi_N = \varphi_{N+1}$ . Здесь  $\lambda$  – коэффициент диссипации,  $\gamma$  – постоянный вращательный момент, параметр  $k$  характеризует силу связи между элементами. Очевидно, что в системе (1) существует синфазный вращательный режим  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_N(t) = \phi(t)$ . Линеаризуя (1) в окрестности  $\phi(t)$  и переходя в полученной системе линейных дифференциальных уравнений к нормальным координатам, можно показать, что существует  $N - 1$  моды ( $\psi_n, n = 1, 2, \dots, N - 1$ ), которые приводят к неустойчивости синфазного режима при некоторых значениях управляющих параметров. Данные моды удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\psi}_n + \lambda \dot{\psi}_n + k[\cos \phi(t) - \mu_n(N)]\psi_n = 0, \quad (2)$$

где набор коэффициентов  $\mu_n(N)$  определяется следующим выражением:

$$\mu_n(N) = 2(1 - \cos(\pi n/N)). \quad (3)$$

Для системы (2) на основе результатов, представленных в нашей предыдущей работе [4], можно определить набор  $N - 1$  интервалов ( $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ ), где синфазный режим является неустойчивым. Границы интервалов неустойчивости определяются выражениями:

$$k_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{4\mu_n(N)} \left[ \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \mp 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right). \quad (4)$$

Будем считать, что элементы цепочки образуют кластер, если их фазы совпадают. Тогда реализующийся в системе режим будем обозначать как  $(a_1: a_2: \dots: a_M)$ , если в цепочке есть  $M$  кластеров с  $a_m$  элементов в кластере с номером  $m$ . При этом, синфазный режим  $\phi(t)$  в цепочке из  $N$  элементов будет обозначаться как  $(N: 0)$ .

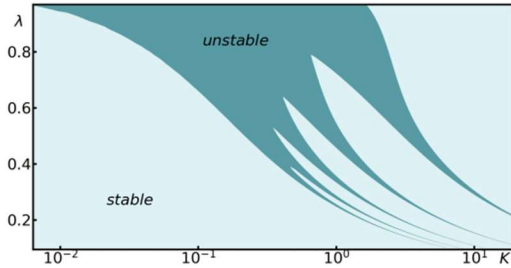


Рис. 1

Рассмотрим далее устойчивость синфазного вращательно-го режима  $\phi(t)$ . На рисунке 1 изображено разбиение плоскости параметров  $(k, \lambda)$  на области, где синфазный режим  $\phi(t)$  устойчив и неустойчив, для цепочки из  $N = 6$  элементов при фиксированном значении параметра  $\gamma = 0.97$ . Можно заметить, что при увеличении параметра диссипации области неустойчивости начинают сливаться друг с другом, пока не превратятся в одну. При этом выражения (4) с высокой степенью точности описывают границы областей неустойчивости при малых значениях параметра диссипации.

Проанализируем динамику вращательных режимов в цепочке из  $N = 6$  маятников в зависимости от параметра  $k$  при  $\lambda = 0.3, \gamma = 0.97$ . На рисунке 2 показаны типы несинфазных вращательных режимов, реализующихся внутри областей неустойчивости

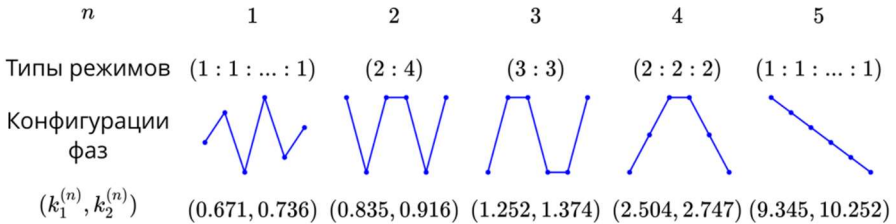


Рис. 2

сти синфазного движения  $\phi(t)$ . Фрагменты, отвечающие конфигурациям фаз, показывают относительное расположение фаз элементов цепочки при реализации соответствующего несинфазного вращательного режима.

Для того чтобы количественно описывать вращательные режимы введём следующий параметр синхронности  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n_1, n_2=1}^N \max_{0 \leq t \leq T} |\dot{\phi}_{n_1}(t) - \dot{\phi}_{n_2}(t)|, \quad (5)$$

который характеризует степень фазовой синхронизации вращательного движения. Значение  $\Xi = 0$  показывает, что рассматриваемый нами вращательный режим является синфазным, значения  $\Xi > 0$  говорят о реализации несинфазного вращательного движения.

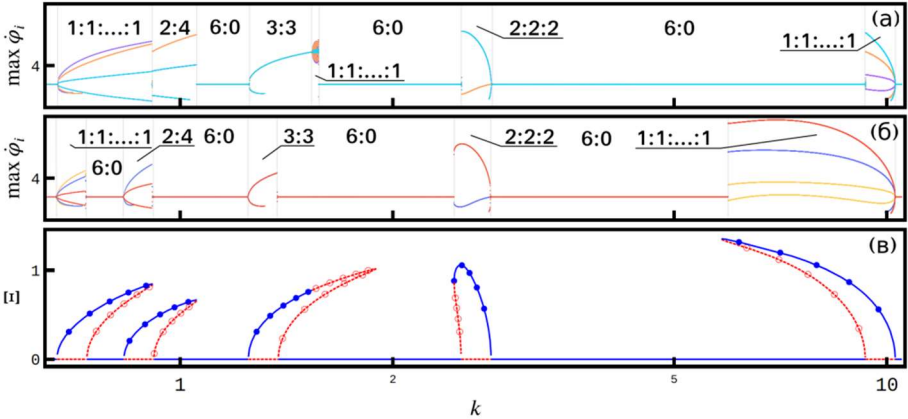


Рис. 3

На фрагментах (а) и (б) рисунка 3 изображены локальные максимумы мгновенных частот осцилляторов, полученные с помощью наследования начальных условий при увеличении и уменьшении параметра  $k$ , соответственно. На фрагменте (в) рисунка 3 представлена бифуркационная диаграмма вращательных режимов, на которой круглыми маркерами показаны  $4\pi$ -периодические вращательные режимы, закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращательным движениям, полые маркеры – неустойчивым, линия без маркеров соответствует синфазному вращательному режиму, сплошная – устойчивому, пунктирная – неустойчивому. При увеличении параметра  $k$  синфазное периодическое вращательное движение  $\phi(t)$  претерпевает бифуркацию удвоения периода ( $k \approx 0.668$ ). При этом из устойчивого синфазного  $2\pi$ -периодического движения рождается устойчивое  $4\pi$ -периодическое движение (1:1:..., 1), а  $2\pi$ -периодическое синфазное движение теряет свою устойчивость. На бифуркационной диаграмме видно (см. рис. 3в), что существует также неустойчивое несинфазное  $4\pi$ -периодическое движение (1:1:..., 1), которое рождается из синфазного неустойчивого  $2\pi$ -периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода ( $k \approx 0.736$ ), при этом синфазное  $2\pi$ -периодическое движение вновь становится устойчивым. Далее при увеличении параметра  $k$  устойчивое и неустойчивое  $4\pi$ -периодические вращательные движения (1:1:..., 1) сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации ( $k \approx 0.911$ ). Аналогичные бифуркации происходят с вращательными движениями типа (2:4), (2:2:2), (1:1:..., 1). Отметим особенность, наблюдающуюся у вращательного движения типа (3:3). Здесь при увеличении параметра  $k$  происходит бифуркация Неймарка-Сакера ( $k \approx 1.543$ ), когда пара комплексно сопряжённых мультипликаторов Флоке пересекает единичную окружность. В результате данной бифуркации  $4\pi$ -периодический вращательный ре-

жим (3:3) теряет свою устойчивость, и замкнутая периодическая траектория превращается в тор, о чем свидетельствует большое число локальных максимумов частот осцилляторов (см. рис. 3а). При дальнейшем увеличении параметра  $k$  неустойчивые  $4\pi$ -периодические вращательные движения (3:3) сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации ( $k \approx 1.894$ ). Можно заметить, что при  $k \in (0.83, 0.911)$  в системе имеет место бистабильность несинфазных вращательных движений, в результате которой в зависимости от начальных условий в системе может реализоваться (1:1: ... :1) или (2:4)  $4\pi$ -периодическое вращательное движение.

В работе была рассмотрена вращательная динамика в цепочке локально связанных маятников в области параметров, где синфазное вращательное движение является неустойчивым. В случае малой диссипации наш теоретический анализ позволяет найти границы области неустойчивости синфазного вращательного режима и определять типы несинфазных вращательных движений для цепочки произвольной длины. Увеличение параметра диссипации приводит к уменьшению областей неустойчивости синфазного режима. Продемонстрировано наличие бистабильности вращательных движений.

Работы выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-12-00367) и РФФИ (проект 19-52-12053).

- [1] Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J. Synchronization. A Universal Concept of Nonlinear Sciences – Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [2] Motter A.E. // Nature Physics. 2010. Vol. 6. P. 164-165.
- [3] Smirnov L.A., Kryukov A.K., Osipov G.V., Kurths J. // Regul. Chaot. Dyn. 2016. Vol. 21, № 7-8. P. 849.
- [4] Bolotov M. I., Munyaev V. O., Kryukov A. K., Smirnov L. A., Osipov G. V. // Chaos. 2019. Vol 29, № 3. P. 033109.

**ЭФФЕКТЫ РАБОЧЕЙ ПАМЯТИ СЕТИ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ****Н.С. Ковалева, М.А. Мищенко, В.В. Матросов***ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Рабочая память – это ограниченная по емкости часть памяти человека, сочетающая в себе временное хранение и манипулирование информацией. Рабочая память отличается от долговременной памяти, которая является отдельной частью системы памяти огромного объема и хранит информацию в относительно стабильной форме. В парадигме отложенного ответа некоторый предоставленный стимул сохраняется в памяти в течение нескольких секунд во время выполнения какой-либо задачи. В течение этого времени была обнаружена повышенная активность нейронов, которая отвечает за этот стимул, поэтому считается, что нейроны напрямую связаны с механизмами рабочей памяти [1].

В данной работе предполагается, что элемент поддерживается в состоянии рабочей памяти путем кратковременной синаптической фасилитации, опосредованной повышенным уровнем остаточного кальция в пресинаптических терминалях нейронов, которые кодируют этот элемент. Действие такого механизма исследовано с помощью рекуррентной сети нейронов- пороговых интеграторов.

Сеть состоит из  $N_E$  возбуждающих и  $N_I$  тормозных нейронов. Подпороговая динамика деполяризации описывается уравнением:

$$\tau_m V_i = -V_i + I_i^{(rec)}(t) + I_i^{(ext)}(t), \quad (1)$$

где  $i = 1, N_E + N_I$  - номер нейрона,  $\tau_m$  – постоянная времени мембраны,  $I_i^{(ext)}$  – внешний ток. Каждый раз, когда деполяризация достигает определенного порога  $\theta$  (т.е.  $V_i(t) \geq \theta$ ), нейрон генерирует импульс и становится невосприимчивым в течение рефрактерного периода  $\tau_{ref}$ , затем снова восстанавливается со значения потенциала  $V_r$ .

Рекуррентный ток  $I_i^{(rec)}(t)$  – сумма постсинаптического тока от всех других нейронов, связанных с нейроном  $i$ :

$$I_i^{(rec)}(t) = \sum_j \widehat{J}_{ij}(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \quad (2)$$

где  $\widehat{J}_{ij}(t)$  – мгновенная эффективность синапса, соединяющего нейрон  $j$  с нейроном  $i$ ;  $t_k$  – все времена импульсов ( $j$ ) пресинаптического нейрона  $j$ .

Уравнения синаптической пластичности:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(t) &= \frac{U - u_j(t)}{\tau_F} + U[1 - u_j(t)] \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \\ \dot{x}_j(t) &= \frac{U - x_j(t)}{\tau_D} + u_j(t) x_j(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u$  – синаптическая эффективность,  $x$  – синаптический ресурс.

Мгновенная эффективность синапса:

$$\widehat{J}_{ij}(t) = J_{ij} u_j(t) x_j(t), \quad (5)$$

где  $J_{ij}$  – абсолютная синаптическая эффективность связи между возбуждающими нейронами. Для остальных нейронных связей  $\widehat{J_{ij}} = J_{ij}$ .

Внешние токи моделируются как гауссовский белый шум:

$$I_i^{(ext)}(t) = \mu_{ext} + \sigma_{ext}\eta_i(t) \quad (6)$$

при  $\langle \eta_i(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$ , так что  $\mu_{ext}$  и  $\sigma_{ext}^2$  являются соответственно средним значением и дисперсией внешних токов.

Проведено математическое моделирование динамики сети, состоящей из 1000 нейронов. Сеть содержит 8 кластеров, в каждом из которых содержится 70 возбуждающих нейронов (1-560 нейроны), 20% сети – тормозные нейроны (801-1000 нейронов), остальные элементы сети – возбуждающие нейроны, не входящие в кластеры, вероятность установления синаптического контакта – 20%, время восстановления синаптической эффективности 1500 мс, время восстановления синаптических ресурсов 200 мс. На рис. 1 показана динамика сети в зависимости от времени, где каждая точка обозначает возникновение спайка на определенном нейроне. Для каждого кластера синим цветом изображены графики изменения средних значений синаптической эффективности  $u$  в кластерах, красным – изменения средних значений синаптического ресурса  $x$  в кластерах.

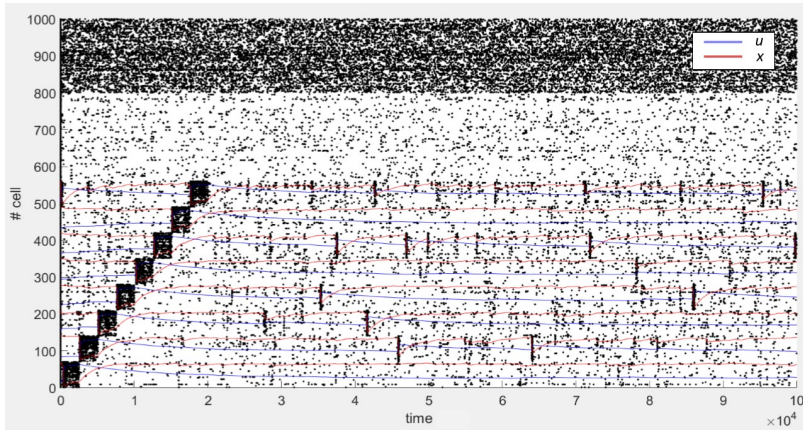


Рис. 1

Исследовано влияние фоновой активности на емкость рабочей памяти. Значительное увеличение фонового ввода приводит к рабочей памяти с асинхронной повышенной активностью в целевой популяции.

В работе [2] оценивалась емкость рабочей памяти частотной модели в зависимости от временных параметров синаптической пластичности. В данной работе проведено исследование влияния параметров времени восстановления уровня кальция  $\tau_f$  и времени восстановления нейротрансмиттеров  $\tau_d$  на количество сохраненных образов в

спайковой модели сети. При различных комбинациях параметров возможно сохранение различного количества образов, при этом при больших значениях параметра  $\tau_a$  отмечено, что образы почти не сохраняются. При изменении синаптических времен меняется количество активных кластеров.

Исследовано влияние количества перекрывающихся связей между кластерами на динамику сети рабочей памяти. Рассмотрена сеть из 1000 нейронов, состоящая из 2 одинаковых кластеров возбуждающих нейронов, занимающих вместе 50% сети, 20% сети – тормозные нейроны, остальные нейроны – сторонние положительно воздействующие нейроны. Вероятность синаптического контакта тормозных нейронов с возбуждающими – 70%, в остальных случаях – 20%. В сеть загружаются образы посредством последовательного воздействия на кластеры, сначала воздействуя на первые 250 нейронов первого кластера, затем на последние 250 нейронов второго кластера (рис. 2).

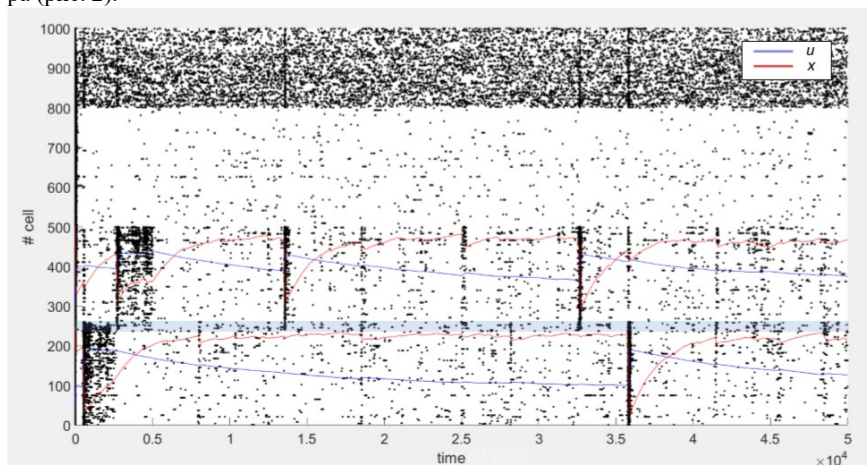


Рис. 2

Отмечено, что несмотря на наличие перекрывающихся связей при воспроизведении образов сохраняется разграничение между кластерами, синхронная активность одного кластера при воспроизведении образа не активирует нейроны другого кластера посредством пересекающихся связей. Таким образом, рассматриваемая система является грубой и не требует жесткого разграничения кластеров и все результаты, полученные для непересекающихся кластеров, могут быть адаптированы для случая с перекрытием популяций.

Работа выполнена при поддержке РФФ в рамках проекта 18-11-00294.

- [1] Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. // Science. 2008. Vol. 319, № 5869. P. 1543.  
 [2] Mi Y., Katkov M., Tsodyks M. // Neuron. 2017. Vol. 93, № 2. P. 323.



## АСТРОЦИТАРНО-ИНДУЦИРОВАННАЯ ПЕРЕМЕЖАЮЩАЯСЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕЙРОНОВ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ

С.Ю. Маковкин, С.Ю. Гордлеева, М.В. Иванченко

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В работе изучается минимальная конфигурация нейрон-астроцитного ансамбля, состоящую из двух пар нейронов и астроцитов. Схематическое представление топологии ансамбля нейрон-астроцитов показано на рис. 1. Динамика внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$  в астроците описывается моделью Уллаха-Юнга [1], мембранный потенциал нейрона описывается моделью Ходжкина-Хаксли [2] с модификацией Майнена для мозга млекопитающих [3].

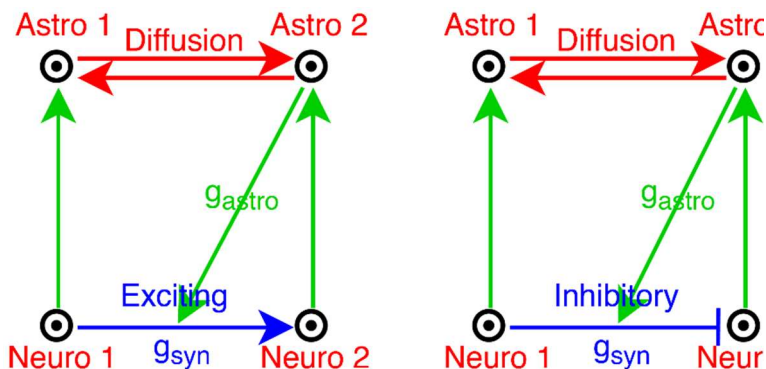


Рис. 1

Динамика мембранного потенциала описывается моделью Х-Х [2].

Нелинейные функции для воротных переменных  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ , задаются с помощью модификации Майнена [3].

Возбуждающая или ингибирующая однонаправленная нелинейная связь пресинаптического (ведущего) нейрона с постсинаптическим (подчиненным) нейроном осуществляется синаптическим током  $I_{syn_2}$ . Этот ток отражает кинетику химического синапса.

Переменные состояния  $i$ -го астроцита включают: внутриклеточную концентрацию  $Ca^{2+}$ , долю активированных рецепторов  $IP_3$  в эндоплазматическом ретикулуме и внутриклеточную концентрацию инозит-1,4,5-трифосфата ( $IP_3$ ),  $IP_{3i}$ . Они задаются уравнениями модели астроцита Уллаха-Юнга.

Повышение уровня кальция в астроцитах вызывает высвобождение глутаматер, таких как глутамат, ГАМК, АТФ и D-серин. Глутаматер может модулировать синаптическую силу путём связывания с пре- или постсинаптическими терминалами. Среди разнообразных экспериментальных проявлений разных глутаматер [4] мы остановимся на эффекте астроцитарно-индуцированного

усиления синаптической передачи. Этот эффект описан с помощью модели, предложенной в [5].

Подробное биофизическое описание нейрон-астроцитарного взаимодействия можно найти в статье [6], [7].

Нелинейный анализ динамики одиночного астроцита (5, 6) и одиночного нейрона X-X описан в [8] и [9] соответственно.

Для каждого из двух колеблющихся синаптически связанных нейронов мы рассчитываем мгновенную частоту  $\nu(t)$ , определенную как обратная величина интервала (периода) между пиками спайков (ISI):

$$\nu(t) = (ISI(t))^{-1}. \quad (2)$$

Также мы определяем относительную фазу потенциалов действия  $\Delta\phi_{1,2}$ , как сдвиг во времени между ответным (постсинаптическим) спайком  $t_{post}(n)$  и соответствующим предшествующим спайком в пресинаптическом нейроне  $t_{pre}(n)$ :

$$\Delta\phi_{1,2} = 2\pi * \frac{t_{post}(n) - t_{pre}(n)}{T}. \quad (2)$$

$T$  – самый длинный период колебаний между пре- или постсинаптическим спайком нейронов, а  $n = 1, 2, \dots$ , отвечают за индекс постсинаптического колебания. Мы считаем, что нейроны синхронизируются во временном интервале,  $t_s$ , если отсутствуют сдвиги по фазе на этом интервале и разница между мгновенными частотами нейронов была меньше, чем 1%:  $|\nu_2(t_i) - \nu_1(t_i)| < 0.2$ . Мы суммируем все такие временные интервалы, когда нейроны синхронизированы во время  $t_s$ , нормированное по всему времени наблюдения,  $t_{tot}$ , и получаем относительное время синхронизации  $\frac{t_s}{t_{tot}}$ . Когда относительное время синхронизации равно 1, два нейрона синхронизируются все время наблюдения.

Было обнаружено, что астроцитарная модуляция синаптической связи нейронов улучшает синхронизацию между колеблющимися нейронами. Влияние астроцитов на динамику пары связанных нейронов заключается в стимуляции синхронизации колебательной активности нейронов за счет управляемого астроцитами увеличения нейрональной синаптической силы связи. Пример вызванной астроцитами синхронизации показан на рис. 2. Первоначально колебания нейронов вызывают колебания кальция в астроците. При достижении порога внутриклеточной концентрации  $Ca^{2+}$ , астроцит усиливает синаптическую силу связи между нейронами, и они синхронизируются в противофазе на интервале времени, равном длительности импульсов кальция в астроците. В отсутствие астроцитарного воздействия система проявляет биения из-за расстройки частоты между связанными осцилляторами (рис.2 (b)). На рис. 2 серые области показывают временные интервалы синхронизации ( $t_s$ ). а) Режим фазовой синхронизации. б) Асинхронный режим (биения). в) Спайки двух связанных нейронов. д) Мгновенные частоты нейронов. Для (а-д) синий цвет соответствует пресинаптическому нейрону, красный цвет – постсинаптическому. е) Относительные фазы. ф) Один период динамики увеличения внутриклеточной концентрации кальция в астроците. Красная пунктирная линия показывает порог активации для астроцитарного влияния на синаптическую силу связи.

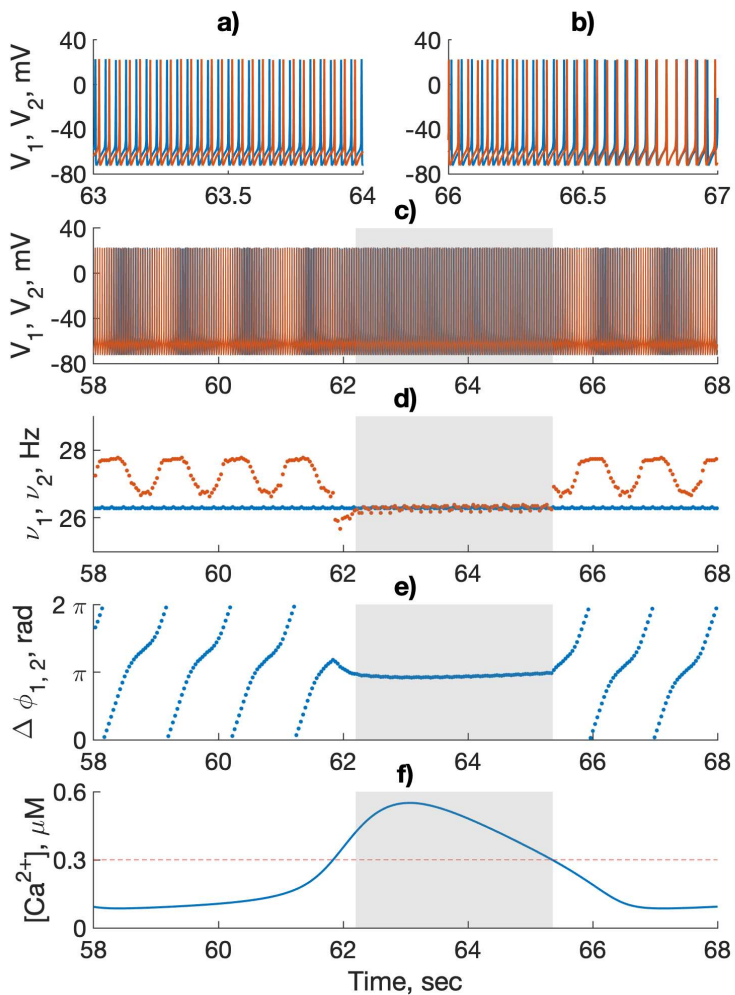


Рис. 2

В заключение, мы выявляем следующие результаты исследования. Астроциты вместе с синаптически связанными нейронами образуют замкнутый контур, в котором

эффективная сила связи элементов зависит от временной динамики элементов системы. Астроцит может вызывать прерывистую (периодическую) синхронизацию пары синаптически связанных колеблющихся нейронных осцилляторов X-X на временной шкале. Такой эффект может быть существенным для динамики всей сети и астроцит может влиять на передачу сигнала в тысячи синапсов.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 074-02-2018-330(1).

- [1] Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A. H. 2006. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1,4,5)-trisphosphate regeneration. // *Cell Calcium* Vol. 39, № 3. P 197.
- [2] Hodgkin A. L., Huxley A. F. 1952. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. // *The Journal of physiology*. Vol. 117 (4). P 500.
- [3] Mainen Z. F., Joerges J., Huguenard J. R., Sejnowski T. J. 1995. A model of spike initiation in neocortical pyramidal neurons. // *Neuron*. Vol. 56, № 6. P. 1427.
- [4] Araque A., Carmignoto G., Haydon P. G., Oliet S. H., Robitaille R., and Volterra A. 2014. Gliotransmitters travel in time and space. // *Neuron*. Vol. 81, № 4. P. 728.
- [5] Kanakov O., Gordleeva S., Ermolaeva A., Jalan S., Zaikin A. 2019. Astrocyte-induced positive integrated information in neuron-astrocyte ensembles. // *Physical Review E*. Vol. 99, № 1. P. 012418.
- [6] Gordleeva S. Y., Lebedev S. A., Rummyantseva M. A., Kazantsev V. B. 2018. Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network. // *JETP Letters*. Vol. 107, № 7. P. 440.
- [7] Pankratova E. V., Kalyakulina A. I., Stasenko S. V., Gordleeva S. Y., Lazarevich I. A., Kazantsev V. B. 2019. Neuronal synchronization enhanced by neuron-astrocyte interaction. // *Nonlinear Dynamics*, Vol. 97, № 1. P.647.
- [8] Matrosov V., Gordleeva S., Boldyreva N., Ben-Jacob E., Kazantsev V. 2018. Emergence of regular and complex calcium oscillations by inositol 1, 4, 5-trisphosphate signaling in astrocytes. // *Computational Glioscience*. Vol. 1. P. 151.
- [9] Kazantsev V. B., Asatryan S. Y. 2011. Bistability induces episodic spike communication by inhibitory neurons in neuronal networks. // *EPL (Physical Review E)*. Vol. 84, № 3. P. 031913.

## ХАРАКТЕР ФЛУКТУАЦИЙ В КОНКУРЕНТНОЙ СТРАТЕГИИ ОБУЧЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО КЛАССИФИКАТОРА

А.А. Сутягин, О.И. Канаков

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

### *Введение*

Задачи классификации возникают в рамках разнообразных приложений. Для классификации изучаемых объектов или событий используется классификатор – алгоритм, использующий набор признаков для определения принадлежности к классу или создающий вектор оценок принадлежности к каждому из классов. Для классификации событий на две группы используется бинарный классификатор, выбирающий из двух взаимоисключающих гипотез, от которых зависит вероятностное распределение в пространстве входных данных. В случае, если эти распределения вероятностей известны, оптимальное решение определяется правилом Байеса. Если вероятности неизвестны, но имеется набор обучающих примеров — входных данных с указанием «правильного ответа», то задача классификации преобразуется в задачу машинного обучения.

По мере развития синтетической биологии возникла проблема построения обучаемого классификатора. Решение этой проблемы – создание коллективного классификатора [1]. В этом случае классификатор представляет собой ансамбль простых элементов, имеющих фиксированные, но различные параметры. Обучение такого классификатора происходит путём изменения состава ансамбля – селекции. Стратегия обучения, основанная на конкуренции между типами клеток с различными параметрами, при увеличении количества обучающих примеров, в некоторых случаях позволяет достичь вероятности правильной классификации, близкой к значению, определяемому правилом Байеса. При этом стратегия [1] имеет неизбежный недостаток, обусловленный принципом Гаузе, вследствие которого выживает только один тип клеток, что препятствует применению стратегии для решения сложных задач классификации.

Для решения проблемы, связанной с принципом Гаузе, была предложена стратегия обучения, позволяющая реализовать режим сосуществования [2]. Для реализации механизма используется популяционная динамика типов клеток, описываемая уравнениями

$$\dot{n}_i = \lambda_i n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_k n_k\right) - (1 - \lambda_i) \frac{n_i^2}{N_c}, \quad (1)$$

где  $n_i$  – концентрация  $i$ -го типа клеток,  $i = 1 \dots s$ , где  $s$  – количество типов клеток,  $\lambda_i$  – коэффициенты выживаемости для  $i$ -го типа клеток,  $N_c$  – «ёмкость среды». Обучение коллективного классификатора происходит путём изменения состава образующей его популяции клеток на основании последовательности обучающих примеров. В данной модели помимо конкуренции за общий ресурс также обеспечивается внутривидовая конкуренция. В алгоритме обучения такая конкуренция реализуется путём попарного сравнения клеток и последующего вероятностного копирования или удаления клетки с вероятностями, зависящими от результата сравнения. Система (1) имеет устойчивое состояние равновесия, которое и определяет собой результат обучения:

$$n_i = N_c \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i} \left( \sum_k \left( \frac{1}{1 - \lambda_k} \right) - (s - 1) \right)^{-1}. \quad (2)$$

Таким образом, состав обученного ансамбля определяется параметрами  $\lambda_i$ , значения которых в непрерывной модели задаются выражением

$$\lambda_i = \frac{W_+}{2(W_+ + W_-)}, \quad (3)$$

где  $W_+$  и  $W_-$  – функции условной плотности вероятности, соответствующие двум классам.

### *Алгоритм для реализации стратегии обучения и результаты моделирования*

Для реализации механизма конкуренции с сосуществованием создаётся «среда», представляющая собой набор ячеек, в которых размещены клетки различного типа, при этом возможно наличие пустых ячеек. Обучение состоит из последовательных шагов, каждому из которых для установления соответствия с непрерывной динамикой (1) приписывается условная длительность (малый параметр)  $dt$ . Каждый шаг состоит из следующих действий, выполняемых для каждой клетки (непустой ячейки):

- Копирование текущей клетки с вероятностью  $\lambda_i dt$  в пустую ячейку.
- Сравнение текущей клетки с содержимым другой случайно выбранной ячейки
- Если тип клеток совпал, выполняется операция удаления с вероятностью  $dt$
- Если тип клеток не совпал, выполняется операция удаления с вероятностью  $\lambda_i dt$

Вероятности, связанные с параметрами выживаемости  $\lambda_i$ , реализуются в алгоритме селекции специальным случайным испытанием на основе обучающих примеров. Каждый тип клеток имеет собственную функцию отклика в виде треугольного пика, положение которого зависит от типа клетки, а отклик ансамбля определяется как суммарный отклик всех клеток [3].

Отклонения динамики дискретной модели от предсказаний непрерывной модели (1) носят характер случайных флуктуаций. При этом результаты моделирования [3] показывают хорошее соответствие между непрерывной и дискретной моделями, а также между байесовским классификатором (см. верхнюю панель; ответ определяется тем, какая из функций  $W_+(x)$  и  $W_-(x)$  имеет большее значение для входного  $x$ ) и обученным коллективным классификатором (см. нижнюю панель на рис. 1; ответ определяется сравнением отклика классификатора  $F(x)$  с известным из теории порогом, который обозначен горизонтальной прямой).

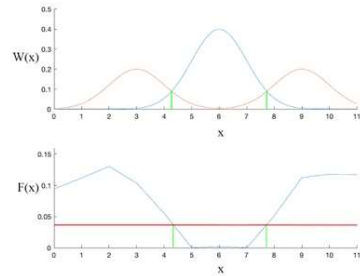


Рис. 1

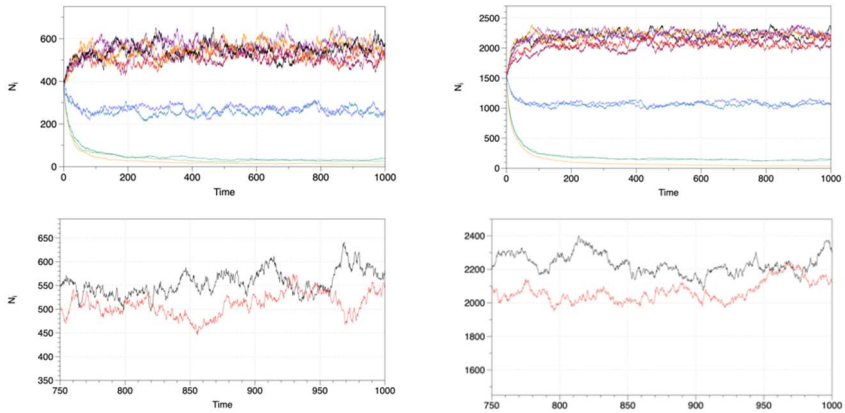


Рис. 2

**Характер флуктуаций при изменении параметров стратегии обучения**

Применительно к стохастической дискретной модели, вместо устойчивого состояния равновесия можно говорить о стационарном марковском процессе. На рис. 2 представлена динамика популяции всех типов клеток для  $N = 5000$  (слева) и  $N=20000$  (справа) при  $t = 1000$ , а также динамика клеток  $i = 3; 12$  на отрезке  $t \in [750; 1000]$ , на котором соответствующий процесс можно принять за стационарный.

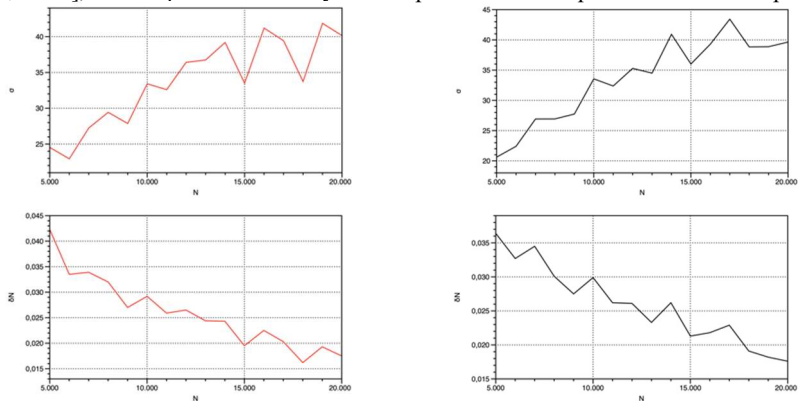


Рис. 3

В условиях численного эксперимента, аналогичных использованным в [3], проведено исследование характера зависимости флуктуаций от численности клеток  $N$ . При увеличении общего количества клеток наблюдается увеличение флуктуаций по абсолютной величине, при этом их относительная величина спадает. Зависимости абсо-

лютной и относительной величин отклонения от количества клеток для двух типов клеток  $i = 3; 12$  представлены на рис. 3.

### *Заключение*

В работе показано, что относительная величина флуктуаций состава ансамбля, присущих стохастическому процессу обучения коллективного классификатора, уменьшается при увеличении полного количества клеток. При этом в пределе медленного обучения и большого числа клеток стохастическая дискретная система корректно описывается непрерывной моделью. Значит, в этом пределе предложенная стратегия обучения на основе селекции обеспечивает результат обучения, предсказанный непрерывной моделью.

- [1] Kanakov O. Multi-input distributed classifiers for Synthetic genetic circuits / O. Kanakov et al. // PLoS ONE. 2015. 10(5). e0125144.
- [2] Kanakov O. Competitive learning mechanisms for distributed synthetic gene classifiers / O.I. Kanakov, M.V. Ivanchenko, L.S. Tsimring // Opera Medica & Physiologica. 2016.Vol. 2 (S1). P. 53.
- [3] Сутягин А.А., Канаков О.И. // В кн.: Тр. XXIII научн. конф. по радиофизике. 21 мая 2019г. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2019. С. 246.



## ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ МАГНИТНОЙ ЯЧЕЙКИ ПАМЯТИ

А.М. Тузиков, А.В. Половинкин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

### Введение

Один из главных вопросов, которые необходимо решить, прежде чем магниторезистивная память станет ведущей в области памяти – это оптимальное переключение вектора намагниченности, т.е. увеличение скорости чтения/записи информации при минимальных энергетических затратах. Задача поиска оптимального управления спин-поляризованным током бистабильной магнитной ячейки памяти была поставлена в работе [1]. Однако для рассмотренной в этой статье конфигурации магнитных слоев и внешнего магнитного поля переключение возможно лишь при наличии флуктуаций магнитного поля, то есть является случайным событием.

Нами исследовался случай, когда благодаря наличию внешнего магнитного поля, не коллинеарного спин-поляризованному току, переключение магнитной ячейки может происходить независимо от наличия флуктуаций.

### Постановка задачи управления

Рассмотрим магнитную структуру с полем анизотропии направленным перпендикулярно магнитным слоям рис. 1.

Эта структура состоит из двух ферромагнетиков, разделенных немагнитным слоем. Управление намагниченностью реализуется в более тонком свободном слое  $F_1$  ( $d \ll d_F$ ). Намагниченность второго слоя  $F_2$  примерно постоянна.

Предполагается, что уравнение движения магнитного момента  $\mathbf{M}$  ячейки может быть описано уравнением Гинзбурга-Ландау:

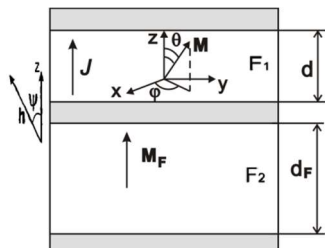


Рис. 1

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_L + \mathbf{T}_S \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{T}_C = -\gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}_{eff}]$  – слагаемое, отвечающее за прецессию,  $\mathbf{T}_L = -\gamma(\alpha/M_s)[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}_{eff}]]$  обусловлено наличием диссипативных сил в системе, а  $\mathbf{T}_S = -\gamma(j_s/M_s)[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{m}_f]]$  – слагаемое Слоунчевского-Берже, обусловленное наличием в системе спинового тока [2],  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\alpha = 0.03$  – коэффициент затухания,  $M_s = 1000 \text{ erg}/(G \cdot \text{cm}^3)$  – величина намагниченности насыщения,  $j_s$  – безразмерный параметр, характеризующий величину эффектов, связанных с переносом спинов током,  $\mathbf{m}_f = \mathbf{M}_f/M_s$  – единичный вектор, указывающий направление намагниченности фиксированного слоя. Эффективное поле записывается как  $\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_f$ , где  $\mathbf{H}$  – внешнее поле,  $\mathbf{H}_a$  – поле анизотропии, направленное вдоль оси

$z, \mathbf{H}_f$  – поле размагничивания [3]. Далее все выражения приведены для безразмерного времени  $\tau = \gamma M_s t$ .

Магнитная энергия  $E_m$  системы, убывающая вдоль траекторий автономного движения магнитного момента, является функцией  $m_x, m_y, m_z$  и зависит от параметров  $h_a, h_x, h_y, h_z$  где  $h_a = H_a / M_s$ ,  $m_x, m_y, m_z$  и  $h_x, h_y, h_z$  – проекции на оси декартовой системы координат векторов  $\mathbf{m} = \mathbf{M} / M_s$  и  $\mathbf{h} = \mathbf{H} / M_s$ .

При физически обоснованных значениях параметров рассматриваемая система в сферической системе координат:  $\theta, \varphi, r = |\mathbf{m}| \equiv 1$  обладает двумя устойчивыми (неустойчивыми) состояниями равновесия типа устойчивый (неустойчивый) фокус (а также неустойчивыми и седловыми состояниями равновесия). Отметим: без внешнего магнитного поля управление спин-поляризованным током невозможно из-за обнуления, в точках устойчивых состояний равновесия, слагаемых, пропорциональных току. При этом малое внешнее магнитное поле, не коллинеарное спин-поляризованному току, сдвигает устойчивые состояния равновесия, не меняя их тип.

Можно показать, что магнитная энергия системы:

$$E_m(\mathbf{M}) = -\frac{1}{2M_s}(H_a - 1)(\mathbf{M}, \mathbf{z}_0)^2 - (\mathbf{H}, \mathbf{M}) \quad (2)$$

является функцией Ляпунова, и убывает при движении изображающей точки вдоль детерминированных траекторий автономной системы (1).

Задача поиска оптимального управления ставилась следующим образом: необходимо минимизировать функционал  $\eta = \int_0^{\tau_f} j_s^2(\tau) d\tau$  при начальных условиях:  $\theta(0) = \theta_{01}, \varphi(0) = \varphi_{01}$  и конечных условиях:  $\theta(\tau_f), \varphi(\tau_f) \in L$ . Здесь  $\tau_0 = 0$  и  $\tau_f$ , соответственно, безразмерные начальный и конечный моменты времени,  $\theta_{0i}$ , и  $\varphi_{0i}$  – координаты  $i$ -го устойчивого состояния равновесия, а  $L$  – линия пересечения единичной сферы и окружающей второе устойчивое состояние равновесие поверхности фиксированного уровня магнитной энергии  $E_m(\theta_{02}, \varphi_{02}) < E_m(L) < E_{m\ saddle}$ , где  $E_{m\ saddle}$  – значение магнитной энергии в точке состояния равновесия типа седло (если оно существует), либо на неустойчивом предельном цикле.

### Результаты и обсуждения

Для модели с перпендикулярной анизотропией и  $h_{\perp} = h \sin \psi = 0.9$  были получены оптимальные сигналы переключения с длительностью  $2\tau_{\text{cycl}}$  (рис. 2a),  $8\tau_{\text{cycl}}$  (рис. 2b) и  $20\tau_{\text{cycl}}$  (рис. 2c), выраженной в единицах  $\tau_{\text{cycl}}$ , где  $\tau_{\text{cycl}} = 2\pi/\omega$ ,  $\omega = \text{Im}(\lambda)$ ,  $\lambda$  – собственные числа линеаризованных уравнений движения магнитного момента вблизи устойчивых фокусов. В качестве критерия переключения магнитного момента при поиске оптимального сигнала принималось выполнение условия:  $E_m(\theta, \varphi) \leq E_{m\ saddle} - 0.5 \cdot \Delta E_m$ , где  $\Delta E_m$  – “высота потенциального барьера”  $E_{m\ saddle} - E_m(\theta_{02}, \varphi_{02})$  при  $\mathbf{h} = 0$  и  $j_s = 0$ .

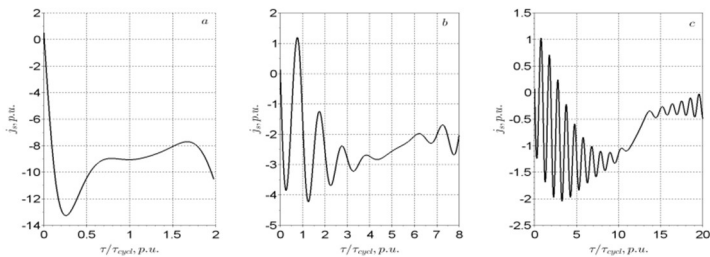


Рис. 2

Анализ полученных зависимостей от времени оптимальных сигналов переключения  $j_s(\tau)$  позволил сделать следующие выводы.

- 4) При длительности сигнала, превосходящей  $\tau_{cycl}$ , оптимальный сигнал переключения может быть разложен на две компоненты: медленную компоненту с характерным временным масштабом порядка длительности сигнала и быстрые осцилляции с длительностью полуволны  $\sim 0.5\tau_{cycl}$ .
- 5) В течение первой фазы сигнала на фоне медленного дрейфа происходят осцилляции, число которых возрастает с увеличением длительности сигнала. На второй фазе быстрые осцилляции происходят с гораздо меньшей амплитудой.

Для модели, изображенной на рис. 1 было произведено сравнение энергии оптимального сигнала с минимальной энергией постоянного переключающего сигнала для разных длительностей этих сигналов. Для длительности сигналов  $\tau_s = 2\tau_{cycl}$  отношение энергий постоянного и оптимального сигналов равно 1.031, для длительности сигналов  $\tau_s = 8\tau_{cycl}$  это отношение равно 1.313 и для длительности сигналов  $\tau_s = 20\tau_{cycl}$  это же отношение равно 1.601. Таким образом, при длительности сигнала, существенно превышающей  $\tau_{cycl}$ , оптимизация формы переключающего сигнала позволяет добиться энергии сигнала переключения, существенно меньшей минимальной энергии постоянного переключающего сигнала.

Для этой же модели получена зависимость энергии оптимального сигнала  $E_{current}$  от величины внешнего магнитного поля  $h_{\perp}$  для сигнала длительностью  $\tau_s = 2\tau_{cycl}$ , см. рис 3. Как видно из этой зависимости энергия оптимального сигнала переключения быстро (по закону, близкому к гиперболическому) возрастает при уменьшении перпендикулярной спин-поляризованному току компоненты внешнего магнитного поля  $h_{\perp} = h \sin \psi$ .

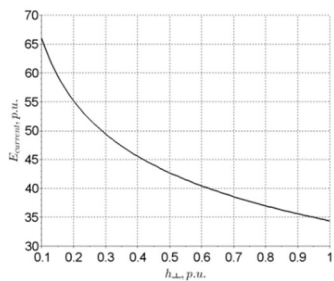


Рис. 3

Вследствие возможности при абсолютной температуре, отличной от нуля, стохастической переориентации микроскопических магнитных моментов ферромагнетика имеет смысл описывать этот процесс путем добавления дополнительного шумового слагаемого в выражение для эффективного поля:  $\mathbf{h}_{eff} \rightarrow \mathbf{h}_{eff} + \tilde{\mathbf{h}}(\tau)$  [4]. Флуктуации  $\tilde{\mathbf{h}}(\tau)$  являются изотропным белым гауссовым шумом с функцией корреляции  $\langle h_i(\tau_1)h_j(\tau_2) \rangle = D_h \delta_{ij} \delta(\tau_2 - \tau_1)$ , где  $D_h = 2\alpha k_B T / M_s^2 V$  – безразмерная интенсивность шума [5],  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\delta(\tau_2 - \tau_1)$  – дельта-функция Дирака,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $V$  – объем магнитного домена, образующего свободный слой.

Для модели с перпендикулярным полем анизотропии при наличии флуктуаций магнитного поля была построена зависимость вероятности  $P$  непереключения магнитного момента (невыхода в область  $E_m = E_{m\ saddle} - 0.5 \cdot \Delta E_m$ ) от времени. На рис. 4 пунктирной линией изображена вероятность невыхода для длительности сигнала  $\tau_s = 2\tau_{cycl}$ , сплошной для  $\tau_s = 8\tau_{cycl}$ , при безразмерной интенсивности шума  $D_h =$ . В этом случае оптимальные сигналы находились при отсутствии флуктуаций, с использованием критерия:

$$E_m(\theta, \varphi) \leq E_{m\ saddle} - 0.99 \cdot \Delta E_m.$$

Проанализировав зависимости на рис. 4 можно сделать вывод о том, что наличие флуктуаций значительно влияет на надежность переключения магнитного момента домена.

### Заключение

В данной работе был произведен поиск оптимального управления переключением бистабильной магнитной ячейки памяти спин-поляризованным током с полем анизотропии, перпендикулярным плоскостям расположения магнитных слоёв. Получена и проанализирована зависимость энергии оптимального сигнала от значения внешнего магнитного поля, перпендикулярного намагнитченности фиксированного слоя. Также исследовано влияние флуктуаций магнитного поля на сохранение эффективности переключения магнитного момента оптимальным сигналом, поиск которого производился в модели без шума и сделан вывод о том, что при наличии флуктуаций оптимальный сигнал переключения должен быть скорректирован.

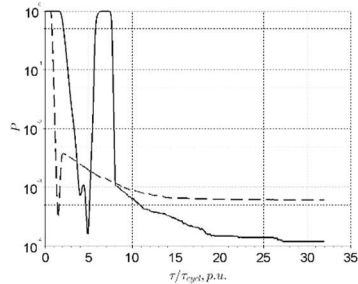


Рис. 4

- [1] YongWang, Fu-ChunZhang // Europhysics Letters. 2013. Vol. 102. P. 47001.
- [2] Slonczewski J. // J. Magn. Magn. Mater. 1996. Vol. 159. P. L1.
- [3] Ostrovskaya N., Skidanov V., Iusipova I., Skvortsov M. // The European Physical Journal Conferences. 2018. Vol. 185. P. 01008.
- [4] Brown W. F. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 1677.
- [5] Siracusano G., Tomasello R. // IEEE Transactions on Magnetics. 2018. Vol. 54. P. 1.

## ИССЛЕДОВАНИЕ синхронизации пачечных колебаний пары взаимодействующих нейроподобных генераторов

А.С. Васин, М.А. Мищенко

ННГУ им. Н. И. Лобачевского

Исследование динамики больших ансамблей нейронов мозга – одна из наиболее трудных, интересных и актуальных проблем современной науки, привлекающая внимание ученых, как в теоретическом плане, так и в области эксперимента. Важным аспектом изучения остаются особенности синхронизации активности нейронов. В данной работе представлены результаты исследования синхронизации пачечных колебаний нейронов. За основу работы выбрана предложенная в работе [1] математическая модель нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром.

Изменение напряжения на выходе полосового фильтра такой системы качественно похоже на динамику мембранного потенциала нейрона. Поскольку подобная система может быть реализована в виде электронного устройства, то исследование проводилось при помощи среды системотехнического моделирования Simulink. Блок-схема генератора представлена на рис.1. Основными элементами системы являются: подстраиваемый автогенератор (Continuous-Time VCO), фазовый дискриминатор (Phase Detector), фильтр (Bandpass Filter). Схема функционирует по следующему принципу. Периодический сигнал с выхода генератора с текущим значением фазы  $\theta_1$  сравнивается на фазовом дискриминаторе с колебаниями опорного сигнала с текущей фазой  $\theta_0$ . В результате чего на выходе ФД формируется сигнал, зависящий от разности фаз  $\phi = \theta_0 - \theta_1$ . Далее сигнал с выхода ФД проходит через фильтр, устраняющий из сигнала высокочастотные компоненты, и поступает на подстраиваемый генератор, где изменяется его частота, в соответствие с частотой опорного сигнала. Математическая модель нейроподобного генератора имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = y, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = z, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial z}{\partial \tau} = \gamma - z(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y,$$

где  $\varphi$  — текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов,  $\gamma$  — начальная частотная расстройка,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — параметры инерционности фильтра. Применительно к динамике нейрона переменную  $y$  можно интерпретировать как описывающую изменение мембранного потенциала, параметры  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  позволяют задавать необходимый динамический режим, а  $\gamma$  оказывает воздействие, сходное с воздействием внешнего тока в модели Ходжкина–Хаксли. При изменении параметров  $\gamma$  и  $\varepsilon_1$  в результате чего имеется возможность регулировать количество импульсов в пачке, интервалы между пачками, амплитуду импульсов.

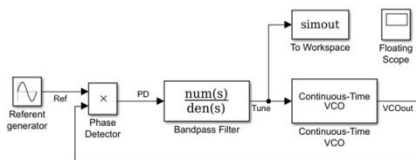


Рис. 1

Для исследования синхронизации пачечных колебаний пары взаимодействующих нейроподобных генераторов между ними устанавливалась однонаправленная импульсная связь (2), адаптированная из работы [2] формула синаптического тока, описывающая взаимодействие двух нейронов Ходжкина-Хаксли.

$$I_{syn} = \frac{d(y_2 - V_{syn})}{1 + \exp(-\frac{y_1 - \theta_{syn}}{k_{syn}})} \quad (2)$$

Здесь индексы “1” и “2” обозначают управляющий (пресинаптический) и управляемый (постсинаптический) нейроны соответственно,  $y_1$  и  $y_2$  – мембранные потенциалы. Воздействие управляющего нейрона на управляемый описывается синаптическим током  $I_{syn}$  в уравнении для потенциала ведомого нейрона. Реверсивный синаптический потенциал для возбуждающей связи  $V_{syn} = 0$ . Последнее означает, что находясь в состоянии покоя, постсинаптический нейрон получает отрицательный синаптический ток. Это увеличивает скорость роста мембранного потенциала и, следовательно, вероятность генерации импульса. Выбор параметров пороговой синаптической функции, задающих ее сдвиг ( $\theta_{syn} = 0.2$ ) и крутизну ( $k_{syn} = 0.01$ ), обеспечивает кратковременный отклик постсинаптического нейрона только на верхушку пресинаптического импульса. Воздействие подпороговых флуктуаций мембранного потенциала ведущего нейрона отсекается.

Путем написания алгоритма автоматического нахождения областей синхронизации, были найдены области для колебаний нейронов с различным количеством импульсов в пачке. Были построены обла-

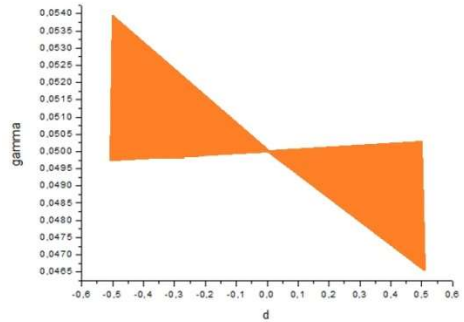


Рис. 2

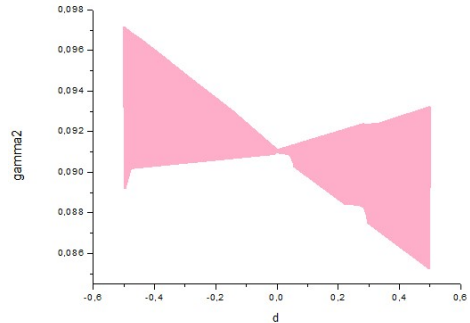


Рис. 3

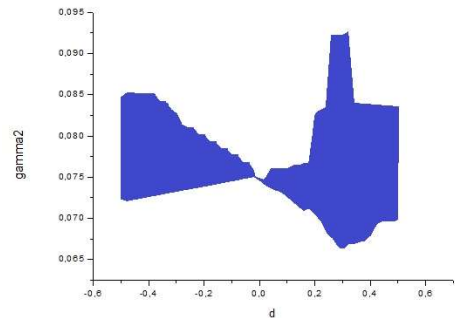


Рис. 4

сти для таких соотношений импульсов в пачке как: один к одному, три к одному и два к трем.

Алгоритм нахождения областей синхронизации состоит в следующем:

- 1) Понять находимся мы в области синхронизации или за ее пределами. Для этого мы считаем относительную разность периодов двух колебаний и соотносим её с эталоном  $\delta$  в данном случае  $\delta=0.001$ . Если разность периодов больше этого значения, то мы находимся вне области синхронизации.
- 2) Если мы находимся в области синхронизации, то мы прибавляем или убавляем  $\gamma$  с каким-либо шагом, в нашем случае  $\gamma = 0.00001$  в зависимости от того какую границу планируем найти, верхнюю или нижнюю.
- 3) Если мы находимся вне области синхронизации, то нам нужно понять в какую сторону двигаться по  $\gamma$ , чтобы найти область синхронизации. Для этого в начальной точке мы считаем относительную разность периодов, делаем шаг по  $\gamma$ , снова её считаем. Затем сравниваем числа, если относительная разность периодов во втором случае меньше, чем в первом, то мы движемся в верном направлении по  $\gamma$ , если наоборот, то нужно двигаться в обратном направлении.

По данному алгоритму была найдена область синхронизации двух нейронов в соотношении между импульсами в пачке два к трем. Алгоритм поиска направления движения по  $\gamma$  в случае, когда мы находимся вне области синхронизации строился на анализе бифуркационных диаграмм, полученных ранее областей. Бифуркационные диаграммы для соотношения между импульсами в пачке один к одному и три к одному при фиксированной силе связи  $d = 0,2$  представлены на рис. 5 и рис. 6.

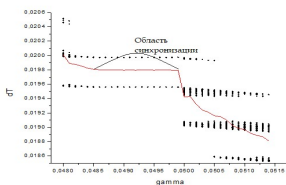


Рис. 5

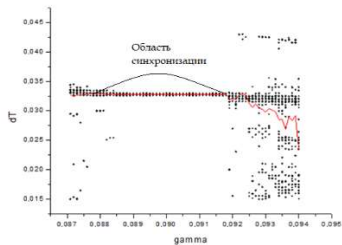


Рис. 6

В данной работе рассмотрена динамика пары нейроподобных генераторов, связанных однонаправленной импульсной связью, имитирующей синаптическое воздействие. Найдены области синхронизации для нейронов с различным типом пачечной активности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23001 мк и Гранта Президента НШ-2653.2020.2.

- [1] Мищенко М.А. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 5 (3). С. 279.
- [2] Симонов А.Ю., Гордлеева С.Ю., Писарчик А.Н., Казанцев В.Б. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, №. 10. С. 707.

## КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ДИССИПАТИВНОГО КВАНТОВОГО ХАОСА ПО СТАТИСТИКЕ ВРЕМЕН МЕЖДУ КВАНТОВЫМИ СКАЧКАМИ

И.И. Юсипов, М.В. Иванченко

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Количественная оценка режимов, возникающих в открытых квантовых системах, представляет собой проблему, интересную в нескольких отношениях. В частности, это может помочь связать неравновесные квантовые явления с проявлениями классического диссипативного хаоса, такими как локальная неустойчивость, бифуркации, странные аттракторы.

В нашей недавней работе [1] мы предложили квантовое обобщение старшего показателя Ляпунова – наиболее популярного и мощного средства количественной оценки классического хаоса [2]. Старший показатель Ляпунова является отличным инструментом для теоретического и численного анализа хаотической динамики квантовой системы, но их экспериментальная реализация остается нетривиальной задачей. В данной работе ставится вопрос об обнаружении квантового хаоса в реальном физическом эксперименте. Мы продемонстрируем, что переходы «хаос-регулярность» можно обнаружить, изучив статистику времен между последовательными излучениями фотонов, которые в квантовой оптике называются «распределения времени ожидания фотона» [3, 4].

На примере простой модели открытой периодически модулируемой квантовой системы будет продемонстрировано, что переходы от регулярных к хаотическим режимам (заранее определенным в терминах старшего показателя Ляпунова) соответствуют переходам от экспоненциального распределения времени ожидания фотона к распределениям с промежуточным степенным масштабированием. Поскольку события эмиссии фотонов могут быть детектированы в эксперименте при помощи однофотонных детекторов [5], можно добиться различия между хаотическим и регулярным режимами без нарушения динамики системы.

В качестве модели рассматривается фотонную моду в негерметичном резонаторе с утечкой, периодически модулируемую внешним когерентным электромагнитным полем [6]. Унитарная динамика определяется гамильтонианом:

$$H(t) = \frac{1}{2}\chi\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + iF(t)(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}), \quad (1)$$

где  $\chi$  – сила взаимодействия между фотонами,  $\hat{a}^{\dagger}$  и  $\hat{a}$  – операторы рождения и уничтожения фотонов,  $F(t) = F(t + T)$  – периодическая модуляция. В модели используется кусочно-постоянная функция модуляции с периодом  $T$ :  $F(t) = A$  внутри интервала  $0 < t < T/2$  и  $F(t) = 0$  во второй половине периода  $T/2 < t < T$ . Эволюция открытой квантовой системы описывается уравнением Линдблада [7]:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_t(\rho) = -i[H(t), \rho] + \gamma \left( V\rho V^{\dagger} - \frac{1}{2}\{V^{\dagger}V\rho\} \right), \quad (2)$$

где первое слагаемое в правой части отвечает за унитарную эволюцию системы с гамильтонианом (1), второе слагаемое отвечает за взаимодействие с окружающей



средой с константой диссипативной связи  $\gamma$ . Эмиссия фотона из резонатора осуществляется посредством диссипативного оператора:

$$V = \hat{a} \quad (3)$$

Параметрами системы были выбраны значения  $\chi = 0.008$ ,  $\gamma = 0.05$ ,  $N = 100$ .

Для решения уравнения (2) использовался метод квантовых траекторий [8], позволяющий описать эволюцию модельной системы в терминах ансамбля чистых состояний  $\psi(t)$ , управляемого неэрмитовым гамильтонианом:

$$i\dot{\psi}(t) = H\psi - \frac{i}{2}V^\dagger V\psi \quad (4)$$

Норма волновой функции убывает согласно следующему закону:

$$\frac{d}{dt} \|\psi\| = -\psi^* V^\dagger V \psi \quad (5)$$

до тех пор, пока не достигнет порогового значения  $\eta$  – случайно выбранного числа из интервала  $[0; 1]$ . Затем выполняется квантовый скачок, и норма волновой функции сбрасывается  $\|\psi(t)\| = 1$ . После этого возобновляется непрерывная эволюция в соответствии с уравнением (4) до следующего квантового скачка. Квантовый скачок в рассматриваемой модели соответствует излучению одиночного фотона, который может быть зарегистрирован однофотонным детектором [3].

Согласно работе [6] для данной модели можно получить среднеполевое приближение для следующей наблюдаемой:

$$\xi(t) = \langle \psi^\dagger(t) | \hat{a} | \psi(t) \rangle \quad (6)$$

Состояние среднеполевой модели описывается двумя фазовыми переменными  $\{Re(\xi), Im(\xi)\}$  в соответствии с уравнением:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\gamma\xi + F(t) - i\chi|\xi|^2\xi \quad (7)$$

Данная система (7) является нелинейной и периодически модулируемой во времени и, как ожидается, демонстрирует спектр различных асимптотических режимов, от периодических орбит до хаотических аттракторов.

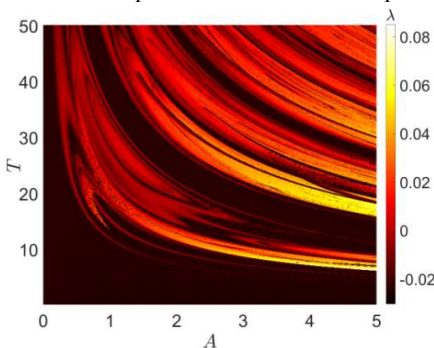


Рис. 1

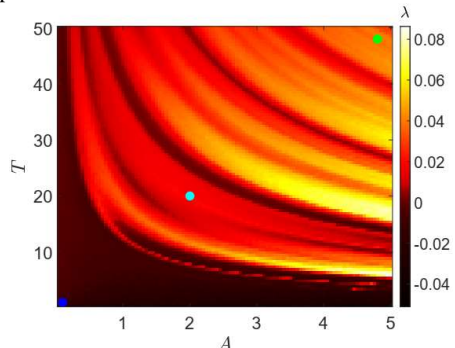


Рис. 2

Чередование различных режимов в модели иллюстрируется картой старшего показателя Ляпунова в зависимости от периода  $T$  и амплитуды модуляции  $A$ , изображенной на рис. 1.

Для квантовой модели (1-3) был вычислен квантовый старший показатель Ляпунова [1], в том же диапазоне параметров модуляции (рис. 2). Обе модели (среднеполевая и квантовая) демонстрируют визуально сходные структуры регулярного и хаотического режимов.

Квантовый старший показатель Ляпунова является хорошим инструментом для теоретического и численного анализа, но его экспериментальная оценка весьма нетривиальна. Ставится вопрос о возможности получения информации о динамике внутри резонатора из того, что доступно в реальном эксперименте. Статистика излучения фотонов из резонатора является одной из самых популярных характеристик в квантовой оптике [5]. Кроме того, в модельной системе (1-3) существует только один диссипативный канал, и один квантовый скачок соответствует излучению одного фотона, так что динамика внутри резонатора и излучение фотона тесно связаны.

В работе [9] подробно исследуется статистика времен между двумя последовательными излучениями фотонов. Ключевое наблюдение состоит в том, что распределение данной статистики становится отличным от распределения Пуассона и приобретает степенное промежуточное масштабирование, когда старший квантовый показатель Ляпунова становится положительным. На плоскости параметров периода  $T$  и амплитуды модуляции  $A$  осуществлялось приближение распределения времен между двумя последовательными скачками методом линейной регрессии на логарифмических шкалах. На рис. 3 изображена диаграмма показателя степени  $\alpha$  данного приближения на плоскости параметров  $A$  и  $T$ . Качество линейной регрессии определялось коэффициентом детерминации [10]. В случае недостаточной достоверности линейного приближения, что соответствует случаю распределения Пуассона, показатель  $\alpha$  принимается равным нулю (черные области на рис. 3). Области, в которых присутствует степенная асимптотика в распределении времен между квантовыми скачками, хорошо коррелируют с областями, в которых старший квантовый показатель Ляпунова положителен (рис. 2).

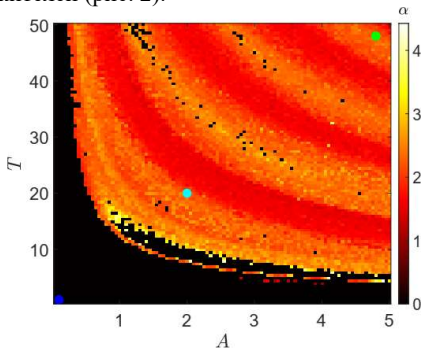


Рис. 3

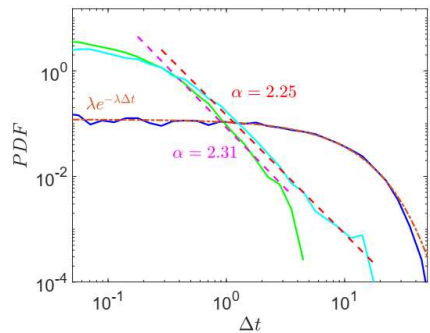


Рис. 4

На рис. 4 изображены примеры плотности распределения (PDF) времен между квантовыми скачками для параметров  $A = 0.1$ ,  $T = 10$  (синяя линия – распределение Пуассона);  $A = 2.3$ ,  $T = 23$  и  $A = 4.8$ ,  $T = 48$  (бирюзовая и зеленая линии соответственно – наличие степенной асимптотики с определенным показателем  $\alpha$ ). Данные значения параметров отмечены точками соответствующего цвета на рис. 2 и рис. 3.

В данной работе было обнаружено, что в модели фотонного резонатора с нелинейностью Керра в хаотическом режиме появляется промежуточная степенная статистика в распределении времен между последовательными излучениями фотонов. На основе этого явления был предложен способ обнаружения диссипативного квантового хаоса в реальном физическом эксперименте (анализ статистики времен излучения фотонов). Данный подход открывает новую перспективу для количественного определения хаотических и регулярных режимов, возникающих в открытых квантовых системах, таких как квантовая электродинамика, квантовая оптика и поляритонные устройства, где статистика испускания фотонов является признанным и традиционным инструментом.

- [1] Yusipov I. I., Vershinina O.S., Denisov S., Kuznetsov S.P., Ivanchenko M.V. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, №. 6. P. 063130.
- [2] Pikovsky A., Politi A. *Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics*. – Cambridge University Press, 2016.
- [3] Carmichael H. J. // *Lecture notes in physics*. 1993. Vol. 18.
- [4] Brange F., Menczel P., Flindt C. // *Physical Review B*. 2019. Vol. 99, №. 8. P. 085418.
- [5] Delteil A., Gao W. B., Fallahi P., Miguel-Sanchez J., Imamoğlu A. // *Physical review letters*. 2014. Vol. 112, №. 11. P. 116802.
- [6] Bohrdt A., Mendl C. B., Endres M., Knap M. // *New Journal of Physics*. 2017. Vol. 19, №. 6. P. 063001.
- [7] Breuer H. P., Petruccione F. *The theory of open quantum systems*. – Oxford University Press on Demand, 2002.
- [8] Dum R., Zoller P., Ritsch H. // *Physical Review A*. 1992. Vol. 45, №. 7. P. 4879.
- [9] Yusipov I. I., Vershinina O. S., Denisov S. V., Ivanchenko M. V. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020. Vol. 30, №. 2. P. 023107.
- [10] Draper N. R., Smith H. *Applied regression analysis*. – John Wiley & Sons, 1998.

## СРЕДНЕПОЛЕВАЯ ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНОЙ ПОПУЛЯЦИИ ТЕТА НЕЙРОНОВ

Д.А. Злобин, В.В. Клиньшов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Работа посвящена исследованию среднеполевой динамики неоднородной популяции тета нейронов. Модель тета нейрона представляет собой динамическую систему на окружности, динамика которой определяется следующим уравнением [1]  $\frac{d\theta}{dt} = (1 - \cos(\theta)) + (1 + \cos(\theta))D$ . Здесь  $\theta$  – фаза нейрона, изменяющая в интервале от 0 до  $2\pi$ ,  $D$  – внешнее воздействие. Когда фаза нейрона достигает значения  $\pi$ , нейрон генерирует потенциал действия.

Рассмотрим неоднородную популяцию тета нейронов со связями каждого с каждым, динамика которой описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\frac{d\theta_j}{dt} = (1 - \cos(\theta_j)) + (1 + \cos(\theta_j))(\eta_j + I(t) + Js(t)) \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{t_k^p} \delta(t - t_k^p) \quad (2)$$

Здесь  $\theta_j$  – фаза  $j$ -го нейрона,  $\eta_j$  – различающая компонента внешнего воздействия,  $N$  – количество нейронов,  $J$  – сила связи,  $s(t)$  – нормированный выходной сигнал всей сети на  $N$ ,  $\delta(t)$  – дельта функция Дирака,  $t_k^p$  – моменты генерации спайков  $k$ -м нейроном. При генерации спайка любым нейроном происходит активация синапсов, и в каждый из нейронов сети инжектируется импульс тока амплитудой  $\frac{J}{N}$ , что приводит к мгновенному изменению его состояния.

Выведем уравнения для макроскопической динамики сети. Для этого рассмотрим сеть в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Введем такие понятия, как плотность распределения фазы нейрона  $\rho(\theta|\eta, t)$  и плотность распределения параметра  $g(\eta)$ . Плотность распределения удовлетворяет уравнению непрерывности  $\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho(\theta)f(\theta))$ . Здесь  $f(\theta)$  – правая часть уравнения (1), представленная в виде  $f(\theta) = \Omega(\eta, t) + Im(H(\eta, t)e^{-i})$ . Где  $\Omega(\eta, t) = 1 + I(t) + \eta + Js(t)$ ,  $H(\eta, t) = i(-1 + I(t) + \eta + Js(t))$ . Решение уравнения непрерывности будем искать в следующем виде [3]:

$$\rho(\theta|\eta, t) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \left( \sum \alpha(\eta, t)^n e^{in\theta} + c.c \right) \right). \quad (3)$$

Здесь  $\alpha(\eta, t)$  представляет собой комплексный параметр порядка, определяющий вид функции  $\rho(\theta|\eta, t)$ .

Подставляя (3) в уравнение непрерывности, для гармоник  $e^{i\theta}$  получаем уравнение для  $\alpha(\eta, t)$  в виде  $\dot{\alpha}(\eta, t) = -i\alpha(\eta, t)\Omega + \frac{i}{2}(H^* - H\alpha(\eta, t)^2)$ . Подставляя  $\Omega$  и  $H$  в полученное уравнение, получаем:

$$\dot{\alpha}(\eta, t) = -i\alpha(\eta, t)(1 + I + Js(t) + \eta) - \frac{1}{2}(-1 + I + Js(t) + \eta)(-\alpha(\eta, t)^2). \quad (4)$$

Теперь вычислим выходной сигнал сети  $s(t)$ . В термодинамическом пределе он равен мгновенной средней частоте генерации спайков всеми нейронами. Средняя частота генерации спайков  $r(\eta, t)$  нейронами с параметром  $\eta$  в момент  $t$  равная потоку через пороговое значение фазы  $\pi$ :

$$r(\eta, t) = f(\pi)\rho(\pi|\eta, t) = \frac{1}{\pi} \left( 1 + 2Re \frac{\alpha(\eta, t)}{1 - \alpha(\eta, t)} \right). \quad (5)$$

Средняя частота генерации спайков для всех нейронов популяции определяется следующим интегралом:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\eta, t)g(\eta)d\eta. \quad (6)$$

Система уравнений (5)-(6) представляет собой систему интегродифференциальных уравнений, которая полностью описывает сеть в термодинамическом пределе для любого распределения  $g(\eta)$ .

Однако наиболее эффективен подход в случае Лоренцева распределения:  $g(\eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{(\eta - \bar{\eta})^2 + \Delta^2}$ , где  $\Delta$  – полуширина,  $\bar{\eta}$  – центр распределения. Подставим  $g(\eta)$  в представленном виде в уравнение (6) и получим интеграл, который берется с помощью теории вычетов, предполагается аналитичность функции  $\alpha(\eta, t)$ . Получаем следующее выражение для частоты генерации спайков  $s(t) = r(\bar{\eta} - i\Delta, t) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \beta(t)\beta(t)^*}{1 + \beta(t)(1 + \beta(t)^*) + \beta(t)} \right)$ , где  $\beta(t) = \alpha(\bar{\eta} - i\Delta, t)$ .

Далее, записав уравнения (5) для  $\eta = \bar{\eta} - i\Delta$ , получим:

$$\dot{\beta}(t) = -i\beta(t)(1 + D) - \frac{1}{2}(-1 + D)(1 - \beta(t)^2). \quad (7)$$

Здесь  $D = I + \bar{\eta} + Js(t)$ . Делая замену  $\beta = Re^{-i}$  и разделяя мнимую и действительную части, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R} = & -\Delta R - \frac{1}{2}R^2((D - 1)\sin\psi + \Delta\cos\psi) \\ & - \frac{1}{2}(\Delta\cos\psi - (D - 1)\sin\psi) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} = & 1 + D + \frac{1}{2}R((D - 1)\cos\psi - \Delta\sin\psi) \\ & + \frac{1}{2R}((D - 1)\cos\psi + \Delta\sin\psi). \end{aligned} \quad (9)$$

Частота  $s(t)$  определяется следующим уравнением:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - R^2}{1 + 2R\cos\psi + R^2}. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9), (10) представляют собой замкнутую систему уравнений, которая полностью описывает макроскопическую динамику популяции тета нейронов при  $N \rightarrow \infty$ . Таким образом, система из  $N$  уравнений (1) сводится к редуцированной системе двух дифференциальных уравнений.

Мгновенные значения параметров порядка  $R$  и  $\psi$  позволяют получить распределение фаз всех нейронов популяции, которое имеет вид:

$$\rho(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - R^2}{1 - 2R\cos(\theta - \psi) + R^2}. \quad (11)$$

Для проверки корректности и точности редуцированной системы (8)-(9) было проведено сравнение ее динамики с динамикой полной системы (1). Ниже приведены результаты, полученные при следующих значениях параметров:  $J=15$ ,  $N=3000$ ,  $T=120$ ,  $dt=0.001$ . Внешнее воздействие  $I(t)$  выбиралось в виде представленном на нижнем графике рис. 1. Значение параметра  $\eta$  для каждого нейрона было сгенерировано из распределения Лоренца, используя формулу  $\eta_j = \bar{\eta} + \Delta \left[ \frac{\pi}{2} \frac{2j-N-1}{N+1} \right]$  с полушириной  $\Delta=1$  и центром  $\bar{\eta}=-5$ .

Для сравнения динамики полной сети и редуцированной системы были построены осциллограммы частот генерации спайков  $s(t)$ , результат представлен на верхнем графике рис. 1.

Также был построен график распределения фаз полной сети в фиксированные моменты времени  $t$  и произведено сравнение с предсказанием редуцированной системы уравнения (11), результат представлен на правом графике рис. 2.

Для численной оценки точности редуцированной системы была введена ошибка  $E_r = \frac{\int (s(t) - s_r(t))^2 dt}{T}$ . Здесь  $s(t)$  – средняя частота генерации спайков сети тета нейронов,  $s_r(t)$  – средняя частота генерации, предсказанная редуцированной системой,  $T$  – общее время интегрирования. График ошибки  $E_r$  представлен на левом графике рис. 2.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что редуцированная система (8)-(9) достаточно точно воспроизводит макроскопическую динамику сети тета нейронов (1) в термодинамическом пределе. Точность редуцированной системы возрастает с увеличением размера сети.

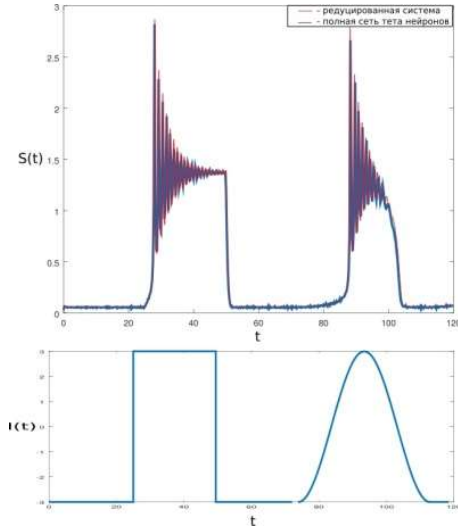


Рис. 1

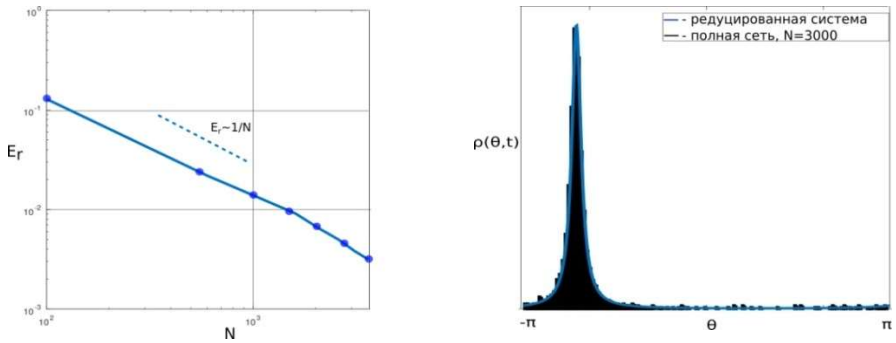


Рис. 2

- [1] Ermentrout B., Kopell N. // Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation. SIAM J. Appl. Math. 46, 233 (1986).
- [2] Montbrio E., Paz'ó D., Roxin A. // Macroscopic Description for Networks of Spiking Neurons. PHYSICAL REVIEW X5,021028 (2015).
- [3] Ott E., Antonsen T. M. // Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. Chaos 18,037113 (2008).

Секция «Фундаментальные и прикладные задачи теории нелинейных колебаний»

Заседание секции проводилось 26 мая 2020 г.  
Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.