

Труды XXV научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»**

Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

РЕЖИМЫ НЕЙРОНОПОДОБНОЙ АКТИВНОСТИ В АНСАМБЛЕ ФАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ТОРМОЗЯЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.Е. Емелин, Т.А. Леванова, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Известно, что жизненно важные функции животных и человека, такие как сердцебиение, дыхание и двигательная активность, регулируются т.н. центральными генераторами ритмов (ЦГР) - замкнутыми контурами в нервной системе, которые могут генерировать основные ритмические паттерны без сенсорной обратной связи или внешнего стимула. Основной составляющей ЦГР являются полуцентры, которые представляют собой два взаимно связанных нейрона, которые могут генерировать базовые паттерны нейронной активности [1].

В данной работе предложена новая простая модель полуцентра, которая представляет собой два фазовых элемента, связанных химическими тормозящими связями:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \gamma_1 - \sin \varphi_1 - dI(\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 = \gamma_2 - \sin \varphi_2 - dI(\varphi_1) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь φ_i – переменная, соответствующая фазе i -ого элемента. Параметр γ_i определяет тип поведения изолированного нейрона: при $\gamma < 1$ элемент является возбудимым, при $\gamma > 1$ генерирует тонические спайки. Функция $I(\varphi_i)$ симулирует передачу сигнала от пресинаптического элемента к постсинаптическому следующим образом:

$$I(\varphi) = \frac{1}{1 + e^{k(\cos(\sigma) - \sin(\varphi))}} \quad (2)$$

Параметр σ определяет длительность тормозящего воздействия пресинаптического элемента на постсинаптический, а параметр k – время переключения воздействия. Таким образом, когда фаза активного пресинаптического элемента принимает значения из отрезка $\left[\frac{\pi}{2} - \sigma, \frac{\pi}{2} + \sigma\right]$, осуществляется тормозящее воздействие на соответствующий постсинаптический элемент. Параметр d задает силу химической тормозящей связи. Функция такого вида была впервые введена в работе [2].

Были исследованы случаи идентичных и неидентичных элементов ансамбля. В обоих случаях численное исследование проводилось относительно параметров силы связи d и длительности тормозящего воздействия σ .

В случае идентичных элементов ансамбля параметры γ_i были выбраны одинаковыми и чуть большими единицы ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1.01$). Для этого случая с помощью численных и аналитических методов была построена карта режимов нейронодобной активности (см. рис. 1). Было показано, что рассматриваемая система демонстрирует мультистабильность, т.е. в ее фазовом пространстве одновременно сосуществует несколько устойчивых притягивающих множеств, и в зависимости от выбранных начальных условий фазовая точка оказывается притянута к одному из них, что соответствует реализации одного из возможных режимов. Для корректной работы с этим явлением при построении карт режимов использовался метод протягивания по начальным условиям.

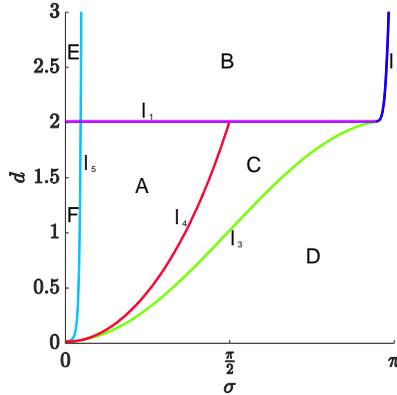


Рис. 1

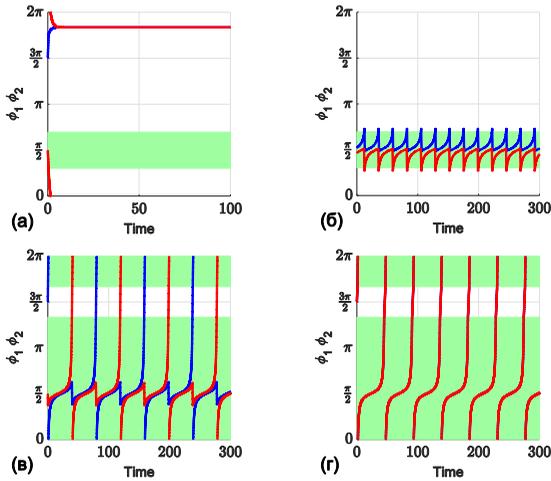


Рис. 2

В результате были обнаружены четыре основных режима, а именно режимы молчания (отсутствия колебательной активности), подпороговых колебаний, синфазных и противофазных колебаний. Области устойчивости этих режимов отмечены на рис. 1. В области А наблюдаются режимы молчания и подпороговые колебания, в области В – синфазные, противофазные и подпороговые колебания, в области С – синфазные, противофазные, подпороговые колебания и режим молчания, в области D – синфазные и противофазные колебания, E – синфазные и противофазные колебания, F – режим молчания. Бифуркационные переходы между областями отмечены линиями

различных цветов: кривые l_1, l_2, l_3, l_5 соответствуют седлоузловой бифуркации, а кривая l_4 - гетероклинической бифуркации.

На рис. 2 предоставлены примеры временных реализаций различных режимов нейроноподобной активности, такие, как режим молчания (а), режим подпороговой активности (б), противофазные колебания (в) и синфазные колебания (г).

Для создания более биологически правдоподобной модели была введена неидентичность между элементами ансамбля:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma \\ \gamma_2 = \gamma + \Delta \end{cases}$$

Здесь $\gamma = 1.01$, а неидентичность между элементами задается параметром Δ .

Далее при различных фиксированных параметрах Δ численно были построены карты режимов синхронизации (см. рис. 4). Темно-красная область соответствует режиму молчания (отсутствия колебаний). Красная область соответствует режиму, когда второй элемент подавляет активность первого элемента. Широкие области, отмеченные другими цветами, соответствуют различным режимам синхронизации между элементами. Узкие области разных цветов соответствуют квазипериодическим режимам. Подробнее это можно видеть на рис. 5, где представлены числа вращения, которые вычислялись для каждой из трех карт при фиксированном значении параметра $\sigma = \frac{\pi}{2}$.

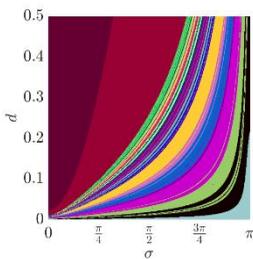


Рис. 4.1

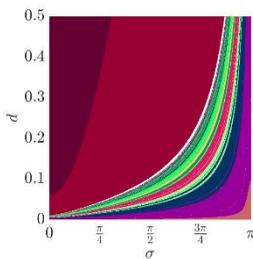


Рис. 4.2

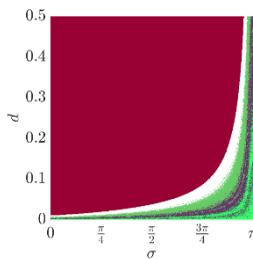


Рис. 4.3

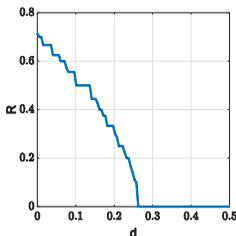


Рис. 5.1

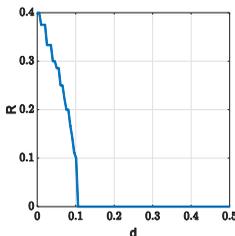


Рис. 5.2

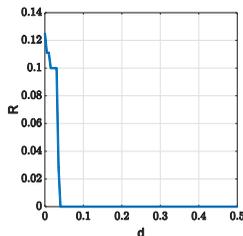


Рис. 5.3

Как видно на рис. 4, при малом значении параметра неидентичности $\Delta = 0.01$ (рис. 4.1), большая часть карты покрыта областями различных синхронизаций. Оставшуюся часть делят между собой режим молчания и режим синхронизации 0:1. При увеличении параметра неидентичности до значения $\Delta = 0.05$ (рис. 4.2), видно, что область синхронизации 0:1 начинает расширяться. Наконец, при достаточно большом значении параметра неидентичности $\Delta = 0.5$ (рис. 4.3), в большом диапазоне значений параметров σ и d происходит подавление активности первого элемента вторым. Примеры временных реализаций различных синхронных режимов представлены на рис. 6.

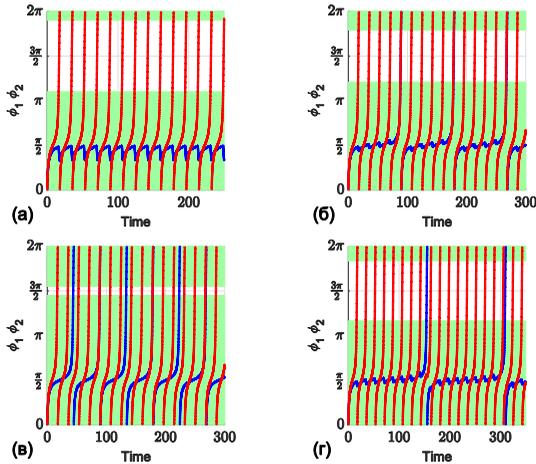


Рис. 6

Таким образом, в данной работе была предложена и исследована новая модель полуцентра. Для случая идентичных элементов построены карты режимов нейронно-подобной активности и определены бифуркационные переходы между ними. Для случая неидентичных элементов изучены синхронные режимы, возникающие при разрушении симметрии в системе.

Исследование поддержано Министерством науки и высшего образования, проект № 0729-2020-0026.

- [1] Brown T.G. // Proceedings of the Royal Society of London. Series B, containing papers of a biological character. 1911. Vol. 84, № 572. P. 308.
- [2] Korotkov A.G., Levanova T.A., Zaks M.A., Osipov G.V. // arXiv:2011.04634 [math.DS].

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ КОРОНАВИРУСНОЙ ИНФЕКЦИИ В РАМКАХ МОДЕЛИ SIR-ТИПА

Н.А. Гусарова¹), В.Б. Казанцев^{1, 2, 3)}, Е.В. Панкратова¹⁾

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Университет Иннополис

³⁾ Самарский государственный медицинский университет

Первые случаи заражения новой коронавирусной инфекцией были выявлены в китайской провинции Хубэй в конце декабря 2019 года. Спустя месяц, в конце января 2020 года были зафиксированы первые заболевшие и в России. Начиная с этого времени, случаи заражения новой инфекцией регистрировались по всей стране, и на 16 апреля не осталось ни одного региона, где бы не было жителей, инфицированных вирусом SARS-CoV-2, способного вызывать опасное инфекционное заболевание COVID-19. В Нижегородской области первый случай заражения этой инфекцией был выявлен в начале марта 2020 года. Следует отметить, что из-за высокой степени развития эпидемического процесса уже 11 марта всемирная организация здравоохранения объявила о пандемии. В связи с этим, в настоящее время значительное развитие получило направление нелинейной динамики, связанное с математическим моделированием особенностей распространения инфекционных заболеваний. Основной целью работ в данном направлении является построение прогнозов дальнейшего распространения вируса SARS-CoV-2, изучение роли различных социально-поведенческих особенностей населения, погодных условий, введения различных административных ограничительных мер и других факторов.

В данной работе проведено изучение математических моделей, используемых в настоящее время для описания распространения вируса SARS-CoV-2. Как показало исследование этого вопроса, в основе моделирования, проводимого авторами многих работ, лежит так называемая SIR-модель [1], учитывающая разделение рассматриваемой популяции на три основных класса: класс S включает восприимчивых людей, способных заразиться инфекцией; класс I – это инфицированные люди, способные распространять заболевание внутри рассматриваемой популяции; класс R используется для обозначения индивидуумов, не распространяющих инфекцию, то есть людей, которые были заражены и выбыли из класса инфицированных. Однако следует отметить, что в рамках использования классической SIR-модели невозможно получить мультипиковое распределение инфицированных, наблюдающееся к настоящему времени практически во всех регионах мира. Так, на рис. 1 точками представлены данные о ежедневном изменении числа инфицированных в Нижегородской области на интервале времени с 12 марта 2020 года по 3 мая 2021 года (за 418 дней), а кривая – это результат, полученный в результате моделирования с использованием классической SIR-модели.

Отсутствие возможности описать такое мультипиковое распределение привело к появлению ряда новых модификаций модели SIR-типа [2, 3]. В частности, на рис. 2 на те же данные наложена кривая, полученная с помощью модели, недавно предложенной в работе [4]. В рамках данной модели восприимчивая группа людей делится на три подгруппы: (i) людей, игнорирующих необходимость соблюдения каких-либо профилактических мер, а потому живущих без каких-либо ограничений, как это было

и до пандемии, (ii) сознательных людей, строго выполняющих правила социального дистанцирования, чтобы избежать опасности инфицирования и (iii) людей, уставших от ограничений. В основе необходимости рассмотрения такого разделения рассматриваемой популяции лежит теория социального стресса, разработанная Г. Селье [5], и учитывающая три основных стадии поведения человека, вызванные каким-либо долготочным его напряженным состоянием.

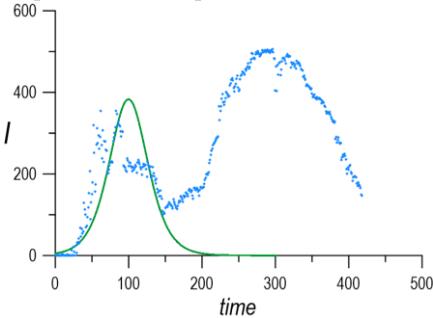


Рис. 1

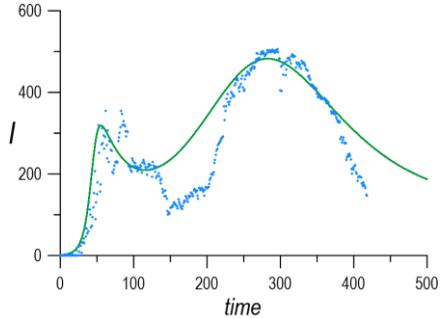


Рис. 2

Действительно, COVID-19, обернувшийся всемирной проблемой, в результате которой были закрыты многие границы и введены экстренные меры безопасности (карантин, строгая изоляция и так далее), способный провоцировать не только обострения в течение болезни, но и различные опасные недуги уже после исчезновения признаков респираторного заболевания, сегодня является одним из основных факторов стресса в обществе. Поэтому, как показывают полученные результаты, теория социального стресса может эффективно быть использована при математическом моделировании условий агрессивного распространения вируса SARS-CoV-2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-04-60078).

- [1] Kermack W.O., McKendrick A.G. // Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. 1927. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. Vol. 115. P. 700.
- [2] Huang J., Qi G. // Effects of control measures on the dynamics of COVID-19 and double-peak behavior in Spain. Nonlinear Dynamics. 2020. P. 1.
- [3] Lux T. // The social dynamics of COVID-19. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2021. Vol. 567. P. 125710.
- [4] Kastalskiy I.A., Pankratova E.V., Kazantsev V.B., Gorban A.N. // Social stress drives the multi-wave dynamics of COVID-19 outbreaks. 2021.(submitted).
- [5] Selye H. // The general adaptation syndrome and the diseases of adaptation. The journal of clinical endocrinology. 1946. Vol. 6. P. 117.

АНАЛИЗ МИТОХОНДРИАЛЬНО-ЯДЕРНЫХ ГЕНЕТИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ: ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНОВ АДАПТАЦИИ К ХОЛОДУ

А.И. Калякулина, М.В. Иванченко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Митохондриально-ядерное взаимодействие можно считать одним из наиболее успешных примеров мутуализма. Митохондрии и ядро 999 взаимодействуют друг с другом, чтобы обеспечить оптимальную клеточную функцию, а часть митохондриальных белков кодируется в ядре [1]. Коэволюция митохондриального и ядерного геномов происходила на протяжении 1.5 млрд лет, и различные митохондриально-ядерные взаимодействия могут способствовать адаптации организмов к изменяющейся окружающей среде [2]. Исследования показывают, что мутации в ядерной ДНК (ядДНК) могут влиять на мутации в митохондриальной ДНК (мтДНК) [3]. Однако поиск мтДНК-ядДНК взаимодействий сталкивается со статистической и вычислительной проблемой для проверки огромного количества пар мутаций.

В данной работе мы проводим поиск статистически значимых мтДНК-ядДНК взаимодействий в популяциях европейского происхождения из разных биогеографических и климатических областей с помощью машинного обучения. Мы проанализировали подмножество из 28 ядерных генов [4], участвующих в адаптации к холоду, а также все митохондриальные гены. Мы выбрали репрезентативные популяции европейского происхождения из разных широт из набора данных проекта 1000 геномов [5]. Были рассмотрены генетические варианты для 297 субъектов из трех популяций (GBR – британцы в Англии и Шотландии, FIN – финны в Финляндии, TSI – тосканцы в Италии).

Чтобы выявить связанные с адаптацией к холодным климатическим условиям мтДНК-ядДНК взаимодействия, мы определили признаки, получившие высокие оценки важности при классификации популяций методами машинного обучения, и имели более высокую точность, чем классификаторы, основанные исключительно на митохондриальных или ядерных геномах. На первом этапе мы отфильтровали те однонуклеотидные варианты в рассматриваемых генах, которые не различались у всех испытуемых. Учитывая все оставшиеся комбинации, рассмотрение всех пар по-прежнему представляет проблему огромной размерности.

Чтобы еще больше уменьшить общее количество рассматриваемых комбинаций, мы разработали вычислительную процедуру для сопоставления оценок с конкретным митохондриальным или ядерным геном или парой генов. Рассматривая только митохондриальную ДНК и фиксируя определенную популяцию в качестве референсной, мы вычислили среднюю частоту каждого варианта (0 или 1) для каждого гена. Затем для каждого субъекта в каждой популяции и каждого гена N мы рассчитали показатель частоты как среднее расстояние от эталонной популяции. Мы использовали тот же подход для ядерной ДНК, учитывая три варианта (0|0, 0|1 или 1|0, 1|1), и для комбинаций, учитывая шесть вариантов (0+0|0, 0+0|1 или 0+1|0, 0+1|1, 1+0|0, 1+0|1 или 1+1|0, 1+1|1). В результате размер данных для каждого субъекта был уменьшен до количества митохондриальных или ядерных генов или их произведения. Полученные

частотные показатели рассматривались как признаки алгоритма случайного леса при исследовании моделей бинарной классификации между каждой парой популяций [6].

Мы определили гены и пары генов с популяционно-специфическими мутациями как те, которые присутствуют во всех результирующих списках, которые были получены для данной популяции. Например, для GBR это пересечение списков характеристик для следующих классификаторов: GBR (референсный) vs FIN (целевой), GBR (референсный) vs TSI (целевой), FIN (референсный) vs GBR (целевой), TSI (референсный) vs GBR (целевой).

Мы начали с исследования принципиальной возможности классификации трех рассматриваемых популяций европейского происхождения с помощью алгоритма построения случайного леса для митохондриальных, ядерных генов и их пар.

Табл.

Референс \ Цель	GBR	FIN	TSI
GBR		мтДНК: 66.84% ядНК: 64.21% мтДНК-ядНК: 73.15%	мтДНК: 61.28% ядНК: 59.57% мтДНК-ядНК: 70.18%
FIN	мтДНК: 66.84% ядНК: 66.31% мтДНК-ядНК: 72.10%		мтДНК: 75.23% ядНК: 75.71% мтДНК-ядНК: 75.76%
TSI	мтДНК: 61.31% ядНК: 60.78% мтДНК-ядНК: 69.28%	мтДНК: 74.78% ядНК: 75.69% мтДНК-ядНК: 75.80%	

Для всех пар популяций комбинации митохондриальной и ядерной ДНК показали лучшие результаты классификации, чем комбинации, основанные исключительно на мтДНК или яДНК. В частности, максимальное повышение точности наблюдалось для классификации GBR-TSI. Популяции FIN и TSI продемонстрировали наибольшую точность классификации во всех случаях, что предположительно является результатом их более глубоких генетических различий и географической удаленности.

Затем мы исследовали характеристики, используемые различными классификаторами случайного леса для каждой популяции, чтобы получить списки генов, которые идентифицируют популяцию по сравнению с другими. 10 митохондриальных популяционно-специфических генов оказались общими для рассматриваемых популяций (ATP6, ND5, CYB, CO1, CO3, ND3, ND2, ND1, ND6, ND4). Также общими являются три ядерных гена (PDRM16, LEPR и DIO2); гены PPPARG и NRF1 оказались специфичными для финской популяции, а гены UCP3, CIDEA и PLIN1 оказались специфичными только для итальянской популяции. При рассмотрении парных признаков, для финской популяции гены FTO и HOXA1 популяционно-специфичны только в сочетании с митохондриальными генами. Для итальянской популяции ген UCP2 имеет популяционно-специфичные комбинации с митохондриальными генами. Для британской популяции популяционно-специфических комбинаций генов не наблюдалось.

UCP2 экспрессируется во многих типах клеток, таких как белая жировая ткань или клетки поджелудочной железы. UCP2 работает, чтобы уменьшить количество активных форм кислорода (АФК), производимых у населения, проживающего в теплом климате. Сердечно-сосудистая система играет решающую роль в адаптации к холоду. Частота коронарных событий увеличивается в холодные периоды, особенно в теплом климате. Возможное объяснение состоит в том, что некоторые популяции, такие как FIN, несут генетические варианты (или их комбинации, как в случае NOXA1), которые дают преимущество в борьбе с холодным климатом на сосудистом уровне.

FTO – первый ген предрасположенности к ожирению, идентифицированный в общегеномных исследованиях различных групп людей [7]. FTO влияет на содержание митохондрий и метаболизм жиров [8]. Подавление FTO подавляет биогенез митохондрий и производство энергии, что приводит к снижению массы митохондрий и содержанию мтДНК. Кроме того, комбинации мтДНК и яДНК связаны с различными метаболическими характеристиками, такими как показатели жировой прослойки.

Разработанный метод может быть использован для выявления закономерностей генетической структуры среди групп людей и для понимания различных аспектов генетической изменчивости, характеризующей человеческие популяции. Его можно применять к отдельным генам и комбинациям генов.

Анализ выявил ядерные гены, которые играют важную биологическую роль в ассоциации с митохондриальными генами и являются популяционно-специфическими (например, FTO). Обоснование, использованное для выбора анализируемых генов, подтверждает то, что эти взаимодействия могут играть роль в адаптации к холоду, и дает предложения относительно новых генов-мишеней для дальнейшего изучения.

- [1] Mottis A. et al. // *Science*. 2019. Vol. 366. P. 827-832.
- [2] Hill G.E. // *Molecular Biology and Evolution*. 2015. Vol. 32. P. 1917.
- [3] Wei W. et al. // *Science*. 2019. Vol. 364. P. eaau6520.
- [4] Sazzini M. et al. // *Heredity*. 2014. Vol. 113. P. 259.
- [5] The 1000 Genomes Project Consortium // *Nature*. 2015. Vol. 526. P. 68.
- [6] Kalyakulina A. et al. // *Frontiers in Physiology*. 2020. Vol. 11. P. 575968.
- [7] Loos R. J. F. et al. // *Nature Reviews Endocrinology*. 2014. Vol. 10. P. 51.
- [8] Kang H. et al. // *Journal of Cellular Biochemistry*. 2018. Vol. 119. P. 5676.

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА

А.Е. Китаев

АО «ННПО имени М.В.Фрунзе»

Введение

Специальная функция Ламберта $W(z)$ определяется как решение функционального уравнения

$$z = W(z)e^{W(z)}. \quad (1)$$

Начало ее применения относится к восьмидесятым годам двадцатого века. Сейчас эта функция используется в программах символьной математики (в приложении Wolfram Mathematica она носит имя ProductLog). Ее теория приведена в книге [1]. В настоящем докладе будут рассмотрены три задачи, при решении которых она оказывается полезной.

Полупроводниковые приборы

Как известно, вольт-амперная характеристика идеального полупроводникового диода описывается формулой Шокли:

$$I = I_s \left(\exp\left(\frac{U}{\varphi}\right) - 1 \right). \quad (2)$$

Здесь I – ток, U – напряжение, I_s – ток насыщения, φ – температурный потенциал. Если учесть внутреннее омическое сопротивление диода R , формула усложнится (см., например, [2]):

$$I = I_s \left(\exp\left(\frac{U - IR}{\varphi}\right) - 1 \right). \quad (3)$$

Ток входит и в левую, и в правую часть формулы (3). Для того, чтобы выразить ток явным образом, можно использовать функцию Ламберта W (преобразовав выражение (3) к виду (1)). Получим

$$I = -I_s + \frac{\varphi}{R} W\left(\exp\left(\frac{U}{\varphi}\right) I_s \frac{R}{\varphi} \exp\left(I_s \frac{R}{\varphi}\right)\right). \quad (4)$$

При рассмотрении более сложной системы – усилителя с общим эмиттером на биполярном *npn* транзисторе (с добавлением в цепь эмиттера стабилизирующего резистора) оказывается, что выражение для коллекторного тока в данной системе можно записать, также используя функцию Ламберта:

$$I_c = \alpha D_{01}(U_{in}) - D_2(\alpha D_{01}(U_{in})(R + R_n) - (E - U_{in})). \quad (5)$$

Здесь

$$D_{01}(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R + R_{ne}} W\left(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R + R_{ne}}{\varphi} e^{I_s \frac{R + R_{ne}}{\varphi}}\right)$$

и

$$D_2(x) = -I_s + \frac{\varphi}{R(1 + \frac{1}{\alpha}) + R_n} W(e^{\frac{x}{\varphi}} I_s \frac{R(1 + \frac{1}{\alpha}) + R_n}{\varphi} e^{I_s \frac{R(1 + \frac{1}{\alpha}) + R_n}{\varphi}}).$$

В этих выражениях I_c – это коллекторный ток, U_{in} – напряжение входного сигнала усилителя, R – внутреннее сопротивление pn переходов транзистора (транзистор предполагается симметричным), R_n – сопротивление нагрузки в коллекторной цепи, R_{ne} – сопротивление стабилизирующего резистора в эмиттерной цепи, E – напряжение питания и α – коэффициент передачи тока транзистора.

Формула (5) учитывает нелинейность усилителя (описывается не только почти линейный усилительный режим, но и режимы отсечки и насыщения). Получение формулы (5), ее сравнение с данными эксперимента и с результатами моделирования в приложении OrCAD, а также получение более точных выражений были рассмотрены автором в статьях [3], [4] и [5].

Однопроводная линия

Решая задачу о распространении электромагнитных волн в однопроводной линии (имеется ввиду бесконечный цилиндрический провод) и используя при этом граничные условия Леонтовича, можно получить следующее дисперсионное уравнение для симметричной электрической волны (см. [6]):

$$\ln \frac{2}{\gamma p a} = i \frac{\omega}{c} a \xi \frac{1}{p^2 a^2}. \quad (6)$$

Здесь p – поперечное волновое число, a – радиус провода, ξ – комплексный импеданс провода (предполагается, что модуль его мал), γ – постоянная Эйлера (приблизительно равная 1.7811), ω – циклическая частота, c – скорость света. Формула (6) задает неявную зависимость интересующей нас величины (p) от других параметров. Используя функцию Ламберта, можно выразить p явным образом:

$$p a = \sqrt{\frac{-2 i a \xi \omega}{c W(-i \frac{\gamma^2 a \xi \omega}{2 c})}}. \quad (7)$$

Сила реакции излучения

В электродинамике выводятся различные формулы для силы реакции f , действующей на заряженную частицу в процессе излучения электромагнитных волн. Приведем самое простое выражение, применяемое в нерелятивистском случае:

$$f = \frac{2 e^2 d^2 \mathbf{V}}{3 c^3 dt^2}. \quad (8)$$

Здесь \mathbf{V} – скорость частицы, e – ее заряд.

Приведем также формулу Лармора для P – мощности излучения одиночного нерелятивистского заряда:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \left| \frac{dV}{dt} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \quad (9)$$

Здесь r – радиус сферы, на которой мы измеряем или вычисляем плотность потока излученной энергии, а t – момент времени, в который происходит это измерение.

При совместном применении обеих формул возникают противоречия (см. [7]). В качестве примера можно рассмотреть равноускоренное движение электрона. В этом случае мощность излучения P явно не равна нулю, так как не равно нулю ускорение, но радиационное трение нулевое (так как ускорение постоянно, вторая производная скорости, входящая в выражение (8) для силы радиационного трения, равна нулю).

Приведем альтернативное выражение для силы реакции излучения, отличающееся от формулы (8). Мы не будем его выводить из электродинамики, его обоснованием будет лишь закон сохранения энергии. Предлагаемое выражение для силы выглядит так:

$$f_0 = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\left| \frac{dV}{dt} \right|^2 (t)^2}{V^2}. \quad (10)$$

Мощность этой силы будет равна $(-P)$, где P определяется формулой для мощности излучения (9) при $r=0$. Это соответствует точному выполнению закона сохранения энергии: мощность силы радиационного трения равна мощности потерь на излучение.

Запишем второй закон Ньютона (одномерный) для частицы, на которую действует сила реакции излучения (в предложенной форме) и «обычная» внешняя сила F :

$$m \frac{dV}{dt} = F - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\left(\frac{dV}{dt} \right)^2}{V}. \quad (11)$$

Из этого уравнения можно выразить производную скорости (рассматривая уравнение (11) как квадратное):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4 \frac{g}{V} F}}{2 \frac{g}{V}}. \quad (12)$$

Здесь

$$g = \frac{2e^2}{3c^3}.$$

Выражение (12) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для скорости. Видно, что из-за присутствия в формуле квадратного корня возможно существование критических моментов времени, в которые действительное решение для скорости «исчезает» – скорость становится комплексной.

Пусть $F = \text{const}$. Запишем дифференциальное уравнение так:

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma (V - \sqrt{V^2 + aV}). \quad (13)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{m}{2g}, a = \frac{4gF}{m^2}.$$

Уравнение (13) имеет следующее решение, выражающееся через функцию Ламберта:

$$V = \frac{a}{4} \frac{(W(C_0 \exp 2\gamma t) - 1)^2}{W(C_0 \exp 2\gamma t)}. \quad (14)$$

В этой формуле параметр C_0 – произвольная константа.

При движении частицы в ускоряющем поле (в соответствии с формулой (14)) частица вначале теряет скорость (вплоть до нуля). Лишь после остановки она начинает ускоряться. При больших временах график скорости становится параллельным графику решения без учета реакции излучения.

При движении в замедляющем поле частица вначале замедляется (более интенсивно, чем в случае отсутствия силы реакции излучения). Но незадолго до остановки происходит комплексификация решения. И параллельным линии скорости «безызлучательного» движения при больших временах становится график реальной части скорости. Это позволяет «обойти» комплексификацию скорости следующим образом: переформулировать уравнение (11) для импульса, считая, что именно он может быть комплексным (по аналогии с квантовой механикой). И далее выражать скорость не как частное от деления импульса на массу, а как реальную часть этого частного.

Выводы

Использование функции Ламберта может оказаться удобным для представления в аналитическом виде решений целого ряда задач (не только представленных здесь – см. большой список задач в [1]). В противном случае пришлось бы искать решение численно (или представлять конечную формулу в виде ряда).

- [1] Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006, 160 с.
- [2] Битюрин Ю.А. и др. Измерение статических характеристик полупроводникового диода. – Н.Новгород: ННГУ, 2004, 38 с.
- [3] Китаев А.Е. // Радиотехника. 2017. № 10. С. 189.
- [4] Китаев А.Е. // Радиотехника. 2020. № 1. С. 74.
- [5] Китаев А.Е. // Радиотехника. 2020. № 10. С. 70.
- [6] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Советское радио, 1957, 581 с.
- [7] Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. – М.: Наука, 1987, 488 с.

ИЗУЧЕНИЕ РОЛИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ SIR-ТИПА

С.А. Макарихин¹, В.Б. Казанцев^{1, 2, 3}, Е.В. Панкратова¹

¹) ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²) Университет Иннополис

³) Самарский государственный медицинский университет

Введение

Исследование возможных сценариев развития различных инфекционных заболеваний представляет собой одно из важнейших направлений современной нелинейной динамики. В настоящее время в научной литературе можно найти множество математических моделей, позволяющих описать определенные особенности того или иного заболевания, условия формирования различных временных эволюций болезни, финального размера эпидемии или числа здоровых индивидуумов, избежавших инфекции [1-6]. В основе рассматриваемой в данной работе эпидемиологической модели лежит концепция, предложенная МакКендриком в 1926 году, согласно которой исследуемая популяция может быть разделена на три класса, обозначаемых S , I и R , где S определяет количество людей, восприимчивых к заболеванию, I соответствует количеству инфицированных (предполагается, что они заразны и способны распространять болезнь при контакте с восприимчивыми), R обозначает количество выздоровевших людей, которые были инфицированы и в текущий момент лишены возможности снова заразиться или распространить инфекцию. Следует отметить, что в рамках SIR-модели, в классе $R(t)$ учитываются люди как приобретшие иммунитет, так и умершие в результате болезни. При этом размер популяции считается фиксированным, то есть $S(t) + I(t) + R(t) = N$.

Описание математической модели

В данной работе рассмотрена модифицированная SIR-модель, учитывающая изменение вероятности заражения при увеличении инфицированных индивидуумов в популяции, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta(I)SI + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(I)SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= -\delta R + \gamma I, \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр δ позволяет учитывать возможность повторного заражения, γ – величина, обратная среднему времени болезни, функция $\beta(I) = \eta I / (1 + \alpha I)$ моделирует изменение вероятности заражения в случае контакта восприимчивого индивидуума с инфицированным при изменении числа инфицированных в популяции. На рис. 1 представлены графики $\beta(I)$ при $\eta = 0.00000017$ и двух значениях параметра α : $\alpha = 1$ (сплошная линия) и $\alpha = 0.5$ (пунктирная линия).

Результаты моделирования

Проведем исследование состояний равновесия системы (1): определим их число и тип устойчивости.

Приравнивание правых частей к нулю дает условие: $\eta S^2/(1+\alpha I) - \gamma I = 0$, выполнение которого соответствует равновесным режимам. Учитывая, что размер популяции считается фиксированным, то есть $S(t) + I(t) + R(t) = N$, получим выражение: $\eta I^2(N - I - \gamma I/\delta)/(1 + \alpha I) - \gamma I = 0$, которое после умножения на знаменатель и вынесения общего множителя за скобку принимает вид:

$$I[\eta(N - I - \gamma I/\delta)I - \gamma(1 + \alpha I)] = 0, \quad (2)$$

откуда следует, что в системе (1) всегда есть равновесие $O_1(N, 0, 0)$, соответствующее отсутствию инфекции в популяции. Из равенства нулю второго множителя несложно заключить, что при выполнении условия:

$$(\eta N - \alpha\gamma)^2 - 4\gamma\eta(1 + \gamma/\delta) > 0 \quad (3)$$

возможны еще два равновесия: $O_2(S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ и $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$, где

$$I_{2,3}^* = \frac{(\eta N - \alpha\gamma) \pm \sqrt{(\eta N - \alpha\gamma)^2 - 4\gamma\eta(1 + \gamma/\delta)}}{2\eta(1 + \gamma/\delta)}, \quad (3)$$

$$R_{2,3}^* = \frac{\gamma I_{2,3}^*}{\delta}, \quad S_{2,3}^* = N - I_{2,3}^* - R_{2,3}^*$$

На рис. 2 представлены кривые, соответствующие изменению I_k^* при увеличении параметра α (индекс $k=1, 2$ или 3 соответствует одному из трех состояний равновесия рассматриваемой системы). Следует отметить, что для рассматриваемой в данной работе популяции численностью $N=1000000$, $\eta=0.00000017$, с коэффициентом повторного заражения $\delta=0.005$ и величиной $\gamma=0.2$, соответствующей среднему времени течения инфекционного заболевания, равному 5 дням, при выполнении условия: $\alpha = \alpha^* = [\eta N - \sqrt{4\gamma\eta(1 + \gamma/\delta)}]/\gamma \approx 0.838$ состояния равновесия $O_2(S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ и $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$ сливаются и исчезают при $\alpha > \alpha^*$. В фазовом пространстве системы остается лишь глобально устойчивое равновесие $O_1(N, 0, 0)$, соответствующее отсутствию инфекции в популяции. Интервал значений α , при которых число восприимчивых к заболеванию совпадает с численностью населения рассматриваемой популяции, выделен на рис. 2 штриховкой. Отметим, что ввиду разных значений, которые принимают при изменении параметра α величины I_k^* , ось ординат на рис. 2 разделена на две части, в каждой из которой используется свой масштаб.

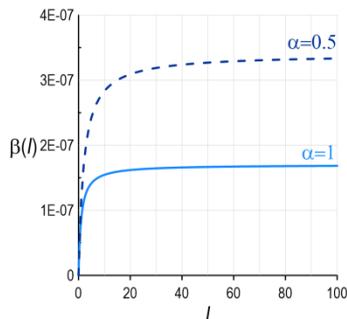


Рис. 1

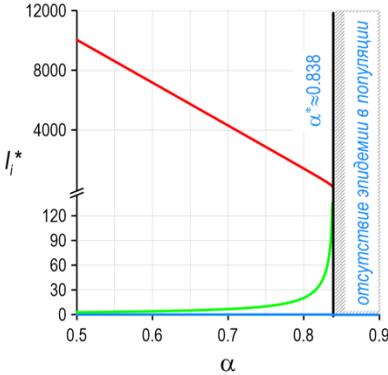


Рис. 2

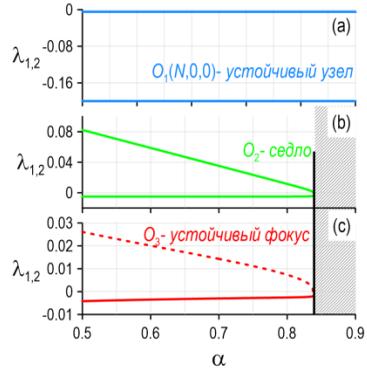


Рис. 3

На рис. 3 приведены зависимости корней характеристического уравнения, получаемого после линеаризации рассматриваемой системы в окрестности равновесий $O_k(S_k^*, I_k^*, R_k^*)$:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{3}$$

где

$$a_1 = \gamma + \delta + \frac{\eta I_k^{*2}}{1 + \alpha I} - \eta \left(N - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta} \right) I_k^* \right) \left[\frac{2I_k^* + \alpha I_k^{*2}}{(1 + \alpha I)^2} \right], \tag{4}$$

$$a_2 = \gamma\delta + \frac{(\gamma + \delta)\eta I_k^{*2}}{1 + \alpha I} - \delta\eta \left(N - \left(1 + \frac{\gamma}{\delta} \right) I_k^* \right) \left[\frac{2I_k^* + \alpha I_k^{*2}}{(1 + \alpha I)^2} \right].$$

На графиках сплошными линиями изображены действительные корни $\lambda_{1,2}$ (для $O_1(N,0,0)$ и $O_2(S_2^*, I_2^*, R_2^*)$, рис. 3(a) и рис. 3(b)), либо действительная часть комплексных корней для $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$, рис. 3(c). Мнимая часть комплексных корней для равновесия $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$ изображена пунктирной линией. Из вида кривых следует, что состояние равновесия $O_1(N,0,0)$ является устойчивым узлом, равновесия $O_2(S_2^*, I_2^*, R_2^*)$ и $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$ – седлом и устойчивым фокусом, соответственно. Таким образом, исчезновение последних при увеличении параметра α происходит в результате седло-узловой бифуркации.

Фазовый портрет системы (1) в проекции на плоскость (S, I) представлен на рис. 4 (параметр $\alpha=0.6$), где кривые серого цвета демонстрируют возможные переходы к устойчивым состояниям равновесия: в зависимости от выбора начальных условий фазовая точка стремится либо к устойчивому фокусу, либо к устойчивому узлу. Для удобства ось абсцисс разделена на две части, в каждой из которой используется свой масштаб.

Отметим, что состояние равновесия $O_3(S_3^*, I_3^*, R_3^*)$ определяет временную эволюцию болезни, финальный размер эпидемии, а также число здоровых индивидуумов, избежавших инфекции ($S_3^* = N - R_3^* - I_3^*$). При этом существует оно, – то есть наблюдается развитие эндемического характера заболевания, при котором в популяции всегда имеется часть населения, являющаяся переносчиком инфекции, – лишь при $\alpha < \alpha^*$. При этом, как видно из рис. 1, вероятность заражения в случае контакта восприимчивого индивидуума с инфицированным возрастает.

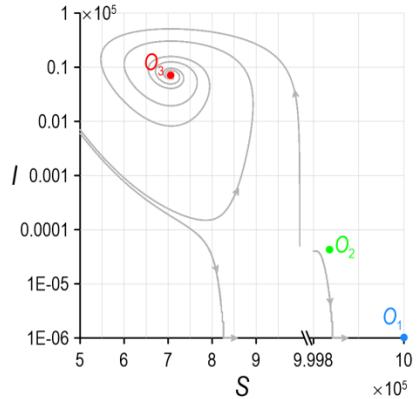


Рис. 4

Заключение

В данной работе рассматривается модифицированный вариант SIR-модели, учитывающий увеличение вероятности заражения в случае контакта восприимчивого индивидуума с инфицированным при увеличении числа инфицированных в замкнутой популяции. Изучена роль параметра, определяющего скорость изменения этой вероятности. Обнаружен *пороговый* характер развития эпидемии. В частности, показано, что при малых скоростях роста вероятности заражения эпидемия не наблюдается. Таким образом, рассматриваемая в данной работе модификация SIR-модели позволяет на качественном уровне учесть соблюдение норм социального дистанцирования, уменьшающих число возможных контактов между индивидуумами и, как следствие, уменьшающих вероятность заражения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-04-60078).

- [1] Blyuss K.B., Kyrychko Y.N. // Stability and bifurcations in an epidemic model with varying immunity period. Bull. Math. Biol. 2010. Vol. 72. P. 490.
- [2] Feng Z., Thieme H.R. // Endemic models with arbitrarily distributed periods of infection I: Fundamental properties of the model. SIAM. J. Appl. Math. 2000. Vol. 61. P. 803.
- [3] Hews S., Eikenberry S., Nagy J. D., Kuang Y. // Rich dynamics of a hepatitis B viral infection model with logistic hepatocyte growth. Math. Biol. 2010. Vol. 60. P. 573.
- [4] Huang G., Takeuchi Y. // Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence. J. Math. Biol. 2011. Vol. 63. P. 125
- [5] Liu W.M., Levin S.A., Iwasa Y. // Influence of nonlinear rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. J. Math. Biol. 1986. Vol. 23. P. 187.
- [6] Ruan S., Wang W. // Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate. J. Differ. Equations. 2003. Vol. 188. P. 135.

DSGE МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ: КАЛИБРОВКА ПАРАМЕТРОВ

О.Н. Минаева

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

DSGE моделирование (**Dynamic stochastic general equilibrium modeling – Вычислимые модели общего равновесия**) один из инструментов сценарного анализа экономических систем. DSGE модели работают по принципу “что будет, если...” и позволяют оценивать последствия проводимой экономической политики.

DSGE модели представляют собой систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения эндогенных параметров модели в зависимости от различных шоковых воздействий на ее экзогенные параметры. В связи с этим для корректного анализа и валидности полученных результатов возникает необходимость адаптации экзогенных параметров модели к реалиям национальной экономики.

DSGE модель в базовом варианте можно представить системой из трех разностных линейных уравнений, описывающих динамику основных макроэкономических показателей и отражающих условия оптимального поведения домохозяйств и фирм:

- 1) Новая кейнсианская кривая Филлипса:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + k \tilde{y}_t \quad (1)$$

где π_t – инфляция в период t , $E_t \pi_{t+1}$ – ожидание инфляции в период $t+1$, \tilde{y}_t – разрыв выпуска;

- 2) Динамическая кривая IS:

$$\tilde{y}_t = E_t \tilde{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n), \quad (2)$$

где i_t – номинальная процентная ставка в период t , r_t^n – естественная ставка процента $E_t \pi_{t+1}$ – ожидание инфляции в период $t+1$;

- 3) Монетарное правило (правило Тейлора) для процентной ставки:

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \tilde{y}_t + \vartheta_t, \quad (3)$$

где ϑ_t – экзогенный компонент с нулевым средним, описываемый авторегрессией AR(1). Более детальное описание переменных DSGE модели, взаимосвязь между ними и содержательный смысл дано в [1].

DSGE модель содержит как ряд базовых параметров, среди которых $\alpha, \beta, \rho, \sigma, \phi_\pi, \phi_y$ и др., так и другие параметры, которые являются функциями базовых (k и др.). Подготовительным этапом перед непосредственным проведением DSGE моделирования является калибровка параметров на основе временных рядов.

В данной работе моделируется значение статического показателя α , входящего в описание производственной функции Кобба-Дугласа u_t , где $u_t = \tilde{y}_t + y_t^n$, y_t^n – логарифм потенциального выпуска, а $1 - \alpha$ – эластичность выпуска по труду.

Для калибровки параметра α чаще всего используется показатель доли трудовых доходов в валовом внутреннем продукте страны. При таком подходе предполагается равенство реальной заработной платы и предельного продукта труда. Однако известно, что при монополистической конкуренции реальная заработная плата меньше предельного продукта труда. Полагая, что государство применяет оптимальную субсидия для компенсации неэффективности выпуска, то данный подход можно использовать для калибровки параметра α .

Показатель α для национальной экономики (экономики России) рассчитывался с использованием квартальных статистических данных системы национальных счетов России [2] с 1995 по 2018 годы (96 наблюдений) – временной ряд $alpha$, где $alpha$ вычисляется по формуле (4):

$$alpha = \frac{\text{оплата труда наемных работников}}{\text{валовой внутренний продукт}} \quad (4)$$

Согласно тесту Дики-Фуллера с константой временной ряд $alpha$ не является стационарным (присутствует циклическая составляющая), так как отвергается нулевая гипотеза H_0 о наличии единичного корня (рис. 1).

Тест на стационарность ряда $alpha$

H_0 : $alpha$ имеет единичный корень		t-статистика	p-значение*
Тест Дики-Фуллера (ADF-тест)		-1.993001	0.2894
Критическое значение:	1% уровень значимости	-3.510259	
	5% уровень значимости	-2.896346	
	10% уровень значимости	-2.585396	

Рис. 1

Сезонная корректировка временного ряда $alpha$ проводилась в эконометрическом пакете EViews методом X-12 – ARIMA (рис. 2). Данный метод устраняет циклическую составляющую временного ряда, убирая при этом из рассмотрения первые и последние наблюдения.

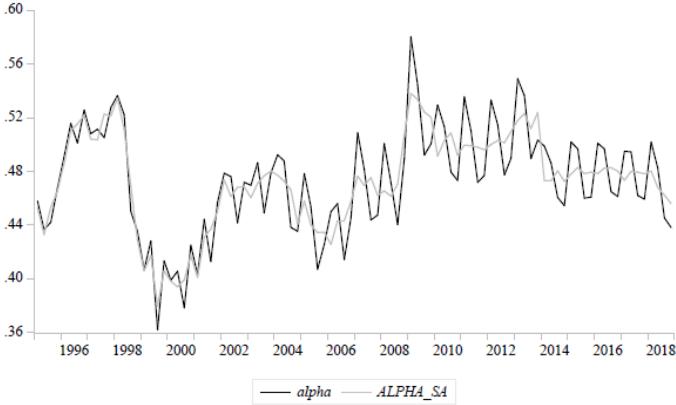


Рис. 2

Получившийся после сезонной корректировки ряд $ALPHA_SA$ содержит 88 наблюдений и, согласно AD -тесту, является стационарным на 5% уровне значимости (рис. 3).

Тест на стационарность ряда $ALPHA_SA$

H_0 : $ALPHA_SA$ имеет единичный корень		t-статистика	p-значение*
Тест Дики-Фуллера (ADF -тест)		-3.371166	0.0147
Критическое значение:	1% уровень значимости	-3.506484	
	5% уровень значимости	-2.894716	
	10% уровень значимости	-2.584529	

Рис. 3

Среднее арифметическое ряда $ALPHA_SA$ равно 0,47325, что соответствует значению $1 - \alpha$, следовательно, $\alpha = 0,52675$. Таким образом, эластичность выпуска по труду, рассчитанная по российским статистическим данным, показывает, что при росте применяемого труда на 1% выпуск увеличивается в среднем на 0,53%.

Значение параметра α , оцененное для России, являющейся малой открытой экономикой, в целом сопоставимо со значением данного параметра, вычисленного для других малых открытых экономик. Так, например, в работе [3] параметр α моделировался для экономики Беларуси; его численное значение равно примерно 0,54.

[1] Gali J. // Journal of Economics. 2008. Vol. 95. P. 179.

[2] <https://www.gks.ru/folder/210/document/13221>

[3] <https://www.research.by/webroot/delivery/files/wp2012r06.pdf>

ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО АУКСЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

А.В. Муравьева¹⁾, И.С. Павлов^{1, 2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Институт проблем машиностроения РАН

Одной из важнейших характеристик упругости материала является коэффициент Пуассона ν , который представляет собой отношение поперечного сжатия к удлинению в случае чистого растяжения. Из классической теории упругости известно, что теоретически обоснованные значения коэффициента Пуассона лежат в интервале $-1 \leq \nu \leq 0,5$ [1]. Верхний предел соответствует несжимаемым материалам (например, резине), сохраняющим в процессе деформации свой объем при значительном изменении формы. Нижний предел соответствует материалам, сохраняющим геометрические пропорции, но изменяющим объем при деформации.

Особый интерес вызывают материалы с отрицательным значением ν , получившие название *ауксетических* или *ауксетиков* (от греческого *auxetos* – «разбухающий») [2] и обладающие уникальными физико-механическими свойствами (низкая плотность, хорошие изоляционные свойства и т.п.). Ауксетики встречаются среди пористых сред, гранулированных материалов, полимеров, композитов, кристаллических сред и наноматериалов [1, 3, 4].

В отличие от изотропного, анизотропный материал имеет несколько коэффициентов Пуассона, поскольку растяжение или сжатие вдоль одной оси может сильно отличаться от растяжения или сжатия вдоль другой. Обозначаются различные коэффициенты Пуассона индексами, содержащими наименование двух осей: той, вдоль которой происходит первоначальное растяжение или сжатие, и той, вдоль которой наблюдается ответная реакция. При этом значения некоторых коэффициентов Пуассона могут выходить за пределы известного интервала $(-1; 0,5)$ [1], однако среднее значение коэффициентов Пуассона обязательно будет содержаться в этом интервале.

Особенно много ауксетиков среди кубических кристаллов. И, как показывают экспериментальные данные [5], наиболее часто в них бывает отрицательным коэффициент Пуассона

$$\nu_{(110,1\bar{1}0)} = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) - 2C_{11}C_{44}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) + 2C_{11}C_{44}} \quad (1)$$

Описание свойства ауксетичности невозможно без математической модели, которая бы давала возможность установить взаимно-однозначное соответствие между макроконстантами среды (т.е. коэффициентами уравнений динамики) и параметрами ее микроструктуры (т.е. формой и размером частиц и параметрами взаимодействий между частицами). В настоящее время для сред с ауксетическими свойствами применяются модели, как правило, двумерные, с весьма сложной системой связи между анизотропными частицами, в частности, квадратными [6]. В данной работе предлагается трехмерная модель ауксетика, представляющая собой кубическую решетку из жестких шарообразных частиц (зерен) массы M , имеющих форму шара диаметром d . В исходном состоянии они сосредоточены в узлах решетки с периодом a . Каждая

частица обладает шестью степенями свободы: ее центр масс может смещаться вдоль осей x , y и z (трансляционные степени свободы u , v и w), а сама частица может поворачиваться вокруг каждой из этих осей (ротационные степени свободы θ , ψ и φ) (рис. 1).

Считается, что каждая частица взаимодействует лишь с ближайшими соседями, удаленными от нее на расстоянии a (частицы 1-й координационной сферы), $a\sqrt{2}$ (2-й координационной сферы) и $a\sqrt{3}$ (3-й сферы). Центральные и нецентральные взаимодействия соседних частиц моделируются упругими пружинами пяти типов: центральными (с жесткостью K_0), нецентральными с жесткостью K_1 (рис. 2), диагональными (K_2), а также пружинами с жесткостями K_3 и K_4 , соединяющими центральную частицу с зернами, соответственно, второй и третьей координационными сферами [7].

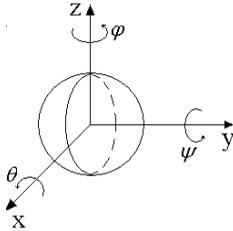


Рис. 1

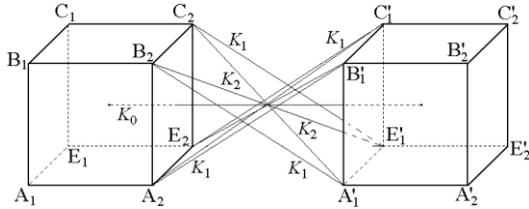


Рис. 2

Предполагается, что взаимодействие частиц при их отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин и описывается квадратичным потенциалом, пропорциональным жесткостям пружин. В длинноволновом приближении распространение акустических и ротационных волн в такой среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - c_2^2 (u_{yy} + u_{zz}) - s^2 (v_{xy} + w_{xz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\varphi_y - \psi_z) &= 0, \\
 v_{tt} - c_1^2 v_{yy} - c_2^2 (v_{xx} + v_{zz}) - s^2 (u_{xy} + w_{yz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\theta_z - \varphi_x) &= 0, \\
 w_{tt} - c_1^2 w_{zz} - c_2^2 (w_{xx} + w_{yy}) - s^2 (u_{xz} + v_{yz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\psi_x - \theta_y) &= 0, \\
 \theta_{tt} - c_3^2 \theta_{xx} - c_4^2 (\theta_{yy} + \theta_{zz}) + \frac{\beta_2^2}{2J} (w_y - v_z) + \frac{\beta_1^2}{J} \theta &= 0, \\
 \psi_{tt} - c_3^2 \psi_{yy} - c_4^2 (\psi_{xx} + \psi_{zz}) + \frac{\beta_2^2}{2J} (u_z - w_x) + \frac{\beta_1^2}{J} \psi &= 0, \\
 \varphi_{tt} - c_3^2 \varphi_{xx} - c_4^2 (\varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + \frac{\beta_2^2}{2J} (v_x - u_y) + \frac{\beta_1^2}{J} \varphi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: c_1 и c_2 – скорости распространения продольной и поперечной волн, c_3 и c_4 – скорости ротационных волн различной поляризации, s – коэффициент связи между продольными и сдвиговыми деформациями, β_1 и β_2 – пара-

метры связи микроповоротов с поперечной и продольной волнами, J – момент инерции частицы относительно каждой оси, проходящей через ее центр масс. Эти коэффициенты выражаются через силовые постоянные K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 период решетки a и размер частицы $b = d/2\sqrt{3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho c_1^2 &= \frac{K_0}{a} + \frac{8(a-b)^2}{(a-b)^2 + b^2} \frac{K_1}{a} + \frac{4(a-b)^2}{(a-b)^2 + 2b^2} \frac{K_2}{a} + \frac{K_3}{a\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3a}, \\ \rho c_2^2 &= \frac{4b^2}{(a-b)^2 + b^2} \frac{K_1}{a} + \frac{4b^2}{(a-b)^2 + 2b^2} \frac{K_2}{a} + \frac{K_3}{2a\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3a}, \\ \rho s^2 &= \frac{K_3}{a\sqrt{2}} + \frac{4K_4}{3a}, \\ \rho \beta_1^2 &= \frac{8b^2}{a} \left(\frac{K_1}{(a-b)^2 + b^2} + \frac{K_2}{(a-b)^2 + 2b^2} \right), \\ \rho \beta_2^2 &= \frac{8b^2 K_2}{a(a-b)^2 + 2ab^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Однако при исследовании волновых процессов в низкочастотном диапазоне ротационные степени свободы не являются независимыми – они связаны с продольными и поперечными деформациями:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} (v_z - w_y) = -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_x \vec{U}, \\ \psi(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} (w_x - u_z) = -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_y \vec{U}, \\ \varphi(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} (u_y - v_x) = -\frac{1}{2} \operatorname{rot}_z \vec{U}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \vec{U} – вектор смещений. Учет соотношений (4) приводит к замораживанию вращательной степени свободы. В результате, возмущения, вызванные микровращениями, не распространяются, однако микроповороты оказывают влияние на распространение продольных и сдвиговых волн. В этом случае уравнения (2) динамики рассматриваемой среды без учета производных четвертого порядка записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{yy} + u_{zz}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (v_{xy} + w_{xz}) &= 0, \\ v_{tt} - c_1^2 v_{yy} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (v_{xx} + v_{zz}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{xy} + w_{yz}) &= 0, \\ w_{tt} - c_1^2 w_{zz} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (w_{xx} + w_{yy}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{xz} + v_{yz}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнив уравнения (5) с уравнениями классической теории упругости для сред с кубической симметрией [8], получим следующие соотношения

$$C_{11} = \rho c_1^2, C_{44} = \rho \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right), C_{12} = \rho \left(s^2 - c_2^2 + \frac{\beta_2^4}{2\beta_1^2} \right). \quad (6)$$

Благодаря соотношениям (1), (6) и (3), можно выразить коэффициент Пуассона $\nu_{(110,1\bar{1}0)} = \nu_1$ через параметры микроструктуры. Анализ полученной зависимости показывает, что проявлению свойства ауксетичности способствуют большой размер частиц (рис. 3) и большие значения параметра $K_{40} = K_4/K_0$, а также маленькие значения параметров K_{10} (рис. 4) и K_{20} . Параметр K_{30} практически не влияет на значение ν_1 .

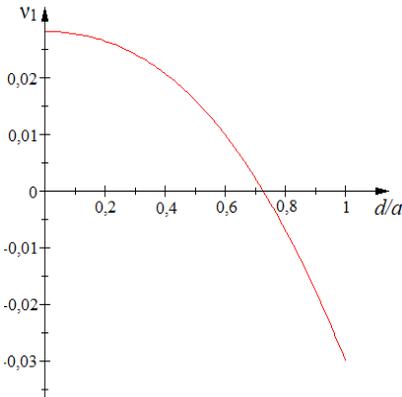


Рис. 3

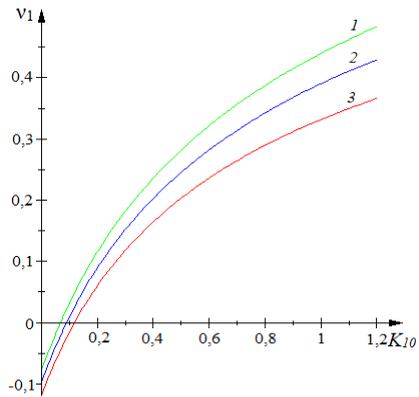


Рис. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-08-00965-а и 18-29-10073-мк).

- [1] Конек Д.А. и др. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т. 10, № 1. С. 35.
- [2] Evans K.E. // Endeavour. 1991. Vol. 15, № 4. P. 170.
- [3] Yang W. // J. Materials Science. 2004. Vol. 39. P. 3269.
- [4] Hall L.J. and etc. // Science. 2008. Vol. 320, № 5875. P. 504.
- [5] Беломестных В.Н., Соболева Е.Г. // Известия Томского политехнического университета. 2012. Т. 320, № 2. С. 137.
- [6] Vasiliev A.A., Pavlov I.S. // Physica Status Solidi B. 2020. Vol. 257, № 3. P. 1900389.
- [7] Павлов И.С. и др. // Изв. РАН. Сер. Физическая. 2021. Т. 85, № 6. С. 895.
- [8] Федоров В.И. Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965.

СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВОЗМУЩЕНИЯ В ЦЕНТРИФУГИРОВАННОМ СЛОЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

И.Н. Солдатов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Вращающиеся магнитные поля широко используются для улучшения перемешивания расплавов металлов во время затвердевания, для подавления тепловых колебаний в процессе роста кристаллов и др., и достаточно много теоретических и экспериментальных работ посвящено исследованию движения проводящих жидкостей во вращающемся магнитном поле и устойчивости этого движения [1–4]. Менее исследован вопрос об использовании магнитного поля для стабилизации режима стационарного вращения роторной системы, содержащей проводящую жидкость. В работе [5] исследовалась задача в безындукционном приближении о малых движениях проводящей вязкой жидкости со свободной поверхностью в полости быстровращающегося цилиндрического ротора, когда источники магнитного поля скреплены с ротором. В данной работе эта задача рассматривается без использования безындукционного приближения.

Рассмотрим волновые движения проводящей вязкой жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость ротора, вращающегося с большой постоянной угловой скоростью Ω . Ось вращения совпадает с осью симметрии ротора. Магнитное поле направлено вдоль оси вращения и вращается вместе с ротором. Материал стенок цилиндра полагается непроводящим. Удобно перейти в неинерциальную (вращающуюся) систему координат, связанную с цилиндром, в которой МГД-уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2\right) + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \\ &\quad + \frac{1}{\mu\rho} [\text{curl } \mathbf{B} \times \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{curl}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \mathbf{B}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ – вектор скорости, ν – кинематическая вязкость жидкости; остальные обозначения традиционные.

В невозмущенном движении, поскольку влияние силы тяжести пренебрежимо мало, проводящая жидкость образует на стенке ротора центрифугированный цилиндрический слой толщины $h=b-a$ (рис. 1), со стационарным значением величин

$$p_0 = p_a + \rho\Omega^2(r^2 - b^2)/2, \quad \mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z, \quad B_0 = \text{const},$$

где p_a – давление в камере.

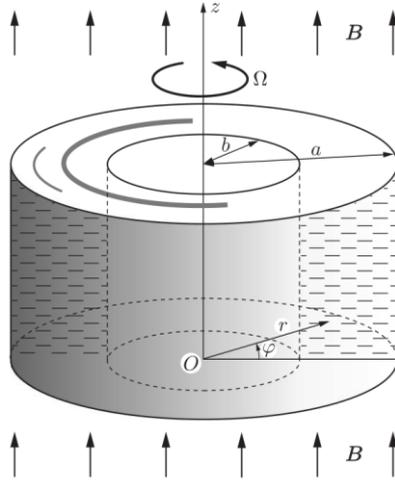


Рис. 1

Линеаризованные уравнения возмущенного движения проводящей жидкости и магнитного поля в равномерно вращающейся с угловой скоростью Ω (совпадающей со скоростью вращения цилиндрического контейнера, содержащего жидкость) цилиндрической системе координат (с осью z вдоль оси симметрии) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{\mu\rho} B_0 \mathbf{B} \right) + 2[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] + \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия на твердой непроводящей стенке $r = a$ суть следующие

$$B_r = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Линеаризованные граничные условия на свободной поверхности $r = b$ сводятся к следующим

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{b} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ -\frac{p}{\rho} - \Omega^2 b h + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\gamma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{h}{b^2} \right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} - u &= 0, & B_r = 0, & \quad \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

где функция h определяет поверхность раздела жидкостей. Из граничных условий удобно исключить h .

Линеаризованные МГД–уравнения допускают точные решения вида

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{v}}(r)e^{i(\omega t + m\varphi + kz)}, & \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{B}}(r)e^{i(\omega t + m\varphi + kz)}, \\
 \hat{w} &= \sum_{j=1}^5 \tilde{w}_{mj}, & \tilde{w}_{mj} &= C_{2j-1}H_m^{(1)}(\lambda_j r) + C_{2j}H_m^{(2)}(\lambda_j r), \\
 \hat{u} &= \sum_{j=1}^5 \left(\frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} + \frac{ik}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right), \\
 \hat{v} &= \sum_{j=1}^5 \left(\frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right), \\
 B_z &= \sum_{j=1}^5 \frac{ikB_0}{i\omega + \sigma^{-1}\mu^{-1}\kappa_j^2} \tilde{w}_{mj}, \\
 B_r &= \sum_{j=1}^5 \frac{ikB_0}{i\omega + \sigma^{-1}\mu^{-1}\kappa_j^2} \left(\frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} + \frac{ik}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right), \\
 B_\varphi &= \sum_{j=1}^5 \frac{ikB_0}{i\omega + \sigma^{-1}\mu^{-1}\kappa_j^2} \left(\frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} \tilde{w}_{mj} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} \tilde{w}_{m-1j} \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

если параметры k , κ и ω удовлетворяют соотношению

$$(\omega k + 2k\Omega + i\nu\kappa^3)(-i\omega + \sigma^{-1}\mu^{-1}\kappa^2) - i\mu^{-1}\rho^{-1}k^2\kappa B_0^2 = 0, \tag{4}$$

где k – аксиальное волновое число, m – азимутальное волновое число, κ – параметр завихренности, ω – циклическая частота. В формулах (3) $\kappa_j, \text{Im } \kappa_j \geq 0$ ($j=1, \dots, 5$) – корни уравнения (4), $\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$, C_n – произвольные постоянные ($n=1, \dots, 10$). После подстановки решений в граничные условия получим линейную однородную алгебраическую систему уравнений относительно произвольных постоянных C_n , условие разрешимости которой является дисперсионным уравнением.

В докладе детально анализируется влияние магнитного поля и вязкости на дисперсионные характеристики волн и появление растущих решений. Под влиянием вязкости жидкости у волнового числа k появляется мнимая часть (коэффициент затухания). Показано, что осевое магнитное поле усиливает затухание инерционных волн во вращающемся слое проводящей вязкой жидкости. В отличие от вещественной части k , относительно малочувствительной к изменениям малых чисел Экмана E и Стюарта S , воздействие изменений E и S на коэффициент затухания значительно более сильное и наиболее заметно проявляясь при отношениях частот τ (циклической частоты волны к частоте вращения ротора), приближающимся к границам интервала $(-2, 2)$. Как видно из представленной на рис. 2 зависимости мнимой части безразмерного аксиального волнового числа нескольких первых мод от безразмерной частоты τ коэффициент затухания мод растет по абсолютной величине с ростом S .

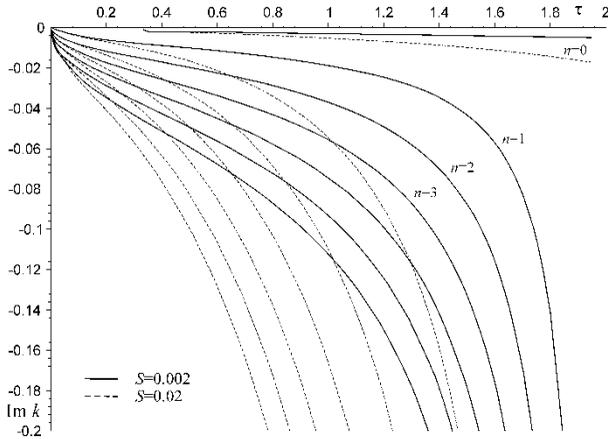


Рис. 2

Отметим, что в случае чисто азимутальной волны осевое магнитное поле не оказывает влияние на поле скоростей [6, 7]. Но чисто азимутальная волна возможна только в бесконечном цилиндре, т.е. если не учитывать влияние торцов. Если же учесть влияние торцов, то, оказывается, магнитное поле через влияние торцевых пограничных течений на крупномасштабное движение жидкости проявляет стабилизирующее действие на всё движение жидкости.

- [1] Gorbachev L., Nikitin N., Ustinov A. // *Magn. Gidrodin.* 1974. № 4. P. 32.
- [2] Gelfgat Y., Priede J. // *Magnetohydrodynamics (N.Y.)* 1995. Vol. 31. P. 188.
- [3] Koal K., Stiller J., Grundmann R. // *Phys. Fluids.* 2007. Vol. 19. P. 088107.
- [4] Холодова С. Е. // *Журнал вычислительной математики и матем. физики.* 2008. Т. 48, № 5. С. 882.
- [5] Солдатов И.Н. // *Прикладная механика и техн. физика.* 2015. Т. 56, № 3. С. 30.
- [6] Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. *Магнитная гидродинамика несжимаемых сред.* – М.: Наука, 1970, 380 с.
- [7] Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. // *Прикладная механика и техн. физика.* 2004. Т. 45, № 1. С. 12.
- [8] Kang H. et al. // *Journal of Cellular Biochemistry.* 2018. Vol. 119. P. 5676-5685.

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧЕЙ ПАМЯТИ В НЕЙРОН-АСТРОЦИТАРНЫХ СЕТЯХ

Ю.А. Цыбина¹⁾, С.Ю. Гордлеева^{1,2)}, М.И. Кривonosов¹⁾, А.А. Заикин^{1,3)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Университет Иннополис

³⁾ University College London, United Kingdom

Введение

Рабочая память является физиологической системой для кратковременного хранения и обработки информации. В настоящее время не существует общепризнанной теоретической концепции механизма организации кратковременной рабочей памяти [1]. Одной из теорий формирования рабочей памяти является модель рабочей памяти, основанная на механизмах кратковременной синаптической пластичности [2]. Последние экспериментальные исследования показывают, что астроциты, один из типов глиальных клеток, способны модулировать синаптическую пластичность, а также участвовать в сигнализации и процессах обработки информации в нейронных сетях. Кроме того, экспериментально было выявлено, что астроциты играют роль в реализации когнитивных функций в том, числе в рабочей памяти. На основании этого в работе выдвигается гипотеза об участии астроцитов в процессах организации кратковременной рабочей памяти. А именно предполагается, что астроцитарная модуляция синаптической передачи в нейрон-астроцитарных сетях играет роль в формировании рабочей памяти. Для проверки данной гипотезы предлагается модель нейрон-астроцитарной сети, состоящая из взаимодействующих сетей импульсных нейронов и астроцитов. Астроцитарная сеть в данной модели осуществляет временное хранение информационных паттернов, которыми можно манипулировать (повторно обучать, извлекать, передавать) на временах кальциевой динамики в астроцитах. В свою очередь, активация астроцитарной сети происходит в ответ на когерентное возбуждение в соответствующих нейронных ансамблях. В данной работе мы продолжаем наше исследование, посвященное роли астроцитов в формировании кратковременной памяти [4], и показываем, что два механизма формирования памяти (астроцитарная модуляция синаптических связей и синаптическая пластичность Хебба [5]) могут эффективно работать параллельно.

Модель и архитектура нейрон-астроцитарной сети

Разработанная модель нейрон-астроцитарной сети состоит из трех слоев. Первый слой состоит из возбуждающих нейронов, второй – из тормозных нейронов, третий – из астроцитов. Динамика мембранного потенциала каждого нейрона в сети описывается моделью Ижикевича [6]. Нейроны первого слоя связаны между собой локальными возбуждающими синаптическими связями. нейроны первого слоя могут активировать тормозные нейроны второго слоя. В свою очередь, нейроны второго слоя связаны тормозными нелокальными синаптическими связями с нейронами первого слоя. Возбуждающие связи в первом слое нейронной сети и тормозные связи обучаются по правилу Хебба [5].

Каждый астроцит в сети соединен с соседними астроцитами щелевыми контактами, проницаемыми для молекул инозитол – 1,4,5-трифосфата (IP₃) и ионов кальция (Ca²⁺). Для моделирования динамики внутриклеточной концентрации кальция в астроците мы использовали модель Ли-Ринцеля [7]. Каждый астроцит двунаправленно взаимодействует с нейронным ансамблем. Повышение уровня кальция в астроците происходит в ответ на повышение внеклеточной концентрации нейротрансмиттера, высвобождаемого нейронами при коррелированной генерации импульсов [8]. Генерация кальциевого импульса в астроците приводит к высвобождению нейроактивных веществ (глиотрансмиттеров), которые способны модулировать нейронную возбудимость и синаптическую передачу. Астроцит-опосредованная регуляция передачи сигнала в нейронной сети приводит к пространственной синхронизации нейронной активности. Исследовано влияние астроцитарной модуляции синаптической передачи на процессы формирования кратковременной памяти в предложенной нейрон-астроцитарной сети. Показано, что астроцит-опосредованная координация активности нейронной сети улучшает такие характеристики кратковременной памяти в модели, как степень корреляции воспроизводимых информационных паттернов с образцами.

Данная работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования грант № 075-15-2020-808.

- [1] Lundqvist M., Herman P., Miller E.K. // *Journal of Neuroscience*. 2018. Vol. 38 (32). P. 7013.
- [2] Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. // *Science*. 2008. Vol. 319. Issue 5869. P. 1543.
- [3] Santello M., Toni N., Volterra A. // *Nature Neuroscience*. 2019. Vol. 22, P. 154.
- [4] Gordleeva S. Y., Tsybina Y. A., Krivonosov M. I., Ivanchenko M. V., Zaikin A. A., Kazantsev V. B. and Gorban A. N. // *Frontiers in Cellular Neuroscience*. 2021. Vol. 15.
- [5] Hebb D. O. // *John Wiley & Sons inc*. 1949.
- [6] Izhikevich E. // *Ieee transactions on neural networks*. 2003. Vol. 14. P. 1569.
- [7] Li Y. X., and Rinzel J. // *Theor. Biol.* 1994. Vol. 166. P. 461.
- [8] Gordleeva S. Y., Stasenko S. V., Semyanov A. V., Dityatev A. E., Kazantsev V. B. // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2012. Vol. 6.

Секция «Математическое моделирование
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 20 мая 2021 г.
Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.