

Труды XXVII научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ  
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»**

Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАФОВ СВЯЗЕЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ УЗЛОВ ТРЕНИЯ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ

А.М. Архиреев

*Институт проблем машиностроения РАН*

Метод графов связей является обобщением методов моделирования триботехнических систем. Он заключается в многомерном энергетическом представлении системы трения. Этот метод позволяет обеспечить переход от физического моделирования деталей и устройств к аналитическим и числовым результатам. Метод учитывает все возможные потоки энергии в системе.

Главное преимущество метода графов связей – возможность определить динамические реакции без составления уравнений состояния. Основная цель применения данного метода – определение наилучшего сочетания материалов для узлов трения с наименьшими потерями энергии. Метод позволяет определить наилучшую комбинацию формализованных звеньев узлов трения (материалов, смазки, площади контакта, напряжений и пр.).

### **Введение**

Метод графов, предложенный Пейнтером [1], является разделом дискретной математики – теории графов. Граф — это множество вершин, которые соединяются множеством ребер [2]. Пример графа изображен на рис. 1. Теория графов применяется для задач нахождения упорядочения объектов, то есть, является одним из методов решения комбинаторных задач. Анализ таких задач существенно отличается от классических методов анализа поведения систем с помощью уравнений.

Графы задаются: матрицей смежности, матрицей инцидентности, списком дуг, массивом окрестностей вершин по выходам и входам графа.

Матрицей смежности  $M^{cm}$  графа называется матрица, имеющая размерность  $P \times P$ , каждый элемент  $m_{ij}^{cm}$  которой определяется следующим образом:

$$m_{ij}^{cm} = \begin{cases} 1, & \text{если между } i\text{-ой и } j\text{-ой вершиной есть дуга} \\ & \text{в направлении от вершины } i \text{ к вершине } j; \\ 0, & \text{если от вершины } i \text{ к вершине } j \text{ дуги нет.} \end{cases} \quad (1)$$

Специфичность матрицы смежности является характерной особенностью задач по оптимизации. Эти структурные особенности определяются соотношением между числом нулевых и ненулевых элементов матрицы. Плотность заполнения такой матрицы ненулевыми элементами для многих задач не превышает нескольких процентов [3]. Наиболее полный обзор матричных методов решения задач на комбинаторику представлен в работах [4, 5].

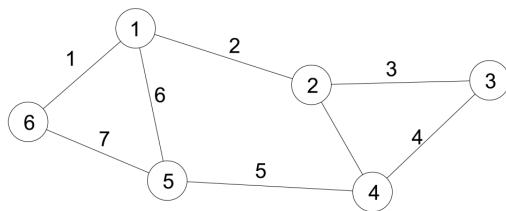


Рис. 1

### Применения графов в системе трения

Задание графа с помощью матрицы смежности является наиболее подходящим для поставленной задачи. В качестве системы трения рассматривается редуктор, кинематическая схема которого приведена на рис. 2. Узлы трения, пронумерованные на рисунке, представляют собой подшипники (поз. 2, 5), шестерни (поз. 3, 4), входной и выходной валы системы (поз. 1, 6). Постановка задачи заключается в следующем: подобрать узлы трения таким образом, чтобы при работе редуктора потери на трение были минимальными. Граф элементов проектируемой системы трения, где есть возможность выбора между типами подшипников и шестерней представлен на рис. 3.

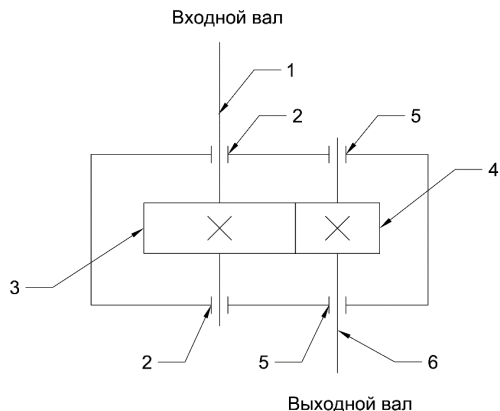


Рис. 2

Граф является ориентированным, то есть всем его ребрам (дугам) присвоено направление [6]. Ориентированность графа необходима, поскольку в данной системе имеется жесткая последовательность узлов трения (вершин графа).

Матрицу смежности можно построить, используя формулу (1). В ячейках матрицы единицами обозначают наличие механической связи между деталями, нули обозначают отсутствие трения между соответствующими частями, а кодировки «10» указывают на отсутствие механической связи и в дальнейшем исключаются из расчета.

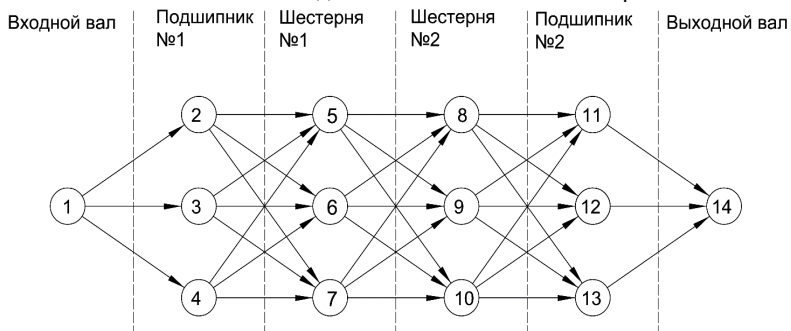


Рис. 3

### Применение методов комбинаторики для определения звеньев узла трения

Для нахождения наилучшего сочетания материалов для узлов системы трения применяются различные методы комбинаторики. Они заключаются в анализе всех

комбинаций и определении последовательности по определенному критерию. В данном случае этим критерием будут потери энергии на трение.

Известно, что потери энергии на трение прямо пропорционально зависят от силы трения, а значит и от коэффициента трения [7]. Согласно энергетической теории, энергия, затрачиваемая на преодоление сил трения, затрачивается на генерацию теплоты [8]. Имея представление о потерях энергии между узлами системы, можно построить матрицу потерь, которая будет демонстрировать общую картину всех потерь энергии при всех возможных вариантах комбинаций звеньев системы трения.

Комбинация с минимальной энергией потерь будет искомым оптимальной последовательностью.

Для построения матрицы потерь необходимо иметь представление о коэффициентах трения между трущимися частями системы. Матрица потерь приведена на рис. 4.

			Входной вал				Подшипник №1			Шестерня №1			Шестерня №2			Подшипник №2			Выходной вал
			Сталь	Шариковый радиальный однорядный	Роликовый радиальный	Шариковый упорный	Сталь 40X	Чугун	Бронза	Сталь 40X	Чугун	Бронза	Шариковый радиальный однорядный	Роликовый радиальный	Шариковый упорный	Сталь			
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14			
Входной вал	Сталь	1	-	1,8	1,32	1,56	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
Подшипник №1	Шариковый радиальный однорядный	2	-	-	-	-	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-			
	Роликовый радиальный	3	-	-	-	-	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-			
	Шариковый упорный	4	-	-	-	-	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-			
Шестерня №1	Сталь 40X	5	-	-	-	-	-	-	-	48	8,4	420	-	-	-	-			
	Чугун	6	-	-	-	-	-	-	-	8,4	180	360	-	-	-	-			
	Бронза	7	-	-	-	-	-	-	-	420	360	600	-	-	-	-			
Шестерня №2	Сталь 40X	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0	-			
	Чугун	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0	-			
	Бронза	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0	-			
Подшипник №2	Шариковый радиальный однорядный	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,8			
	Роликовый радиальный	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,32			
	Шариковый упорный	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1,56			
Выходной вал	Сталь	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			

Рис. 4

Целевой функцией поиска решений будут выступать общие потери на трение. Перебирая все возможные последовательности программными методами, поиск заканчивается при достижении минимального значения потерь энергии на трение.

Результаты для наглядности можно изобразить в виде графа, приведенном на рис. 5. Этот граф является частным случаем графа, приведенном на рис. 2. Он демонстрирует оптимальную комбинацию элементов узла трения, при которой энергетические потери на трение будут минимальными.

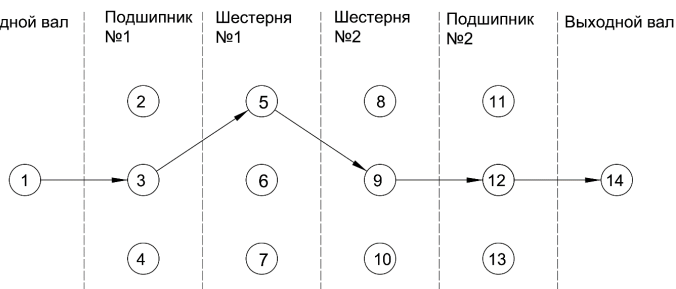


Рис. 5

### Заключение

Таким образом, применяя метод графов можно решать задачи по выбору узлов трения и их элементов, если имеется большой объем данных. При наличии библиотек с элементами узлов трения и их характеристиками методом графов можно получать информацию об энергетических потерях на трение, а также автоматически выбирать сочетания контактирующих и смазывающих материалов или конструктивных решений, определяемых площадью контакта при заданных напряжениях.

- [1] Paynter H.M. Analysis and design of engineering systems: class notes for MIT course 2.751. – Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1960, 303 p.
- [2] Рогов А.Ю. Графовые методы анализа в дискретной математике. – СПб: СПбГТИ(ТУ), 2012, 88 с.
- [3] Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975.
- [4] Pollack M., Wieberson W. // Operation Res. 1960. Vol. 8, No. 2. P. 224.
- [5] Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы и приложения). – М.: Наука, 1969, 424 с.
- [6] Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980, 336 с.
- [7] Чихос Х. Системный анализ в трибонике. – М.: Мир, 1982, 351 с.
- [8] Беркович И.И., Громаковский Д.Г. Трибология. Физические основы, механика и технические приложения. Учебник для вузов / И.И. Беркович, Д.Г. Громаковский; Под ред. Д.Г. Громаковского; Самар. гос. техн. ун-г. Самара, 2000. 268 с.

## ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В СИСТЕМЕ С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова, И.С. Царев

*Институт проблем машиностроения РАН*

Динамическому поведению упругих систем с движущимися нагрузками уделено достаточно внимания в литературе, что связано с широким практическим применением [1-6]. Известно [4, 6], что при движении высокоскоростных нагрузок по упругим направляющим в последних возникают колебания в виде волн деформаций, давление которых дает основной вклад в сопротивление движению. Ниже исследуются динамические процессы в балке, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущимся объектом, являющимся носителем источника колебаний, которые, так или иначе, связаны с эффектами волнообразования. Проведенное сопоставление различных моделей упругого основания в одномерном случае показывает, что речь идет об одной обобщенной модели упругого основания. Таким образом, обобщенную модель упругого основания справедливо называть моделью Вигхардта – Кармана – Филоненко-Бородича – Пастернака – Власова – Леонтьева – Рейсснера – Хетены. Обобщенную модель упругого основания называют двухкоэффициентной, двухпараметрической, но чаще всего – моделью Пастернака.

***Постановка и решение задачи о действии подвижной нагрузки на балку, лежащую на обобщенном упругом основании***

Рассмотрим систему, состоящую из направляющей, вдоль которой по неизвестному закону  $x = l(t)$  движется объект, обладающий моментом инерции  $I_0$  и массой  $m$ , на который действует переменная сила  $P(t)$ . Взаимообусловленное динамическое поведение балки и движущегося по ней объекта описывается системой уравнений

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - c_{II}^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u(x = l(t) + 0, t) &= u(x = l(t) - 0, t) = u(l(t), t) = u_0(t), \\ u_x(x = l(t) + 0, t) &= u_x(x = l(t) - 0, t) = u_x(l(t), t) = w_0(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$I_0 \ddot{w}_0 = IE[u_{xx}], \quad (3)$$

$$m \ddot{u}_0(t) = -\rho F[\alpha^2 u_{xxx} - c_{II}^2 u_x - \dot{l}u_t] + P(t), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} m \ddot{l} &= F_{pr} + Q, \quad F_{pr} = -\frac{1}{2} \rho F [u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + c_{II}^2 u_x^2 - \omega_0^2 u^2 \\ &\quad - 2\alpha^2 u_x u_{xxx} + 2\dot{l}u_x u_t]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от движущейся границы  $w_0(t)$  – поперечное смещение и угол поворота объекта;  $\alpha = \sqrt{IE/\rho F}$ ;  $c_{II} = \sqrt{h_2/\rho F}$ ;  $\omega_0 = \sqrt{h_1/\rho F}$  – наименьшая частота возбуждаемых в балке волн;  $F_{pr}$  – давление волн;  $Q$  – внешняя сила. Для полноты постановки задачи следует задать начальные условия и потребность ограниченность значений  $u(x, t)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Предполагаем, что балка является бесконечной, а движение равномерным и, используя разработанный подход к исследованию подобного рода задач, будем искать установившееся решение слева ( $x < Vt$ ) и справа ( $x > Vt$ ) от движущейся нагрузки в форме бегущей гармонической волны:

$$Ae^{i(\omega t - kx)} \quad (6)$$

Тогда задача определения частот, волновых чисел возбуждаемых волн и критических скоростей движения нагрузки, часто называемая задачей кинематики волн, сведется к решению дисперсионного уравнения:

$$-\omega^2 + \alpha^2 k^4 + c_{II}^2 k^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

совместно с кинематическим инвариантом [4]:

$$\omega - Vk = \Omega, \quad (8)$$

выражающим равенство фаз излучаемых волн в точке, где находится движущийся источник возмущений частоты  $\Omega$ . В случае постоянной силы ( $\Omega = 0$ ) кинематический инвариант запишется в виде  $\omega - kV = 0$ . Одним из основных вопросов при исследовании динамического поведения направляющих под действием движущихся нагрузок является вопрос о критических скоростях. Из условия вырождения корней системы уравнений (7)-(8) получим, что критические скорости движения нагрузки определяются решением уравнения восьмого порядка, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} & \tilde{V}^8 - \beta^2(4 - \tilde{\Omega}^2)\tilde{V}^6 + \\ & + [-9\tilde{\Omega}^2(4 - \tilde{\Omega}^2) + 3\beta^4(2 - \tilde{\Omega}^2) - 8(1 - \tilde{\Omega}^2)]\tilde{V}^4 + \\ & + \beta^2 [36\tilde{\Omega}^2(1 - \tilde{\Omega}^2) - \beta^4(4 - 3\tilde{\Omega}^2) + 16(1 - \tilde{\Omega}^2)^2]\tilde{V}^2 + \\ & + (1 - \tilde{\Omega}^2)(\beta^4 - 4 + 4\tilde{\Omega}^2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tilde{V} = V/\sqrt{\alpha\omega_0}$ ,  $\beta^2 = \frac{c_{II}^2}{\alpha\omega_0}$ ,  $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_0$ .

При движении по направляющей тяжелой массы ( $P(t)=mg$ ,  $I_0 = 0$ ) существует только одна критическая скорость, выражение для которой из (9) находится в явном виде  $V_* = \sqrt{2\alpha\omega_0 + c_{II}^2}$ . Эта скорость совпадает с минимальной фазовой скоростью распространения волн для данной модели (рис. 1) и превышает аналогичную для балки модели Бернулли-Эйлера на винклеровом основании.

На рис. 1 представлены в безразмерном виде зависимости фазовой и групповой скоростей от волнового числа  $k$  для различных параметров  $\beta$  ( $\beta=0.1; 2; 10$ ). Видно (рис. 1), что в диапазоне от 0 до 1 для безразмерных волновых чисел, значения фазовых скоростей волн превосходят значения их групповых скоростей, следовательно дисперсия является нормальной. Аномальная дисперсия наблюдается при превышении этого диапазона. Если  $c_{II} = \sqrt{2\alpha\omega_0}$ , то зависимость групповой скорости от волнового числа линейна (рис. 1б) как для балки модели Бернулли-Эйлера без учета упругого основания.

На рис. 2 представлены изменение прогиба направляющей в системе координат, связанной с движущейся нагрузкой: а) при докритических скоростях 1)  $\beta = 0$ ,  $\tilde{V} = 0$ , 2)

$\beta = 0, \tilde{V} \neq 0, 3) \beta \neq 0, \tilde{V} = 0, 4) \beta \neq 0, \tilde{V} \neq 0$ ; б) при закритических скоростях, 1)  $\beta = 0, 2) \beta \neq 0$ .

Увеличение скорости приводит к более медленному затуханию прогибов с удалением от точки приложения движущегося источника, чем от статической нагрузки (рис. 2а). Как видно, у неподвижной нагрузки или движущейся со скоростью, меньше критической, поле поперечных смещений локализовано около источника и представляет собой суперпозицию спадающих по экспоненте осцилляций. Профиль прогиба под нагрузкой симметричен и экспоненциально падает по мере удаления от нее. Амплитуды волн неограниченно возрастают при критической скорости движения нагрузки, т.е. резонансные условия совпадают с условиями кратности корней задачи кинематики.

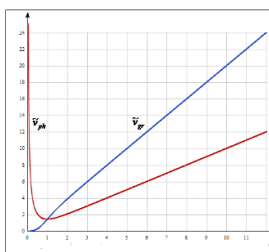


Рис. 1а

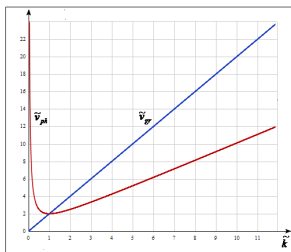


Рис. 1б

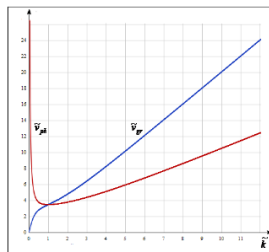


Рис. 1в

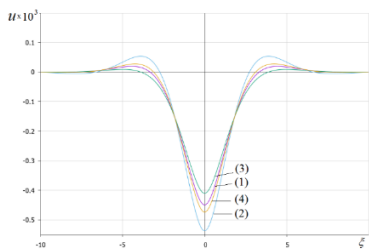


Рис. 2а

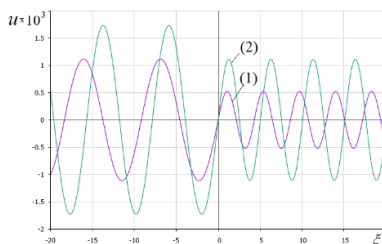


Рис. 2б

Коэффициент затухания нераспространяющейся волны для направляющей, лежащей на обобщенном упругом основании, превосходит аналогичный для балки на винклеровском основании, уменьшаясь с возрастанием скорости. При закритических скоростях движения прогиб в точке приложения силы равен нулю (рис. 2б) для обеих моделей. Источник, движущийся по балке на основании Пастернака, излучает бегущие волны с большими амплитудами, чем по балке на винклеровском основании (рис. 2б).

На основе общего решения задачи получено следующее выражение для давления волн (силы сопротивления движению):



$$F_{pr} = \begin{cases} 0, & V < V_*, \\ -\frac{(mg)^2}{2\rho F\sqrt{(V^2 - c_{II}^2)^2 - 4\alpha^2\omega_0^2}}, & V > V_*. \end{cases} \quad (10)$$

Поскольку собственное поле не оказывает давление на нагрузку, то для  $V < V_*$  имеем  $F_{pr} \equiv 0$  (рис. 3). Случай  $V = V_*$  является «резонансным» значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом  $F_{pr}$ .

На рис. 3 первая кривая построена для балки на винклеровом основании, вторая – на основании модели Пастернака. Начиная со скорости  $V = V_*$  (как было сказано выше), в системе происходит излучение волн по две слева и справа от нагрузки, бегущих в  $+x$  направлении, подобно эффекту Вавилова-Черенкова, оказывая давление на нагрузку. Видно, что при  $V > V_*$  сила давления волн  $F_{pr}$  всегда направлена против движения (тормозящая).

Заметим, что рассмотренная задача дополняет цикл исследований проблем волновой динамики и устойчивости движения высокоскоростных объектов по рельсовым направляющим ракетного трека [7] методическим и расчетным сопровождением при постановке экспериментов по высокоскоростному разгону полезной нагрузки.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-1900613).

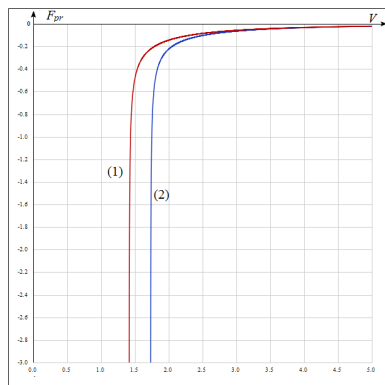


Рис. 3

- [1] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970, 734 с.
- [2] Fryba L. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. — Prague: Academia, 1972, 484 p.
- [3] Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. — Киев: Наукова думка, 1974, 176 с.
- [4] Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками — Москва: Физматлит, 2001, 320 с.
- [5] Иванченко И.И. Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки. — М: Наука, 2011, 574 с.
- [6] Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта. — Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015, 200 с.
- [7] Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 3.

## КИНЕТИКА ПРОЦЕССОВ ПОЛИКОНДЕНСАЦИИ В АЭРОЗОЛЕ

В.Б. Федосеев<sup>1)</sup>, Е.Н. Федосеева<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> ИМХ РАН

<sup>2)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

### Введение

Размерные кинетические эффекты в условиях аэрозоля реализуются в природных и технологических процессах, в которых химический синтез происходит непосредственно в каплях. В частности, в технологии нашли применение такие методы как спрей пиролиз [1], аэрозольный проточный реактор [2], аэрозольная фотополимеризация [3], реактивная распылительная сушка [4] и другие. В спрее возникают условия и состояния, не воспроизводимые в макросистемах [5,6], позволяющие формировать материалы с особой структурой, составом и свойствами.

Наблюдаемые в дисперсных системах кинетические эффекты при химических и фазовых превращениях весьма разнообразны и необычны. Например, нами наблюдались неоствальдовское поведение [7, 8] и долговременные аperiodические осцилляции капель при фазовых превращениях газ–раствор–кристалл [9]. В аэрозолях обнаружена сильная нелинейная зависимость времени жизни продуктов озонлиза [10]. Существенное ускорение фотохимических реакций описано в [11]. Реализован быстрый синтез полипептидных частиц в процессе распылительной сушки [4]. Экспериментально воспроизведён размерный кинетический эффект при полимеризации капель мономера в среде, содержащей раствор инициатора [12] и при поликонденсации [13]. Наиболее детально рассмотрена кинетика процессов на поверхности капель при горении и при гетерогенном катализе. Кинетика химических процессов в объёме частиц аэрозоля рассмотрена менее детально.

Особенностью процессов в спрее является связь концентрации летучих компонентов (растворителей, реагентов и продуктов) в капле с составом газовой фазы. Эта взаимосвязь основана на фазовом равновесии между конденсированной и газовой фазой. Равновесные концентрации летучих компонентов определяются равенством их химических потенциалов в сосуществующих фазах, которое выражается в виде законов Рауля и уравнения Кельвина. При этом равновесная концентрация (молярная доля) летучих компонентов в капле радиуса  $r$  имеет вид

$$x_k(r) = \frac{P_k}{P_{\infty,k}} \exp\left(-\frac{2\sigma V_k}{rRT}\right) \quad (1)$$

где  $P_{\infty,k}$  и  $P_k$  – давление насыщенного пара над чистым компонентом и давление растворителя в газовой фазе,  $\sigma$  – поверхностное натяжение,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура. Для реальных растворов в знаменателе появляется коэффициент активности. Если раствор содержит нелетучие компоненты, уравнение (1) определяет размеры равновесных с газовой средой капель [8].

В работе [14] размерный кинетический эффект смоделирован на примере реакции конденсации типа  $A + B \rightarrow C + S$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  – нелетучие реагенты,  $S$  – летучий растворитель. Скорость реакции описывается выражением

$$v = \frac{dc_A}{dt} = -kc_A c_B = -k \frac{n_A}{V(r)} \frac{n_B}{V(r)} \quad (2)$$

где  $k$  – константа скорости реакции,  $c_K$  и  $n_K$  – концентрация (моль/литр) и число молей реагентов в капле, объём капли равен

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_{nv} + \frac{n_{nv}}{1-x_S(r)} x_S(r) V_S, \quad (3)$$

где  $n_{nv} = \sum_{nonvolatiles} n_i$  и  $V_{nv} = \sum_{nonvolatiles} n_i V_i$  – суммарные число молей и объём нелетучих компонентов в капле,  $\frac{n_{nv}}{1-x_S(r)} x_S(r) = n_S$  – число молей растворителя в капле,  $V_i$  – мольный объём.

Уравнения (1)–(3) позволяют утверждать, что скорость реакций типа  $A + B \rightarrow \dots$  зависит от радиуса капли, причём в каплях она выше, чем в макросистеме.

Формально реакции поликонденсации и конденсации описываются похожими уравнениями  $M + P_\nu \rightleftharpoons P_{\nu+1} + S$ , где  $M$  и  $P$  – мономер и полимер,  $\nu$  – степень полимеризации (длина макромолекулы). Для обратимой реакции скорость является суперпозицией скорости прямой (+) и обратной (–) реакций

$$\begin{aligned} v &= \frac{dc_A}{dt} = v_+ + v_-, & v_+ &= -k_+ \frac{n_M}{V(r)} \frac{n_P}{V(r)}, \\ v_- &= k_- \frac{n_M}{V(r)} \frac{n_S}{V(r)} \end{aligned} \quad (4)$$

здесь рассмотрен вариант, когда растворитель  $S$  одновременно является одним из реагентов.

Состав реакционной смеси при полимеризации является функцией степени превращения мономера (конверсии)  $\alpha = (n_{ini} - n_M) n_{ini}^{-1}$  и равен  $n_M = (1 - \alpha) n_{ini}$ ,  $n_S = \alpha \beta^{-1} n_{ini}$ , и  $n_S = (1 - \alpha + \alpha \beta^{-1}) \frac{x_S(r)}{1-x_S(r)} n_{ini}$ , здесь  $n_{ini}$  – исходное число молей мономера,  $\beta$  – средняя степень полимеризации. Объём также становится функцией конверсии

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{4}{3}\pi r^3 = n_{ini} \left( V_M + \alpha (\Delta_P V - V_S) \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{x_S(r)}{1-x_S(r)} V_S \right) \end{aligned} \quad (5)$$

как и скорости прямой и обратной реакций

$$v_+ = -k_+ n_{ini}^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta V(r)^2}, \quad v_- = k_- n_{ini}^2 \frac{\alpha \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\beta} \right) x_S(r)}{\beta V(r)^2 (1-x_S(r))}. \quad (6)$$

Можно видеть, что влияние радиуса на скорости прямой и обратной реакций отличаются. При этом равновесное состояние  $v_+ + v_- = 0$  зависит от размера капли.

Распределение молекул полимера по размерам, полученное на основе теории разбиений [15], связывает среднюю степень полимеризации с конверсией мономера соотношением

$$\beta \approx \sqrt{\alpha n_{ini} N_{Av}}, \quad (7)$$

где  $N_{Av}$  – число Авогадро.

Уравнения (1), (5)–(7) позволяют моделировать кинетику процесса. Кинетическая модель построена для реакции поликонденсации молочной кислоты. Для этой реакции

кинетические кривые получены экспериментально в [13] (рис. 1). Необходимые для расчёта характеристики компонентов имеются в справочной литературе.

Результат моделирования приведён на рис. 2. При сопоставлении рис.1 и рис. 2 учтено, что эксперимент не позволяет наблюдать состояния каплей до начала фотофиксации (закрашенная область на рис. 2).

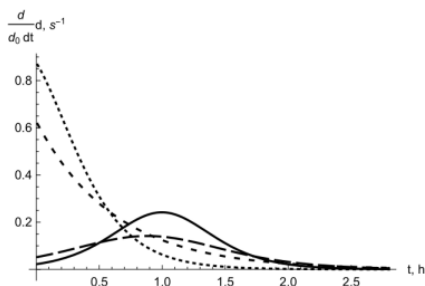


Рис. 1

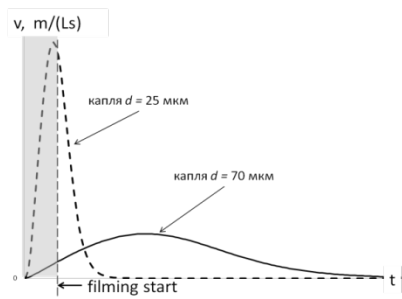


Рис. 2

С увеличением размера каплей максимальная скорость падает, максимум достигается за большее время, и в пределе  $r \rightarrow \infty$  реакция поликонденсации в макросистеме не происходит. В промышленности получение ПЛА (полилактид) требует высоких ( $\sim 150^\circ\text{C}$ ), использования катализаторов, принудительного удаления воды.

Размерные кинетические эффекты кроме очевидного применения при производстве широкого круга функциональных материалов и фармпрепаратов могут представлять интерес при решении фундаментальной проблемы происхождения жизни, расширять условия экспериментов последователей Миллера-Юри.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием ИМХ РАН.

- [1] Leng J. et al. // Chem. Soc. Rev. 2019. Vol. 48, No. 11. P. 3015.
- [2] Bernard F. et al. // J. Aerosol Sci. 2012. Vol. 43, No. 1. P. 14.
- [3] Suvarli N. et al. // Polymers. 2021. Vol. 13, No. 24. P. 4363.
- [4] Glavas L., Odelius K., Albertsson A.C. // Biomacromolecules. 2016. Vol. 17, No. 9. P. 2930.
- [5] Lee J.K. et al. // Proc. Natl. Acad. Sci. 2019. Vol. 116, No. 39. P. 19294.
- [6] Федосеев В.Б., Федосеева Е.Н. // Конденсированные среды и межфазные границы. 2022. № 24(1). С. 101.
- [7] Федосеев В.Б., Федосеева Е.Н. // ЖТФ. 2020. Т. 90. № 6 С. 879.
- [8] Федосеев В.Б., Федосеева Е.Н. // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 5. С. 2229.
- [9] Федосеев В.Б., Максимов М.С. // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, №. 6. С. 424.
- [10] Qiu J. et al. // J. Phys. Chem. Lett. 2019. Vol. 10, No. 19. P. 5748.
- [11] Raula J., Eerikäinen H., Kauppinen E.I. // Int. J. Pharm. 2004. Vol. 284, No. 1-2. P. 13.
- [12] Roshchin D.E., Patlazhan S.A., Berlin A.A. // Eur. Polym. J. 2023. P. 112002.
- [13] Федосеева Е.Н., Федосеев В.Б. // Изв. КБГУ. 2022. Т. 12, № 3. P. 99.
- [14] Федосеев В.Б. // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49, № 8. С. 32.
- [15] Федосеев В.Б. // Вестник ННГУ. 2000. № 1. С. 146.

## **ПРОГРАММНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ КАЛЬЦИЯ В АСТРОЦИТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ**

**А.А. Кашина<sup>1)</sup>, С.Ю. Маковкин<sup>1)</sup>, М.И. Кривоносов<sup>1, 2)</sup>**

*<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

*<sup>2)</sup> ИСП РАН*

### ***Общие положения***

Понимание механизмов обработки информации в мозге является одной из главных и актуальных проблем современной науки. Астроциты регулируют обработку нейрональной информации с помощью изменения концентрации ионов кальция [1]. Несмотря на обширные экспериментальные подходы, недостаточно ясно, каким образом кальций распределяется внутри астроцита [2]. Кальциевые сигналы демонстрируют огромное пространственно-временное разнообразие, механизмы и функции которых недостаточно изучены. Следовательно, создание модели пространственно-временной динамики кальция в астроцитах будет полезно для изучения распространения кальциевых сигналов как внутри отдельной клетки, так и в сети глиальных клеток и, в конечном итоге, для лучшего понимания обработки информации в мозге.

Основной проблемой является решение задачи, связанной с распределением и переносом большого количества вещества внутри клетки - пространственной диффузией со сложными начальными условиями, такая задача не решается в общем виде. Даже небольшое увеличение локальной концентрации кальция, увеличивает вероятность открытия кальциевых каналов, тем самым увеличивая вероятность дальнейшего повышения локальной концентрации кальция [3, 4, 5].

Нетривиальность данной задачи пространственного и временного распределения требует нового подхода, в частности моделирования с использованием клеточных автоматов, что является возможным в связи с существованием компьютеров с высокой степенью параллельности. Клеточные автоматы на данный момент уже широко используются для моделирования диффузионных процессов в изучении и решении нетривиальных проблем гидродинамики [6, 7].

Целью данной работы является моделирование пространственно-временной динамики кальция в астроцитах с использованием клеточных автоматов.

В качестве начальных условий для численных исследований кальциевой динамики в астроцитах, используются данные в виде изображений в градациях серого цвета размером 512x512 пикселей, полученных с помощью микроскопа: начальное распределение вещества в астроците (рис. 1), маска пространственных ограничений (рис. 2), изображение с локализованными источниками (рис. 3).

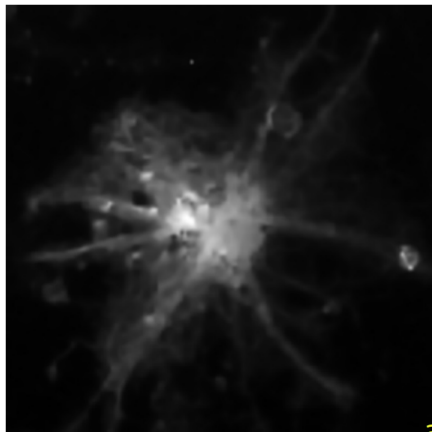


Рис. 1

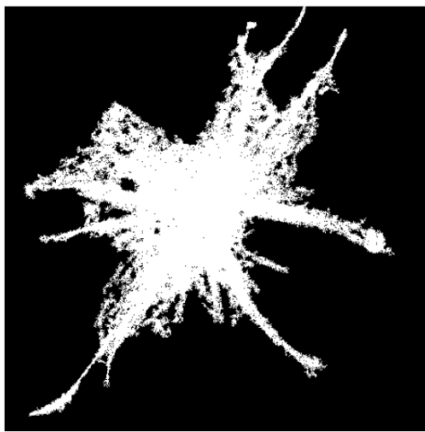


Рис. 2



Рис. 3

В ходе работы был разработан общий алгоритм для моделирования динамики кальция в отдельных астроцитах с использованием клеточных автоматов [8] и численно выявлена область параметров, при которых происходит диффузия кальция в астроцитах. Также проведены вычислительные эксперименты, результаты которых совпадают с данными, полученными в лаборатории Института старения ИББМ ННГУ.

Результатом является компьютерная программа на языке C++, способная моделировать различные кальциевые события и получать пространственно-временные характеристики в виде матриц концентраций в текстовой форме, которые в дальнейшем могут быть преобразованы в изображения и видео.

- [1] Denizot A., Berry H., Venugopal S. // Jaeger D, Jung R (eds) Encyclopedia of Computational Neuroscience. 2020. P. 1.
- [2] Joshi H., Jha B.K. // Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications. 2021. Vol. 1, No. 2. P. 84.
- [3] Agulhon C., Petracz J., McMullen A.B., Sweger E.J., Minton S.K., Taves S.R., Casper K.B., Fiacco T.A., McCarthy K.D. // Neuron. 2008. Vol. 59, No. 6. P. 932.
- [4] Roderick H.L., Berridge M.J., Bootman M.D. // Current Biology. 2003. Vol. 13, No. 11. P. R425.
- [5] Zeng S. et al. // Biophysical journal. 2009. Vol. 97. No. 9. P. 2429.
- [6] Губарев С.В., Берг Д.Б., Добряк П.В. // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 176.
- [7] Mišaić M. et al. // Journal of Hydrology. 2019. Vol. 576. P. 652.
- [8] Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991, 280 с.

## **ЗНАЧЕНИЕ ФЛИККЕР-ШУМА ПРИ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ В МЕТОДЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ**

**С.В. Казачек<sup>1)</sup>, Н.Е. Казачек<sup>2)</sup>**

*<sup>1)</sup> ООО «Газпром проектирование»*

*<sup>2)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Из всех методов неразрушающего контроля метод акустической эмиссии (АЭ) один из самых эффективных способов обнаружения дефектов. В качестве оборудования в методе АЭ используется акустико-эмиссионный измерительный комплекс «Лель»/A-Line 32D (DDM) (далее комплекс «Лель»). Комплекс «Лель» предназначен для проведения неразрушающего контроля и оценки состояния ответственных объектов, подведомственных Ростехнадзору РФ. Целью акустико-эмиссионного контроля является выявление, определение координат и слежение (мониторинг) за источниками АЭ сигналов контролируемых объектов (трубопроводов). Полученная информация после обработки используется для выявления и локализации возможных дефектов в трубопроводе, которые могут привести к экологической катастрофе и человеческим жертвам при их разрушении.

Программа A-Line Stat является дополнительной программой анализа АЭ данных; она предназначена для автоматической кластеризации данных акустической эмиссии. Особенностью данной программы является возможность работы как с импульсами АЭ, так и с осциллограммами.

Основные этапы работы программы:

1. Кластеризация осциллограмм на основании схожести формы спектра. Выделение «кластеров осциллограмм»: а. Разделение осциллограмм, зарегистрированных по разным каналам; б. Кластеризация осциллограмм по схожести формы и спектра.

2. Выделение «пачек» АЭ импульсов, зарегистрированных от одного АЭ события.

3. Кластеризация «пачек» импульсов на основании результатов предварительной кластеризации осциллограмм. Получение «кластеров источников АЭ».

4. Определение характеристик каждого кластера.

После обработки принятых сигналов результаты контроля представляют в виде идентифицированных и классифицированных источников АЭ. При принятии решения по результатам АЭ контроля используют данные, которые должны содержать сведения обо всех источниках АЭ, их классификации и сведения относительно источников АЭ, параметры которых превышают допустимый уровень.

Классификацию источников АЭ выполняют с использованием следующих параметров сигналов: суммарного счета, числа импульсов, амплитуды (амплитудного распределения), энергии, скорости счета, активности, концентрации источников АЭ. В систему классификации также входят параметры нагружения контролируемого объекта и время. Окончательная оценка допустимости выявленных источников АЭ и индикаций осуществляется с использованием измеренных параметров дефектов на основе нормативных методов механики разрушения, методик по расчету конструкций на прочность и других действующих нормативных документов.

Параметры АЭ систем IV класса:

- 1-100 – независимых каналов АЭ,
- 25-500 кГц – полный диапазон частот,



- ФВЧ: 25, 50, 60, 100 кГц – частотные фильтры,
- не более 5мкВ – напряжение (эф.) шума, приведенное к входу,
- 120 ДБ – амплитудный динамический диапазон,
- 4000-10 000 с. – максимальная скорость регистрации в канале событий,
- 1-84 с шагом 0,1-1 ДБ – диапазон регулировки,
- 1-64000 мкс – диапазон установки ИКП, ИКД, ИКК,
- автоматический контроль ПАЭ,
- регистрация сигнала в каждом канале,
- от 4 на систему до 3-х на канал – число параметрических входов,
- портативный, промышленный компьютер,
- Windows – программа сбора данных,
- универсальная программа.

Совершенно очевидно, приведённая как пример аппаратура обладает надёжностью, быстродействием, удобством в использовании. Тем не менее организации, осуществляющие мониторинг магистральных газопроводов отказались от использования данного комплекса и комплексов такого уровня. Известно, что сам метод АЭ имеет ограничения в применении:

- 1) сложность выделения сигналов АЭ;
- 2) высокая стоимость аппаратуры;
- 3) дискриминация локализации;
- 4) многое другое [1].

Метод АЭ – это помехозависимый метод, который, несмотря на внедрение в инженерную практику прецизионных измерительных усилителей, а также цифровую обработку сигналов с помощью специальных программ с использованием методов математического анализа, не находит должного использования в объеме РФ. Одной из важнейших проблем акустико-эмиссионного контроля является снижение шумов в акустическом сигнале. Отношение сигнал/шум – безразмерная величина, равная отношению мощности полезного сигнала к мощности шума:  $ОСШ = P_{\text{сигнал}} / P_{\text{шум}} = A_{\text{сигнал}}^2 / A_{\text{шум}}^2$ , где  $P$  – средняя мощность сигнала,  $A$  – среднеквадратичное значение амплитуды. Оба сигнала измеряются в полосе пропускания системы. Обычно отношение сигнал/шум выражается в децибелах. Чем больше это отношение, тем менее шум влияет на характеристики системы. Шумы разделяют на естественные и технические, аддитивные и мультипликативные. Естественными называют шумы, вызванные фундаментальными физическими причинами, например диссипацией энергии, дискретностью заряда. К техническим относят шумы, вызванные несовершенством технологии изготовления приборов. Исторически техническим шумом называли фликкерный шум, довольно специфический тип шума. Аддитивным называют шум, статистические характеристики которого не зависят ни от напряжения, приложенного к прибору, ни от протекающего через прибор тока. Тепловой шум, выделяющийся на резисторе, является аддитивным шумом. Этот шум всегда присутствует на выводах резистора. Под мультипликативным понимают шум, вызванный флуктуациями параметров элемента, и проявляется при приложении напряжения к этому элементу, либо пропусканием через него электрического тока [2]. Шумы представляют собой случайные процессы и для их описания нужны статистические характеристики, такие как функция корреляции и спектр мощ-

ности шума и др. Рассмотрим фликкерный шум, который, на наш взгляд, вносит наиболее весомый вклад в помехи при регистрации сигнала акустической эмиссии. Фликкерный шум был обнаружен Джонсоном в 1925 году. Теорию шума и его название было предложено Шоттки в 1926 году. Шоттки была установлена обратно пропорциональная зависимость между спектром  $\langle x_n^2 \rangle_f$  шумового тока и самим током  $i_n(t)$ . Отличительной чертой фликкерного шума является форма его спектра. Если обозначить через  $x(t)$  фликкерный случайный процесс, то спектр этого процесса можно выразить выражением

$$\langle x_n^2 \rangle_f = A/f^\gamma \quad (1)$$

Параметр  $A$  в этом выражении специального значения не имеет, считается, что он численно равен высоте спектра на частоте 1 Гц. Параметр  $\gamma$  называется «параметром формы спектра», его величина близка к единице. Из-за того, что параметр  $A$  формы спектра, принимает значение близкое к единицы, то и спектр (1) имеет частотную зависимость вида  $1/f$ , фликкерный шум называют « $1/f$ -шумом». Фликкерный шум – низкочастотный шум, который присутствует не только в прецизионных измерительных устройствах, уровень, совершенства которых важен для осуществления метода АЭ. Многочисленными экспериментальными исследованиями установлено, что фликкерный шум, наблюдаемый практически в любых аналоговых электронных устройствах, источниками которого могут являться неоднородности в проводящей среде, генерация и рекомбинация носителей заряда в транзисторах и т.п. Кроме того фликкер-шум присутствует во всех сферах жизнедеятельности: музыке, биологии, химии, биологии, экономики, социологии. Фликкерные флуктуации обнаружены в длительности обращения Земли вокруг своей оси. При многочисленных исследованиях низкочастотного шума, при его многообразии, природа его до конца не изучена. Определенный интерес имеет проявление фликкер-шума в прецизионных измерительных приборах. Автором статьи F.N. Hooge [3] было проведено исследование фликкер-шума при работе операционного усилителя ADA4622-2, был получен график спектральной плотности напряжения в системе координат  $\langle x_n^2 \rangle_f$  и  $f$  в двойном логарифмическом масштабе.

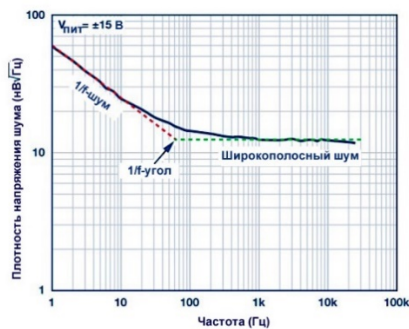


Рис.

На рисунке представлен график спектральной плотности напряжения шума операционного усилителя ADA4622-2, на нем можно выделить две характерные области. Левая часть графика – область 1/f-шума, а в правой части графика преобладает широкополосный шум. Точка пересечения между областями 1/f-шума и широкополосного шума называется 1/f-углом. Было установлено, что угол 1/f- излома зависит от конкретного операционного усилителя. Для напряжения низкочастотного шума стандартным параметром является размах шума в полосе от 0,1 Гц до 10 Гц. С помощью значений угла 1/f- излома можно выбрать оборудование для метода АЭ при мониторинге трубопровода, где «сигнал/шум», будет наибольшей.

Интересен тот факт, что график спектральной плотности напряжения шума по внешнему виду совпадает с графиком кривой усталости, где устанавливается зависимость между пределом выносливости и числом циклов наработки [4]. Как характеристики шумов, так и кривой усталости отражают состояние структуры. Довольно естественной представляется идея связать низкочастотный шум, а конкретно 1/f-шум, с релаксационными явлениями в твердых телах. Обратное время релаксации в твердых телах совпадает с частотой на которых наблюдается 1/f-шум.

В заключении можно сделать вывод: фликкер-шум способен ограничить эффективность любого прецизионного низкочастотного оборудования. В настоящее время борьба с шумом происходит с применением различных фильтров, а также определенными действиями таких как стабилизация прерыванием, переменное возбуждение. Эти методы имеют свои недостатки; незначительно устраняют действие шума.

В настоящее время развивается область наноэлектроники, связанной с разработкой полупроводниковых приборов с квантово-размерными структурами. Предполагается, что такие приборы из-за малых размеров активной области должны обладать сравнительно небольшим количеством подвижных дефектов, которые производят 1/f-шум. Изучение шумов, в большей степени фликкерного-шума, является важной задачей специалистов, осуществляющих контроль работы магистральных газопроводов. С улучшением прецизионной аппаратуры в мониторинг контроля сложных объектов таких как магистральные газопроводы все больше будут применяться методы АЭ, как надежного, информативного и в экономическом плане приемлемом варианте.

- [1] Казачек Н.Е., Казачек С.В. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2015. Т. 22, № 5. С. 585.
- [2] Якимов А.В. Физика шумов и флуктуация параметров. Электронное учебное пособие. – Нижний Новгород, 2013. 108 с.
- [3] Hooge F.N. // IEEE Transactions on Electron Devices. 2004. Vol. 41. P. 11.
- [4] Казачек Н.Е. Оценка усталостной долговечности рессор автомобиля с учетом фреттинг-износа: дис. канд. техн. наук: 05.05.03 / Казачек Нина Егоровна – Н. Новгород, 2000. 163 с.

## МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ И УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

А.Е. Китаев

*АО «ННПО имени М.В.Фрунзе»*

### *Введение*

В 2019 году в докладе [1] автором было рассмотрено нелинейное диффузионное уравнение, одно из решений которого может описать фазовый переход первого рода. Последовательность действий при записи этого уравнения может быть следующей.

Первый шаг: для неизвестной величины  $n$  (концентрации частиц) задается алгебраическое уравнение 3-й степени (с пока неуточненными коэффициентами)

$$a_0 n^3 + b_0 n^2 + c_0 n + d_0 = 0. \quad (1)$$

Второй шаг: уравнение (1) записывается через свои корни  $n_1, n_2, n_3$ , причем корень  $n_1$  считается наименьшим, а  $n_3$  – наибольшим (если существуют 3 действительных корня):

$$a_0(n - n_1)(n - n_2)(n - n_3) = 0. \quad (2)$$

После перемножения получим

$$a_0(n^3 - n^2(n_1 + n_2 + n_3) + n(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) - n_1 n_2 n_3) = 0. \quad (3)$$

Третий шаг: записывается дифференциальное уравнение диффузии в следующем виде (с добавлением полинома из уравнения (3), деленного на  $a_0(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)$ ):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \frac{1}{\tau} \left( \frac{n^3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} - \frac{n^2(n_1 + n_2 + n_3)}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} + n - \frac{n_1 n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3} \right). \quad (4)$$

Здесь  $n$  – концентрация (как и выше),  $D$  – коэффициент диффузии,  $\tau$  – постоянная времени. Это уравнение можно записать в менее громоздкой форме:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n - \delta(n - n_1)(n - n_2)(n - n_3), \quad (5)$$

где

$$\delta = \frac{1}{\tau(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3)}. \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет следующее одномерное решение:

$$n = \frac{n_1 + n_3 \exp\left(s\sqrt{\frac{\delta}{2D}}(n_1 - n_3)(x - x_0 - ts\sqrt{2D\delta}\left(\frac{n_1 + n_3}{2} - n_2\right))\right)}{1 + \exp\left(s\sqrt{\frac{\delta}{2D}}(n_1 - n_3)(x - x_0 - ts\sqrt{2D\delta}\left(\frac{n_1 + n_3}{2} - n_2\right))\right)} \quad (7)$$

В этой формуле  $s = \pm 1$ ,  $x_0$  – любое число. Данное решение соответствует движущемуся вдоль оси  $x$  переходу между фазами. При удалении от границы раздела концентрация частиц в одной фазе стремится к величине  $n_1$  (это, напомним, наименьший корень), концентрация в другой фазе – к величине  $n_3$ .

Возникает вопрос: какие значения могут иметь коэффициенты уравнений (1) и (5)?

### Методика

Так как речь в данной задаче идет не о распространении в среде некоторой инородной примеси, а о динамике среды однородного химического состава, можно предположить, что величина  $D$  соответствует коэффициенту самодиффузии.

Далее вспомним одно из уравнений состояния реального газа - уравнение Ван-дер-Ваальса, записанное через молярный объем [2]:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \quad (8)$$

В этом выражении  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $R$  – газовая постоянная,  $V_m$  – молярный объем. Величину, обратную молярному объему, можно записать так:

$$\frac{1}{V_m} = \frac{\rho}{\mu} = n \frac{m_0}{\mu}. \quad (9)$$

Здесь  $\mu$  – молярная масса вещества среды,  $\rho$  – ее плотность,  $m_0$  – масса одной частицы,  $n$  – концентрация.

Разделим уравнение (8) на  $V_m$ .

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)\left(1 - \frac{b}{V_m}\right) = \frac{RT}{V_m}. \quad (10)$$

Теперь учтем выражение (9). Тогда

$$\left(p + a\left(n \frac{m_0}{\mu}\right)^2\right)\left(1 - bn \frac{m_0}{\mu}\right) = RTn \frac{m_0}{\mu} \quad (11)$$

или

$$ab\left(\frac{m_0}{\mu}\right)^3 n^3 - a\left(\frac{m_0}{\mu}\right)^2 n^2 + (RT + pb)\frac{m_0}{\mu} n - p = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) мы будем рассматривать как аналог уравнения (1). Это позволяет записать следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= ab\left(\frac{m_0}{\mu}\right)^3 = ab\left(\frac{1}{N_A}\right)^3, \\
 b_0 &= -a\left(\frac{m_0}{\mu}\right)^2 = -a\left(\frac{1}{N_A}\right)^2, \\
 c_0 &= (RT + pb)\frac{m_0}{\mu} = (RT + pb)\frac{1}{N_A}, \\
 d_0 &= -p.
 \end{aligned} \tag{13}$$

В этих выражениях  $N_A$  – число Авогадро.

Вынесем за скобки множитель при  $n$  в формуле (12) (чтобы слагаемое “ $n$ ” осталось без коэффициента).

$$\frac{RT + pb}{N_A} \left( \frac{ab\left(\frac{1}{N_A}\right)^3 n^3}{(RT + pb)\frac{1}{N_A}} - \frac{a\left(\frac{1}{N_A}\right)^2 n^2}{(RT + pb)\frac{1}{N_A}} + n - \frac{p}{(RT + pb)\frac{1}{N_A}} \right) = 0. \tag{14}$$

Сравним это с выражением (4) (куда слагаемое “ $n$ ” внутри скобок также входит без коэффициента). И после этого запишем уравнение диффузии так:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n - \frac{1}{\tau} \left( \frac{ab\left(\frac{1}{N_A}\right)^2 n^3}{RT + pb} - \frac{a\frac{1}{N_A} n^2}{RT + pb} + n - \frac{pN_A}{RT + pb} \right). \tag{15}$$

Значение постоянной времени  $\tau$  (времени релаксации) в данном уравнении остается неопределенным. Можно сказать, что величина  $1/\tau$  получается при умножении внескобочного множителя из левой части уравнения (14)

$$\frac{RT + pb}{N_A}$$

на некоторую величину  $h_0$  с размерностью момента импульса (при этом неопределенность «переносится» от константы  $\tau$  к константе  $h_0$ ). Также уточним – давление  $p$  здесь считается величиной, не зависящей от пространственных координат.

Зададимся вопросом: каков физический смысл нелинейных членов диффузионного уравнения? Эти члены могут быть источниками, производительность которых зависит от концентрации. Кроме того эти слагаемые могут иметь «силовое» происхождение. Поясним: уравнение диффузии при наличии сил имеет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n - \text{div}(n\mu_F \mathbf{F}). \tag{16}$$

Здесь  $\mathbf{F}$  – некоторое силовое поле, зависящее от координат и времени, а  $\mu_F$  – подвижность частиц, определяемая через их скорость следующей формулой:

$$\mathbf{V} = \mu_F \mathbf{F}. \tag{17}$$

В газе и жидкости не происходит постоянного рождения (или уничтожения) частиц. В отличие, например, от легированного  $n$ -полупроводника, где нижние энергетические уровни можно рассматривать как резервуар электронов, откуда они под влиянием различных физических факторов переносятся в зону проводимости («поднявшись» туда, они подчиняются уравнению диффузии). Поэтому разумно принять гипотезу, что нелинейные члены в диффузионном уравнении (15) появляются за счет действия силового поля. Это «внутреннее» поле не связано с градиентом заданного давления  $p$  (напомним: величина  $p$  в нашей модели не зависит от координат).

Пусть подвижность постоянна. Также пусть силовое поле - потенциальное, то есть

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \varphi_0. \quad (18)$$

В этой формуле  $\varphi_0$  – некий потенциал. В этом случае уравнение диффузии (16) записывается так:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n + \mu_F n \Delta \varphi_0 + \mu_F \text{grad } \varphi_0 \text{grad } n. \quad (19)$$

Сравним формулу (19) с формулой (15). Получим

$$\begin{aligned} \mu_F n \Delta \varphi_0 + \mu_F \nabla \varphi_0 \nabla n \\ = -\frac{1}{\tau} \left( \frac{ab \left( \frac{1}{N_A} \right)^2 n^3}{RT + pb} - \frac{a \frac{1}{N_A} n^2}{RT + pb} + n - \frac{pN_A}{RT + pb} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

или (после деления на  $\mu_F n$ )

$$\Delta \varphi_0 = -\nabla \varphi_0 \frac{\nabla n}{n} - \frac{1}{\tau \mu_F n} \left( \frac{ab \left( \frac{1}{N_A} \right)^2 n^3}{RT + pb} - \frac{a \frac{1}{N_A} n^2}{RT + pb} + n - \frac{pN_A}{RT + pb} \right). \quad (21)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение для определения потенциала  $\varphi_0$  (если концентрацию  $n$  считать известной).

В заключение доклада отметим, что, возможно, данный потенциал родственен используемому в теории адсорбции «адсорбционному потенциалу» (см., например, [3],[4]). Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

- [1] Китаев А.Е. Нелинейное уравнение диффузии и фазовый переход жидкость-газ // Труды XXIII конференции по радиофизике, ННГУ, 2019.
- [2] Матвеев А.Н. «Молекулярная физика» – М.: «Высшая школа», 1981.
- [3] Улитин М.В., Филиппов Д.В., Федорова А.А. «Поверхностные явления. Адсорбция». – Иваново: ИГТХУ, 2014.
- [4] Никифоров И.А. «Адсорбционные методы в экологии». – Саратов: СГУ, 2011.

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ БАКТЕРИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ К ХИМИЧЕСКОМУ АТТРАКТАНТУ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

М.И. Кривоносов<sup>1)</sup>, С.В. Денисов<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н. И. Лобачевского

<sup>2)</sup> Столичный университет Осло

### Введение

Значительный интерес исследований в области хемотаксиса бактерий вызван возможностью использования бактерий для задач таргетной доставки лекарств [1]. Адаптация бактерий к различным условиям окружающей среды возможна благодаря разнообразию размеров, форм, способов передвижения и способности к высокой чувствительности концентрации веществ. Численное моделирование движения бактерий позволяет установить пространственные распределения числа бактерий для произвольно выбранного паттерна движения [2]. В то же время теория линейного хемотаксиса позволяет найти общий вид распределения числа бактерий с учетом диффузии [3]. Объединение этих двух методов в данной работе позволило оценить коэффициент химической чувствительности и коэффициент диффузии для двух типов бактерий *E.Coli* и *V.Alginolyticus*. Характерным отличием этих двух типов бактерий является присущий им паттерн случайного блуждания. Для *E.Coli* характерна двухстадийная схема движения: движение вперед и поворот в случайном направлении в среднем на фиксированную величину угла. Паттерн движения *V.Alginolyticus* состоит из трех чередующихся этапов: движение вперед, реверсивное движение, поворот на некоторый угол.

### Описание модели хемотаксиса бактерий

Экспериментальные данные показывают наличие характерного паттерна при движении бактерий, описываемого следующей общей схемой [4]: выбирается некоторое начальное направление движения; бактерия движется в выбранном направлении; с некоторой частотой происходит переориентация бактерии (изменение направления движения).

Паттерны различных бактерий отличаются способом и частотой переориентации. При проведении экспериментов показано, что бактерии реагируют на концентрацию вещества и движутся в направлении роста концентрации [3]. Способность бактерий к исследованию среды по концентрации некоторого вещества называется хемотаксисом. В соответствии с линейно теорией хемотаксиса моделирование состояния бактерии описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} \dot{m}_0 = -\lambda m_0 + C_{bact}(t), \\ \dot{m}_1 = -\lambda m_1 + m_0, \\ \dot{m}_2 = -\lambda m_2 + m_1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C_{bact}(t)$  определяет концентрацию в точке пространства бактерии в момент времени  $t$ ,  $m_0, m_1, m_2$  – фазовое пространство, определяющее частоту переориентации бактерии в соответствии с (2):



$$Q(t) = m_0(t) - \frac{m_1(t)}{2} - \frac{m_2(t)}{4},$$

$$\lambda(t) = \lambda \cdot (1 - A \cdot Q(t)),$$
(2)

где коэффициент  $\lambda = 1$ ,  $A = 0.0458$  – амплитуда дельта-функции отклика,  $\lambda(t)$  – частота переориентации бактерии. На каждом шаге итерационного алгоритма с шагом  $\Delta t = 0.01$  с осуществляется выбор для бактерии: переориентация с вероятностью  $p = \min \{1, \lambda \cdot \Delta t\}$ , иначе продолжение движения в том же направлении.

### **Общий алгоритм симуляции движения колонии бактерий**

Рассмотрим движение колонии бактерий в среде с радиальным источником вещества и слабым градиентом:

$$C(r) = \frac{10^3}{3 \cdot 10^2 + r},$$

$$|\nabla C(r)| = \frac{10^3}{(3 \cdot 10^2 + r)^2}.$$
(3)

В качестве области симуляции выберем основную сферу так, что градиент на поверхности сферы будет достаточно слабым: сфера с радиусом  $R = 2000$  мкм = 2 мм, тогда  $\nabla C(R) = \frac{10^3}{(3 \cdot 10^2 + R)^2} = \frac{1}{5290} \approx 0.0002$ .

Предположительно бактерии должны образовывать около центра сферы стационарный рой. Отдельные бактерии могут как пополнять рой, так и улетать от него сколько угодно далеко.

Введем трехмерную систему координат, так что начало координат совпадает с источником вещества. Пусть весь объем основной сферы разбит на  $N_{segments}$  равновеликих слоев  $S_j$  (объемом  $\Delta V$ ) концентрическими сферами радиуса  $r_j$ :

$$S_j = \{(x, y, z) : r_{j-1} \leq x^2 + y^2 + z^2 < r_j\},$$

$$r_0 = 0, \quad r_j = \sqrt[3]{\frac{\Delta V \cdot j}{\frac{4\pi}{3}}}, \quad \Delta V = \frac{4\pi}{3} R^3 / N_{segments}$$
(4)

Пусть  $N_j(t)$  – число бактерий в момент времени  $t$  в слое  $S_j$ ,  $S_{aux}$  – вспомогательный слой между сферами радиуса  $R_{aux} = 1800$  мкм и  $R$ .

Схема алгоритма:

- Создать  $N = 2 \cdot 10^9$  бактерий, используя равномерное распределение по объему сферы радиуса  $R$ . Начальное направление скорости выбрать случайно равномерно из всех возможных направлений. Величину скорости задать одинаковой и постоянной для всех бактерий. Подсчитать  $N_j(0)$  для всех сегментов сферы.
- Запустить движение бактерий в соответствии с выбранным паттерном с фиксированным шагом  $dt$  по времени.

- Каждые  $K$  шагов по времени при уменьшении числа бактерий в вспомогательном слое ниже начального числа  $N_{\text{aux}}(0)$  добавить в слой недостающее число бактерий до начального уровня.
- Остановить движение бактерий по достижении времени  $T = 2 \cdot 10^4 \text{ с} = 5.5 \text{ часов}$ .

### **Паттерны движения *E. Coli* и *V. Alginolyticus***

*E. Coli* (кишечная палочка) демонстрирует паттерн движения, состоящий из двух этапов:

- движение вдоль выбранного направления (Run);
- остановка и вращение с изменением направления последующего движения (Tumble).

Первый этап занимает в среднем одну секунду, а второй – 0.1 с, поэтому при симуляции движения бактерий можно пренебречь временем вращения. При переориентации вектора скорости отклонение от направления движения осуществляется на фиксированный угол  $\alpha_{EC} = 62^\circ$  [4], а вращение вдоль направления движения на произвольный случайный угол  $\phi$ , который выбирается из равномерного распределения  $U[0, 2\pi]$ . Частота переориентации  $\lambda_{EC} = 1$ , скорость движения  $v_{EC} = 19 \frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ .

*Vibrio Alginolyticus* в свою очередь демонстрирует паттерн из трех этапов:

- движение вдоль выбранного направления (Run);
- движение в противоположном направлении (Reverse);
- остановка и вращение с изменением направления последующего движения (Flick).

Основное отличие в добавленном этапе движения в противоположном направлении, который эмулируется в программе выбором противоположного вектора скорости движения бактерий. Частота переориентации  $\lambda_{E.Coli} = \frac{10}{3}$ , средний угол поворота  $\alpha_{VA} = 110^\circ$  [5], скорость движения  $v_{VA} = 45 \frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ .

### **Оценка коэффициента диффузии**

В ходе численного эксперимента была рассчитана величина среднего квадрата расстояния от начала координат в зависимости от времени для каждого типа бактерий. Результирующая зависимость на участке времени  $[0, T]$  представляет собой линейную функцию, что позволяет оценить коэффициенты диффузии для каждого из типов бактерий в соответствии с соотношением для трехмерного случая:

$$6Dt = \langle |r|^2 \rangle \quad (5)$$

В результате расчета были получены следующие значения коэффициентов: для *E.Coli*  $D_{EC} = 116.9 \frac{\text{мкм}^2}{\text{с}}$ , для *V.Alginolyticus*  $D_{VA} = 96.8 \frac{\text{мкм}^2}{\text{с}}$ .

### **Оценка химической чувствительности бактерий**

Модель плотности бактерий  $n(r, t)$  во времени в трехмерном пространстве описывается уравнением диффузии с учетом линейной зависимости скорости бактерий от концентрации:

$$\frac{dn}{dt} = \nabla(D\nabla n - n\chi(C)\nabla C), \quad (6)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $\chi(C)$  – химическая чувствительность.

Рассмотрим стационарное решение уравнения при условии  $\chi(C) \equiv \chi$ :

$$n(r) = n_{\infty} \exp\left(\frac{\chi}{D} C(r)\right), \quad (7)$$

где  $n_{\infty}$  – постоянная концентрация бактерий на бесконечном удалении от химического источника,  $C(r)$  – концентрация вещества в зависимости от расстояния от центра хемотактанга. Распределение концентрации бактерий относительно радиуса в случае с постоянной концентрацией бактерий в граничном слое была аппроксимирована с применением следующей функции:

$$n(r) = n_{\infty} \exp\left(\frac{\chi}{D} C(r)\right) + n_{\text{aux}} \cdot n_{\infty}, \quad (8)$$

где  $n_{\text{aux}}$  – концентрация бактерий в вспомогательном слое.

Рассчитанные коэффициенты диффузии были использованы для каждого из типов бактерий при численной аппроксимации параметров. В результате оценки параметров были получены коэффициенты химической чувствительности бактерий: для *E.Coli*  $\chi_{EC} = 0.97$ , для *V.Alginolyticus*  $\chi_{VA} = 1.25$ .

### ***Заключение***

В работе приведены численные расчеты параметров модели хемотаксиса для двух видов бактерий *E.Coli* и *V.Alginolyticus*. Получены значения для коэффициентов диффузии бактерий, а также для индивидуальной химической чувствительности бактерии для рассмотренных двух паттернов движения.

Результаты данной работы могут быть использованы в дальнейшем для численной оценки зависимости концентрации бактерий относительно расстояния от центра химического аттрактанта в зависимости от профиля концентрации химического вещества для двух видов бактерий без проведения сложных вычислительных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-12-10496).

- [1] Zhou Y., Han Y. // *Engineering Microbiology*. 2022. Vol. 2, No. 3. P. 100034.
- [2] Pankratova E.V. et al. // *PLoS One*. 2018. Vol. 13, No. 1. P. e0190434.
- [3] Taktikos J, Stark H, Ziburdaev V. // *PLoS One*. 2013. Vol. 8, No. 12: P. e81936.
- [4] Berg HC, Brown DA. // *Nature*. 1972. Vol. 239. P. 500.
- [5] Xie L. et al. // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2011. Vol. 108, No. 6. P. 2246.

## ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕНЕРАЦИИ НЕЙРОПОДОБНЫХ СИСТЕМ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ СВЯЗИ

Е.Е. Максина, Е.В. Панкратова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

### Введение

Характеристики реальных систем, живых и искусственных, могут качественно меняться под воздействием внешних флуктуаций. Характер влияния может быть различным – с одной стороны, шум может ухудшать характеристики функционирования, с другой стороны, приводить к появлению более регулярного режима генерации.

В данной работе рассматривается отклик идентичных случайно возмущенных взаимодействующих систем Ходжкина-Хаксли при наличии одинакового внешнего постоянного тока. Полученные результаты показывают, что при изменении амплитуды постоянного тока наличие шума может серьезно влиять на характер активности нейронов. Обнаружено, что в зависимости от изначально выбранного режима динамического поведения нервной клетки шум может либо усиливать (интервал между спайками может быть значительно уменьшен), либо задерживать отклик нейронов.

### Математическая модель биологической системы

Рассмотрим систему связанных нейроподобных элементов, динамика каждого из которых моделируется уравнениями Ходжкина-Хаксли [1-5]. Одно из уравнений в четырехмерной системе нелинейных дифференциальных уравнений  $i$ -ой клетки описывает изменение во времени мембранного потенциала:

$$C_m \frac{dV_i}{dt} = I_{ion}(V_i, m_i, h_i, n_i) + I_{dc} + I_{syn}^{i,j}(V_{i,j}(t)) + \xi_i(t). \quad (1)$$

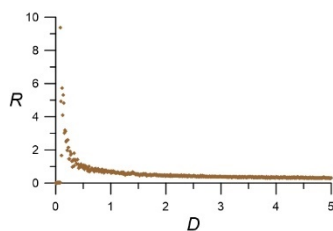
Правая часть уравнения (1) включает в себя общий мембранный ток  $I_{ion}(V, m, h, n)$ , учитывающий компоненты калиевого, натриевого и тока фоновой утечки:  $I_{ion}(V, m, h, n) = -G_K n^4 (V - V_K) - G_{Na} m^3 (V - V_{Na}) - G_L (V - V_L)$ , где параметры  $G_K, G_{Na}, G_L$  – это максимальные значения проводимости для калиевого, натриевого и канала утечки, а  $V_K, V_{Na}, V_L$  – соответствующие реверсивные потенциалы. Также в уравнении (1) учитывается наличие постоянного тока  $I_{dc}$ , определяющего динамический режим функционирования индивидуальной нервной клетки [3, 5], шума  $\xi(t)$  с интенсивностью  $D$  [4] и зависящее от мембранного потенциала слагаемое  $I_{syn}(t)$ , моделирующее тип связи взаимодействующих клеток. В данной работе рассмотрены два типа связи: через электрические и химические синапсы [4]. Следует отметить, что в полную систему четырех дифференциальных уравнений каждой  $i$ -ой клетки также входят три уравнения, описывающие кинетику перераспределения частиц через мембрану при наложении электрического поля, в которых переменные  $m$  и  $h$  отвечают за активацию и инактивацию  $Na^+$ -тока, а переменная  $n$  контролирует активацию  $K^+$ -тока. Все функции и значения параметров, используемые в данном исследовании, были выбраны классическими, их полное описание можно найти, например, в работе [3].

В действительности нейроны постоянно получают какие-то сигналы от соседних клеток, при этом в процессе диффузии нейротрансмиттеров происходят случайные колебания и т. д. Любое такое возбуждение вызывает протекание токов через мембрану клетки. Следовательно, суммарный внешний стимул, полученный нейроном, можно рассматривать как  $I_{dc} + \xi_i(t)$ , где  $\xi_i(t)$  – стохастическая составляющая поступающего сигнала. Согласно экспериментальным данным, а также результатам численных моделирований, проводимых различными авторами, гауссова стимуляция достаточно неплохо описывает общий ток, поступающий на нейрон при возникновении множества некоррелированных синаптических событий [3-8]. Таким образом, в данной работе стохастическая компонента  $\xi_i(t)$  моделируется как белый гауссов шум с нулевым средним и корреляционной функцией  $\langle \xi_i(t)\xi_j(t + \tau) \rangle = D\delta_{ij}\delta(\tau)$ , и рассматривается как аддитивный флуктуирующий ток в уравнении (1). Взаимодействие нейронов через электрические синапсы выражается как  $I_{syn}^{i,j}(V_{i,j}(t)) = g_e(V_j - V_i)$ , где  $g_e$  – параметр, отвечающий за силу связи между  $i$ -й и  $j$ -й клетками. Взаимодействие нейронов через химические синапсы моделируется как  $I_{syn}^{i,j}(V_{i,j}(t)) = -g_{inh} \frac{V_{i,j}(t) - V_{inh}}{1 + \exp(-\lambda V_{j,i}(t))}$ .

### Результаты исследований

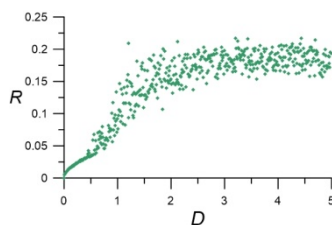
Результаты, полученные для изолированной нервной клетки как в детерминированном случае, так и при наличии случайного внешнего воздействия, были ранее опубликованы в трудах 20-й Научной конференции по радиофизике, посвященной 110-летию со дня рождения Г.С. Горелика [9], а также в сборнике тезисов 76-й Всероссийской с международным участием школе-конференции молодых ученых «Биосистемы: организация, поведение, управление» [10].

В данной работе для системы, состоящей из двух элементов Ходжкина-Хаксли, связь между которыми реализуется посредством электрического и химического синапсов, показано сохранение наблюдаемого ранее эффекта «*noise delayed spiking*», при котором наблюдается увеличение времени отклика клетки на внешний сигнал в определенном диапазоне интенсивности шумового воздействия.



◆ ◆ ◆  $I_{dc} = 8 \mu A/cm^2$

Рис. 1



◆ ◆ ◆  $I_{dc} = 8.5 \mu A/cm^2$

Рис. 2

На рис. 1 и рис. 2 (для модели взаимодействия посредством электрического синапса), а также на рис. 3 и рис. 4 (для модели взаимодействия посредством химического

синапса) проиллюстрирован анализ значений так называемого отношения «шум-сигнал», который определяется как отношение среднеквадратического отклонения межпульсных интервалов к их среднему.

Показано, что при различном выборе параметра  $I_{dc}$ , определяющего динамический режим функционирования индивидуальной нервной клетки, изменяется не только величина максимумов рассматриваемой характеристики, но и их смещение: увеличение  $I_{dc}$  вызывает уширение характеристики со смещением максимума в область больших значений интенсивности шума  $D$ .

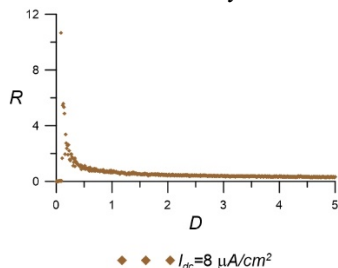


Рис. 3

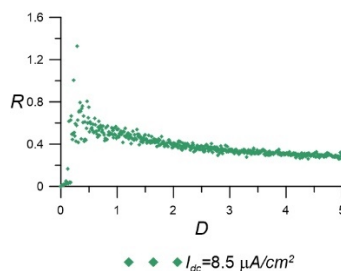


Рис. 4

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации на государственную поддержку ведущих научных школ № НШ-2653.2020.2.

- [1] Hodgkin A.L., A.F. Huxley. // J. Physiology. 1952. Vol. 117. P. 500.
- [2] Kandel E.R., Schwartz J.H., Jessel T.M. Principles of Neural Science. – Norwalk: Appleton & Lange, 1135 p.
- [3] Pankratova E.V., Polovinkina A.V., Mosekilde E. // The European Physical Journal B. 2005. Vol. 45. P. 391.
- [4] Wang Q., Zhang H., Perc M., Chen G. // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. Vol. 17. P. 3979.
- [5] Lee S.-G., Neiman A., Kim S. // Phys. Rev. E. 1998. Vol. 57. P. 3292.
- [6] Mainen Z.F., Sejnowski T.J. // Science. 1995. Vol. 268. P. 1503.
- [7] Juusola M., French A.S. // Neuron. 1997. Vol. 18. P. 959.
- [8] Liu F., Wang W., Yao X. // Biol. Cybern. 1997. Vol. 77. P. 217.
- [9] Максина Е.Е., Панкратова Е.В. // В кн.: Тр. XX научн. конф. по радиофизике. 12-20 мая 2016 г. / Ред. С.В. Оболенский, В.В. Матросов – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2016. С. 276.
- [10] Максина Е.Е., Панкратова Е.В. // В кн.: Тр. научн. конф. «Биосистемы: организация, поведение, управление». 2023. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2023. С. 203.

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СВЯЗИ РЕЗУЛЬТАТОВ ЕГЭ С АКАДЕМИЧЕСКОЙ УСПЕВАЕМОСТЬЮ СТУДЕНТОВ ПЕРВОГО КУРСА РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

О.Н. Минаева

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В последнее время изучение физико-математических дисциплин студентами первого курса радиофизического факультета ННГУ им. Лобачевского сопряжено со значительными трудностями. Недостаточный уровень подготовки выпускников школ по физике и математике приводит к неспособности большинства первокурсников в полном объеме усваивать академические дисциплины ВУЗа, что является причиной получения ими неудовлетворительных оценок по механике и математическому анализу.

Цель данной работы – выявление статистической зависимости баллов ЕГЭ и результатов зимней экзаменационной сессии, полученных студентами первого курса радиофизического факультета, обучающихся по специальности «Радиофизика».

В 2022 году средний балл ЕГЭ по физике, математике и русскому языку абитуриентов, поступивших на Радиофизический факультет (бюджет), составил 67, 59 и 74 балла соответственно.

Трудности при усвоении математического анализа связаны с тем, первая часть ЕГЭ по математике лишь поверхностно затрагивает такие темы школьного курса как функции, преобразования алгебраических выражений, уравнения и неравенства. Так, например, за правильно решенную первую часть ЕГЭ по математике, предусматривающую только задания с кратким ответом, можно получить 64 балла, что вполне сопоставимо со средним баллом студента-первокурсника радиофизического факультета.

Для построения эконометрической модели использовались следующие переменные:

*math* – балл ЕГЭ по математике;

*phys* – балл ЕГЭ по физике;

*mech* – оценка за экзамен по механике;

*math\_an* – оценка за экзамен по математическому анализу.

Матрица парных корреляций представлена в табл. 1.

Табл. 1

	<i>math</i>	<i>phys</i>	<i>mech</i>	<i>math_an</i>
<i>math</i>	1,000			
<i>phys</i>	0,555	1,000		
<i>mech</i>	0,509	0,564	1,000	
<i>math_an</i>	0,477	0,643	0,732	1,000

Между всеми переменными наблюдается положительная корреляция, причем более всего коррелируют оценки по механике и математическому анализу.

Кроме того, коэффициент корреляции между ЕГЭ по физике и экзаменом по математическому анализу несколько выше, чем между этим же экзаменом и ЕГЭ по математике. Получается, что результат ЕГЭ по физике обладает большей дифференцирующей способностью, чем по математике, и соответственно должен быть определяющим

при поступлении на радиофизический факультет, поскольку демонстрирует готовность абитуриента к обучению в ВУЗе.

В последнее время число часов, отводимых на физику уменьшено и доведено до двух часов в неделю. Это привело соответственно к уменьшению решения количественных и особенно качественных задач, формирующих логическое мышление. Кроме того, наблюдается негативная тенденция сокращения числа школьников, выбирающих физику в качестве единого государственного экзамена, в пользу выбора ими ЕГЭ по информатике.

Многие российские ВУЗы при поступлении на физические факультеты предлагают абитуриентам альтернативу – ЕГЭ по информатике. Такое нововведение может еще более усугубить возникший разрыв между необходимым минимумом для усвоения университетского курса физико-математических дисциплин и фактическим уровнем знаний выпускника.

Проанализируем построенные модели множественной регрессии (модель 1 и модель 2), позволяющие оценить взаимосвязь результата экзаменов по математическому анализу и механике с баллами ЕГЭ по физике и математике соответственно.

Построение эконометрических моделей осуществлялось в пакете Gretl методом наименьших квадратов (МНК) без константы.

В результате получены следующие уравнения регрессии:

$$\widehat{math\_an} = 0.0152 \cdot math + 0.035 \cdot phys, \quad (1)$$

$$\widehat{mech} = 0.0217 \cdot math + 0.0274 \cdot phys. \quad (2)$$

В табл. 2 и табл. 3 представлены результаты проверки значимости коэффициентов. Все коэффициенты оказались значимыми.

Табл. 2

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	p-значение	
<i>phys</i>	0.035	0.007	5.104	0.000	***
<i>math</i>	0.015	0.006	2.513	0.015	***

Табл. 3

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	p-значение	
<i>phys</i>	0.027	0.008	3.544	0.000	***
<i>math</i>	0.021	0.007	3.182	0.002	***

Для проверки адекватности линейной модели множественной регрессии выборочным данным (Модель 1), воспользуемся критерием Фишера.

$H_0$ : уравнение регрессии незначимо.  $H_1$ : уравнение регрессии значимо.

Критическое значение  $F_{\text{крит}} = 4.98$ , наблюдаемое значение  $F_{\text{набл}} = 970.51$  и  $F_{\text{крит}} < F_{\text{набл}}$ , уровень значимости  $p$  – значение ( $F$ ) составил  $2.03 \cdot 10^{-46}$ , что намного меньше  $\alpha = 0.01$ , то с вероятностью ошибиться, равной 0.01, нулевая гипотеза не принимается, модель признается адекватной выборочным данным.

Аналогичные результаты получаются и для Модели 2.

Кроме того, коэффициент детерминации в обеих моделях близок к 1 (Модель 1 –  $R^2 = 0.970$ ; Модель 2 –  $R^2 = 0.962$ ).



В табл. 4 представлены предсказанные моделями значения оценок за экзамен по математическому анализу и механике. Согласно построенным моделям, студент-первокурсник, имеющий средние баллы (по совокупности баллов, поступивших на радиофизический факультет) по математике и физике, сдаст механику и математический анализ на оценку «удовлетворительно». Однако, одинаковая сумма баллов ЕГЭ за два экзамена на выходе дает разные оценки по механике и математическому анализу. И в том, и в другом случае, балл ЕГЭ по физике оказывает большее влияние на итоговый результат обоих экзаменов зимней сессии.

Табл. 4

<i>math</i>	<i>phys</i>	$\widehat{math\_an}$	$\widehat{mech}$
67	59	3,08	3,07
86	64	3,55	3,62
64	86	3,98	3,75

В результате проведенного анализа можно сделать вывод о наличии значимой статистической связи о влиянии результатов ЕГЭ по физике и математике на успешность сдачи экзаменов (механика и математический анализ) зимней экзаменационной сессии. Выявлено, что результат ЕГЭ по физике обладает большей дифференцирующей способностью по сравнению с ЕГЭ по математике и сильнее влияет на исход экзамена.

В качестве рекомендации по ликвидации несоответствия школьных знаний вузовским требованиям к освоению математического анализа, можно предложить проведение для первокурсников в начале осеннего семестра мини экспресс-курса по некоторым наиболее важным разделам школьной математики. Такая практика существует, например, в НГТУ им. Р.Е. Алексеева.

Дальнейшие исследования в данной предметной области могут вестись как по горизонтали – эконометрический анализ взаимосвязи результатов ЕГЭ и академической успеваемости студентов первого курса другой специальности радиофизического факультета – ИБТС (Информационная безопасность телекоммуникационных систем), так и по вертикали – выявляя причины, влияющие на успеваемость студентов старших курсов.

## СПЕКТР НОРМАЛЬНЫХ МОД В УПРУГОМ СЛОЕ ПРИ УЧЕТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

З.П. Мишустова<sup>1</sup>), С.В. Казачек<sup>2</sup>), И.Н. Солдатов<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>) ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup>) АО «Гипрогазцентр»

В работе рассматривается распространение нормальных волн пластине, контактирующей одной стороной с однородным потоком сжимаемой жидкости. Исследуется влияние скорости потока на дисперсионные характеристики распространяющихся мод. Обнаружено присутствие на любой частоте в спектре мод низкоскоростной моды, существование которой обусловлено движением жидкости.

Для обнаружения и локализации дефектов в трубах для транспортировки газов и жидкостей активно развиваются системы постоянного или периодического мониторинга, в которых предлагается использовать (и уже используются) нормальные волны (волны Лэмба и SH-волны). Принципиальным преимуществом использования нормальных волн является большая область обследования. Когда оболочки или пластины находятся в контакте с движущимся газом (жидкостью) возникает вопрос о влиянии этого контакта на свойства нормальных волн. Эффективность ультразвуковых методов контроля с применением нормальных волн в высокой степени зависит от точности используемых моделей, описывающих дисперсионные кривые (и, соответственно, связанные этим поля напряжений и смещений). В работе рассматривается распространение нормальных волн в относительно простой системе: в пластине (упругом слое), одной стороной контактирующей с движущейся ограниченной сжимаемой жидкостью в виде слоя конечной толщины (рис. 1). Наличие контакта со сжимаемой жидкостью оказывает существенное влияние на дисперсионные характеристики упругих нормальных мод, которые, строго говоря, не разделяются на симметричные ( $s_n$ ), антисимметричные ( $a_n$ ), а оказываются связанными. Спектр распространяющихся нормальных мод расширяется, обогащаясь за счёт волн ( $f_n$ ), первоначальное существование которых обусловлено наличием жидкого слоя [1,2]. Влияние движения сжимаемой жидкости на нормальные волны долгое время оставалось вне внимания.

Движение частиц упругого материала и частиц жидкости происходит в плоскости  $Oxz$ , ось  $Oz$  перпендикулярна плоскостям упругого слоя, а ось  $Ox$  параллельна им. Упругий слой ограничен плоскостями  $z = \pm h/2$ , а слой жидкости  $-z = l + h/2$  и  $z = h/2$  (рис. 1). Движение частиц упругого слоя описывается векторным уравнением:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - c_p^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + c_s^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = (u, w)^T$  – вектор перемещений;  $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ,  $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорости продольной и поперечной упругих волн соответственно,  $\rho$  – плотность упругого материала,  $\lambda$ ,  $\mu$  – модули упругости Ляме. Частицы вязкой сжимаемой жидкости в невозмущенном состоянии движутся с некоторой стационарной скоростью  $U(z)$  вдоль оси  $x$  (рис. 1). Адиабатическое распространение акустической волны в жидкости описывается линеаризованными уравнениями для вектора скорости  $\mathbf{v} = (v, v)^T$  и возмущения плотности  $\rho'$ :

$$\begin{cases} \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_f U \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla p, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\rho_f$  – невозмущенная плотность жидкости,  $p$  – давление.

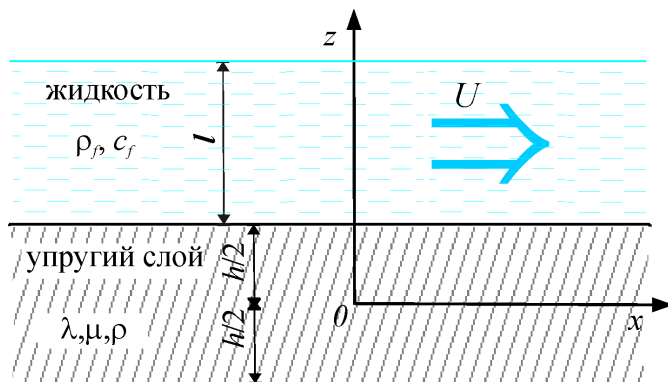


Рис. 1

Используя связь между давлением и плотностью  $p = c_f^2 \rho' + o(\rho')$  (адиабатическую скорость звука  $c_f$  считаем константой) и, вводя потенциал  $\Theta (\mathbf{v} = \nabla \Theta)$ , перепишем систему (2) в виде:

$$\begin{cases} p = -\rho_f \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \rho_f U \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{U}{c_f^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f \Delta \Theta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Откуда получим уравнение для потенциала

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t \partial x} + U^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - c_f^2 \Delta \Theta = 0. \quad (4)$$

На границе  $z = h/2$  упругого слоя с невязкой жидкостью ставятся условия непрерывности нормальных напряжений и нормальной компоненты вектора скорости

$$-p|_{z=h/2+0} = \sigma_{zz}|_{z=h/2-0}, \quad v_z|_{z=h/2+0} = \frac{\partial}{\partial t} w|_{z=h/2-0}, \quad (5)$$

а на нижней свободной границе упругого слоя  $z = -h/2$  – равенство нулю нормальной и тангенциальной компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{zz}|_{z=-h/2} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{z=-h/2} = 0, \quad (6)$$

где упругие напряжения связаны с перемещениями законом Гука  $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\sigma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ .

Верхняя граница сжимаемой жидкости  $z = l + h/2$  является свободной

$$p|_{z=l+h/2} = 0. \quad (7)$$

Если верхняя граница сжимаемой жидкости находится в контакте с абсолютно жесткой поверхностью, то условие при  $z = l + h/2$  приобретает вид

$$v_z|_{z=l+h/2} = 0. \quad (8)$$

Второе граничное условие более естественно, когда рассматривается случай контакта упругого слоя с газовой средой.

От векторного уравнения (1) для перемещений удобно, используя упругие потенциалы

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

перейти к волновым уравнениям для  $\Phi$ ,  $\Psi$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + c_p^2 \Delta \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + c_s^2 \Delta \Psi = 0. \quad (9)$$

Граничные условия (5), (6), (7) также удобно и нетрудно записать в виде условий для  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$ .

Решение сформулированной выше краевой задачи будем искать в виде монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$

$$\Theta = \left( C_1 \operatorname{ch} \gamma \left( z - \frac{h}{2} \right) + C_2 \operatorname{sh} \gamma \left( z - \frac{h}{2} \right) \right) e^{ikx - i\omega t}, \quad (10)$$

$$\Phi = (C_3 \operatorname{ch} \eta z + C_4 \operatorname{sh} \eta z) e^{ikx - i\omega t}, \quad \Psi = (C_5 \operatorname{ch} \zeta z + C_6 \operatorname{sh} \zeta z) e^{ikx - i\omega t},$$

где  $\gamma^2 = k^2 - \frac{(\omega - Uk)^2}{c_f^2}$ ,  $\eta^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_p^2}$ ,  $\zeta^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}$ ,  $\omega$  – циклическая частота,  $k$  – волновое число,  $C_j$ , ( $j = 1, \dots, 6$ ) – произвольные постоянные. Введем безразмерные переменные и параметры  $t' = tc_s/h$ ,  $x' = x/h$ ,  $z' = z/h$ ,  $\Omega = \omega h/c_s$ ,  $k' = kh$ ,  $l' = l/h$ ,  $\gamma'^2 = k'^2 - (\Omega - U'k')^2/\beta^2$ ,  $\eta'^2 = k'^2 - \Omega^2 c_s^2/c_p^2$ ,  $\eta_* = \eta'/2$ ,  $\zeta'^2 = k'^2 - \Omega^2$ ,  $\zeta_* = \zeta'/2$ ,  $\beta = c_f/c_s$ ,  $\Pi = \rho_f/\rho$ ,  $\Theta' = \Theta/(hc_s)$ ,  $\Phi/h^2$ ,  $\Psi/h^2$ ,  $U' = U/c_s$ .

Далее штрихи опускаем. После подстановки выражений (2.1) в граничные условия, получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно  $C_j$

$$\mathbf{AC} = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_6)^T$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 \text{ch}\gamma l & \text{sh}\gamma l & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & i\gamma/\Omega & -\eta \text{sh}\eta_* & -\eta \text{ch}\eta_* & -ik \text{ch}\zeta_* & -ik \text{sh}\zeta_* \\
 -i\Pi(kU - \Omega) & 0 & (\Omega^2 - 2k^2)\text{ch}\eta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{sh}\eta_* & -2ik\zeta \text{sh}\zeta_* & -2ik\zeta \text{ch}\zeta_* \\
 0 & 0 & (\Omega^2 - 2k^2)\text{ch}\eta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{sh}\eta_* & 2ik\zeta \text{sh}\zeta_* & -2ik\zeta \text{ch}\zeta_* \\
 0 & 0 & 2ik\eta \text{sh}\eta_* & 2ik\eta \text{ch}\eta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{ch}\zeta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{sh}\zeta_* \\
 0 & 0 & -2ik\eta \text{sh}\eta_* & 2ik\eta \text{ch}\eta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{ch}\zeta_* & (\Omega^2 - 2k^2)\text{sh}\zeta_*
 \end{pmatrix}$$

Нетривиальное решение данной системы возможно только при условии  $\det \mathbf{A} = 0$ .

Приравняв к нулю детерминант матрицы  $\mathbf{A}$ , получаем следующее дисперсионное уравнение

$$2A \cdot S - \Pi \gamma^{-1}(\Omega - kU) \text{th} \gamma l F = 0, \quad (12)$$

где  $S = (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{sh}\zeta_* \text{ch}\eta_* - 4k^2 \zeta \eta \text{ch}\zeta_* \text{sh}\eta_*$ ,  $A = (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{sh}\zeta_* \text{ch}\eta_* / \eta - 4k^2 \zeta \text{sh}\zeta_* \text{ch}\eta_*$ ,  $F = (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{sh}\zeta_* \text{ch}\zeta_* \text{ch}2\eta - 4k^2 \eta \zeta \text{ch}2\zeta \text{sh}\eta_* \text{ch}\eta_*$ .

Если безразмерный параметр  $\Pi$ , характеризующий отношение плотностей жидкости и упругого материала стремится к нулю, то дисперсионное уравнение (2.3) распадается на три уравнения: уравнение симметричных мод Лэмба  $S(k, \Omega) = 0$ , уравнение для антисимметричных мод  $A(k, \Omega) = 0$  и уравнение для мод сжимаемой жидкости  $\text{ch}\gamma l = 0$ .

Так как в интересных для приложений случаях малой плотности жидкости связанность мод проявляется не сильно, то мы всё же, допуская определенную вольность изложения, будем из совокупности мод условно выделять квазисимметричные, квазиантисимметричные и квазизвуковые моды.

Мы рассмотрим только распространяющиеся нормальные моды. Заметим, что в волноводе «упругий слой + слой сжимаемой жидкости» нет вытекающих волн.

Отметим, что когда жидкость ограничена со стороны  $z = l + h/2$  абсолютно жесткой поверхностью, то дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \text{ch}\gamma l \cdot [\Omega^2(\Omega^2 - 2k^2) \text{ch}\zeta \text{sh}\zeta + 16k^2 \eta \zeta \text{ch}\eta \text{sh}\eta] \text{ch}2\eta \\
 & + \frac{2\gamma \text{sh}\gamma l}{\Pi(\Omega - kU)} \cdot [\Omega^2(\Omega^2 - 2k^2) \text{ch}\eta \text{sh}\zeta + 16k^2 \eta \zeta \text{sh}\eta \text{ch}\zeta] \\
 & \cdot [\Omega^2(\Omega^2 - 2k^2) \text{sh}\eta \text{ch}\zeta + 16k^2 \eta \zeta \text{ch}\eta \text{sh}\zeta] = 0.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Типичная картина зависимости безразмерных фазовых скоростей нескольких первых нормальных мод от безразмерной частоты (дисперсионное уравнение (12)) представлена на рис. 2. Цветом выделена мода, существование которой обусловлено движением жидкости.

При малых  $k, \Omega$  мы можем использовать разложения в ряды ( $\text{sh}\zeta = \zeta + \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} + \dots$ ) и оставить в (12) только главные члены, пренебрегая членами более высокого порядка малости, т.е.

$$\begin{aligned}
 F &= (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{ch}\zeta \text{sh}\zeta \text{ch}2\eta - 16k^2 \eta \zeta \text{ch}\eta \text{sh}\eta \text{ch}2\zeta \rightarrow \zeta [(\Omega^2 - 2k^2)^2 - 16k^2 \eta^2], \\
 S &= (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{sh}\zeta \text{ch}\eta - 16k^2 \zeta \eta \text{ch}\zeta \text{sh}\eta \rightarrow \zeta [(\Omega^2 - 2k^2)^2 - 16k^2 \eta^2], \\
 A &= (\Omega^2 - 2k^2)^2 \text{ch}\zeta \text{sh}\eta - 16k^2 \zeta \eta \text{sh}\zeta \text{ch}\eta \rightarrow \eta [(\Omega^2 - 2k^2)^2 - 16k^2 \zeta^2].
 \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда из  $2A \cdot S - \Pi \gamma^{-1}(\Omega - kU) \operatorname{th} \gamma l F = 0$  получим  $2\eta[(\Omega^2 - 2k^2)^2 - 16k^2 \zeta^2] - \Pi(\Omega - kU)l = 0$ , т.е. уравнение с одной точкой ветвления, которое сводится к следующему уравнению относительно  $k^2$

$$4(k^2 - \Omega^2 c_s^2 / c_p^2) \Omega^8 = \pm \Pi^2 (\Omega - kU)^2 l^2 \quad (15)$$

Знак берется в зависимости от выбранной римановой поверхности.

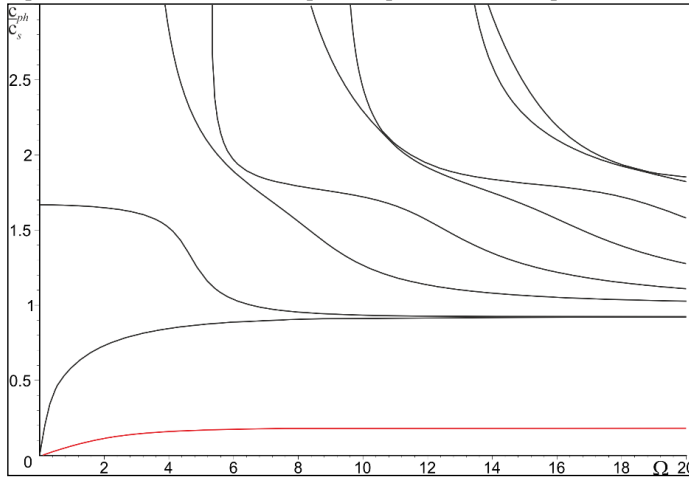


Рис. 2

Уравнение (15) имеет вещественный корень

$$k_1 = \frac{-\Pi^2 U l^2 + \sqrt{\Pi^2 U^2 l^4 (\Pi^2 + \Omega^8) + 4\Omega^{16} (U^2 l^2 + 4) c_s^2 / c_p^2 + 4\Omega^8 \Pi^2 l^2}}{\Omega^7 (U^2 l^2 + 4)}, \quad (16)$$

соответствующий «медленной» моде, обусловленной движением жидкости.

- [1] Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2012.
- [2] Toda K., Motegi K. Coupling of velocity dispersion curves of leaky Lamb waves on a fluid-loaded plate // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107 (2). P. 1045.

## КОНТЕКСТ-ЗАВИСИМОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИ-ПРАВДОПОДОБНОЙ СПАЙКОВОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Д.С. Пушкарев<sup>1)</sup>, С.Ю. Маковкин<sup>1)</sup>, И.А. Кастальский<sup>1, 2, 3)</sup>

<sup>1)</sup> ННГУ им. Н.И. Лобачевского

<sup>2)</sup> МФТИ

<sup>3)</sup> СамГМУ

### *Общие положения*

Изучение нелинейных процессов в системах мозга с позиций колебательно-волнового подхода в настоящее время является одним из актуальных направлений изучения механизмов генерации и обработки сигналов в мозге. Такие исследования могут помочь в реализации различных феноменов, таких как механизм ассоциативной памяти, на основе сетевых моделей биологически релевантных нейронов. В данной работе была предложена архитектура нейронной сети для решения прикладных задач: фильтрации сигналов, обработки и распознавания информационных образов. С помощью реализованных механизмов по неполным фрагментам можно извлекать и полностью восстанавливать объекты из памяти. Каждый нейрон такой нейронной сети представляет собой биофизическую модель Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена [1], динамика которого наиболее правдоподобно воспроизводит процессы в нейронных клетках мозга.

При исследовании одиночных нейронов на них подавался постоянный внешний ток различной амплитуды. Были определены средние периоды автоколебаний, обнаружены значения параметров, соответствующие бифуркации Андронова-Хопфа. Было обнаружено, что динамика нейрона Ходжкина-Хаксли-Мэйнена имеет гистерезис: при увеличении и уменьшении тока смещения, устойчивый предельный цикл рождается и разрушается по разным сценариям. Устойчивый предельный цикл рождается через бифуркацию Андронова-Хопфа, а разрушается через седло-узловую бифуркацию на цикле.

Были выявлены области параметров, соответствующие синхронизации двух нейронов при возбуждающей и тормозной синаптической связи. Все нейроны находились в автоколебательном режиме с наличием устойчивого предельного цикла в фазовом пространстве.

Была построена трехслойная нейронная сеть (см. рис. 1), состоящая из опорного нейрона, сенсорных, контрольных и интернейронов. Связи контрольного и промежуточного слоя организованы по правилу Хебба.

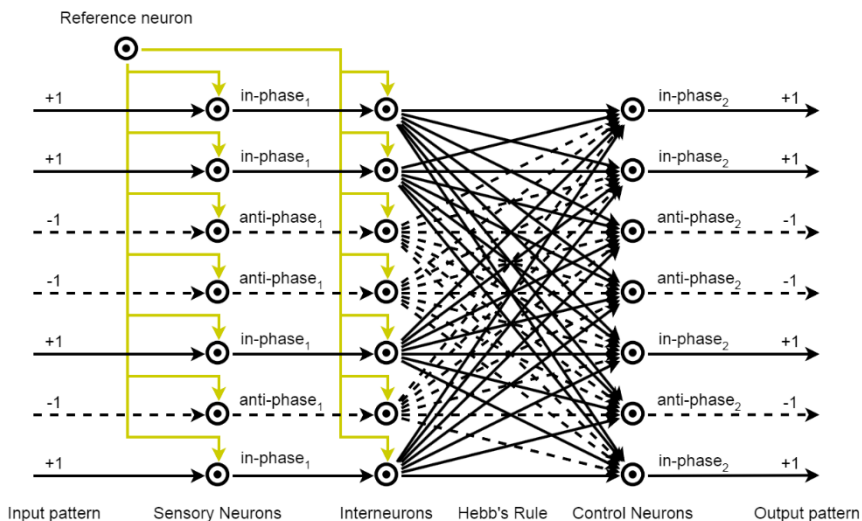


Рис. 1

Были обнаружены области возбуждения для различных типов нейронов (см. рис. 2).

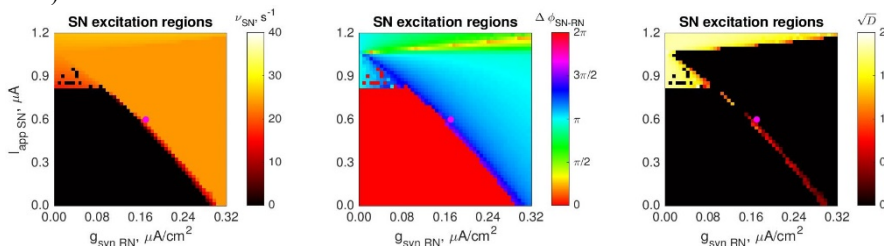


Рис. 2

С помощью построенной нейронной сети были проведены эксперименты по распознаванию бинарных информационных паттернов, кодируемых фазой сигнала. Образы в памяти кодировались с помощью распределения возбуждающих и тормозных синаптических связей. Динамически паттерны определяются синфазным или противofазным режимом захвата фазы (фазовой синхронизацией относительно глобального ритма). Перед попаданием на контрольный (выходной) слой нейронов, сигналы суммируются на слое интернейронов с сигналом опорного нейрона, в результате чего фильтруется определенный информационный сегмент (синфазный или противofазный). После проведенной настройки параметров сеть правильно распознала паттерны.



Были найдены области фазовой синхронизации нейронов, используя которые можно управлять режимами активности сети. Была подтверждена возможность существования режимов захвата фазы и распознавания образов с помощью нейронов Ходжкина-Хаксли-Мэйнена.

- [1] Hodgkin A.L., Huxley A.F. // *The Journal of physiology*. 1952. Vol. 117, No. 4. P. 500.
- [2] Rowat P.F., Selverston A.I. // *Journal of Neurophysiology*. 1993. Vol. 70, No. 3. P. 1030.
- [3] Simonov A., Kastalskiy I., Kazantsev V. // *Neural Networks*. 2012. Vol. 33. P. 67.
- [4] Gordleeva S.Y., Lotareva Y.A., Krivonosov M.I., Zaikin A.A., Ivanchenko M.V., Gorban A.N. // *In International Conference on Neuroinformatics*. October 2019. / Springer, Cham. 2019. P. 384.
- [5] Gordleeva S.Y., Tsybina Y.A., Krivonosov M.I., Ivanchenko M.V., Zaikin A.A., Kazantsev V.B., Gorban A.N. // *Frontiers in Cellular Neuroscience*. 2021. Vol. 15. P. 631485.
- [6] Makovkin S.Y., Shkerin I.V., Gordleeva S.Y., Ivanchenko M.V. // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020. Vol. 138. P. 109951.
- [7] Gordleeva S.Y., Ermolaeva A.V., Kastalskiy I.A., Kazantsev V.B. // *Frontiers in physiology*. 2019. Vol. 10. P. 294.
- [8] Gordleeva S.Y., Lebedev S.A., Rummyantseva M.A., Kazantsev V.B. // *JETP Letters*. 2018. Vol. 107, No. 7. P. 440.
- [9] Tsybina Y., Kastalskiy I., Krivonosov M., Zaikin A., Kazantsev V., Gorban A.N., Gordleeva S. // *Neural Computing and Applications*. 2022. Vol. 34, No. 11. P. 9147.
- [10] Makovkin S., Kozinov E., Ivanchenko M., Gordleeva S. *Scientific reports*. 2022. Vol. 12, No. 1. P. 1.

## ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМА ИЗВЛЕЧЕНИЯ МАТРИЦЫ СВЯЗИ МИКРОВОЛНОВОГО ФИЛЬТРА И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА ЯЗЫКЕ MATLAB

А.М. Тузиков, Д.В. Баландин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

### Введение

Объектом исследования в данной работе является микроволновый резонаторный фильтр. Одним из важнейших вопросов в изучении этих фильтров является процесс извлечения сетевых параметров на основе измеренных данных S-параметров. Основными задачами нашего исследования были анализ процесса извлечения параметров связи, выделение основных особенностей этого процесса и дальнейшая разработка алгоритма автоматизирующий извлечение.

### Математическая формулировка задачи

Общая модель многосвязного волноводного фильтра, используемая в этой работе, была предложена Atia and Williams [1] и показана на рис. 1.

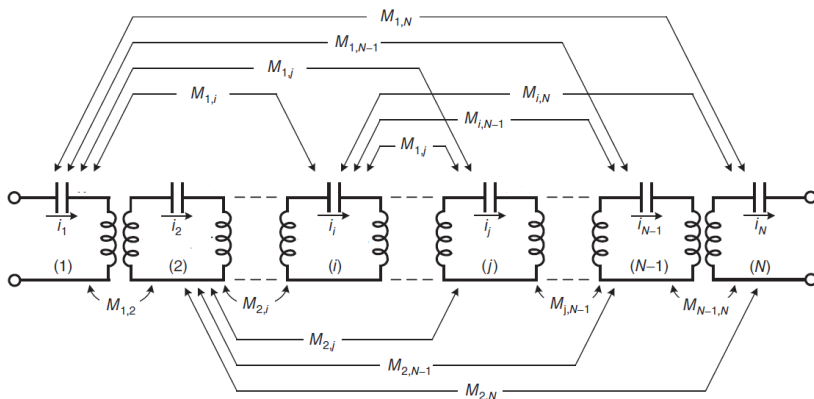


Рис. 1

Эта модель представляет собой каскад соединённых между собой резонаторов, причем связи могут быть как последовательные, так и перекрестные. Характеристикой фильтра отражающей взаимодействием двух резонаторов является коэффициент связи  $M_{ij}$ , где  $i, j$  – номера резонаторов, а совокупность всех коэффициентов связи составляют матрицу связи  $M$  размерность которой  $(N+2, N+2)$ , где  $N$  – порядок фильтра равный количеству резонаторов.

Согласно [2] симметричная  $p \times p$ -матрица S-параметров ( $S = (s_{kl})$ ) определяется следующим образом:

$$s_{kl} = \begin{cases} s_{kk}(\omega, M, \varphi) = (-1 - 2j[\omega U_0 + M - jR_0]_{kk}^{-1})e^{-2j\varphi_k}, & \text{если } l = k \\ s_{kl}(\omega, M, \varphi) = -2j[\omega U_0 + M - jR_0]_{kl}^{-1}e^{-j(\varphi_k + \varphi_l)}, & \text{если } l \neq k \end{cases} \quad (1)$$

где  $k = 1 \div p$ ,  $l = 1 \div p$  (в нашем случае фильтр является двухпортовым, т.е.  $p = 2$ ),  $j$  мнимая единица, а матрицы  $U_0$  – матрица напряжений,  $M$  – матрица связи и  $R_0$  – матрица сопротивлений имеют следующий вид

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0_{p \times p} & 0_{p \times n} \\ 0_{n \times p} & I_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0_{p \times p} & M_1 \\ M_1^T & M_2 \end{pmatrix}, \quad R_0 = \begin{pmatrix} I_{p \times p} & 0_{p \times n} \\ 0_{n \times p} & rI_{n \times n} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $I_{n \times n}$  – единичная матрица,  $M_1$  есть  $(p \times n)$  – действительная прямоугольная матрица,  $M_2$  это  $(n \times n)$  – действительная симметричная матрица,  $r = G_0/(BW * K)$ ,  $G_0 = \sqrt{G_1 * G_2}$ ,  $BW = G_2 - G_1$ ,  $G_1$  – частота ограничивающая полосу пропускания слева,  $G_2$  – частота ограничивающая полосу пропускания справа,  $K$  – добротность,  $\omega_i = (G_0/BW) * (f_i/G_0 - G_0/f_i)$ . В данной работе рассматривается фильтр 8-го порядка, а значит  $n = 8$ , т.о.  $M$  есть  $(10 \times 10)$  – действительная симметричная матрица.

Фактически, задача извлечения матрицы связи сводится к решению оптимизационной задачи. В связи с этим сформируем целевую функцию следующим образом:

$$f(M, \varphi) = \sum_{i=1}^m \sum_{l \geq k}^p \sum_{k=1}^p |s_{kl}(\omega_i, M, \varphi) - \hat{s}_{kl}(\omega_i)|^2, \quad (3)$$

где  $\hat{s}_{kl}(\omega_i)$  являются комплекснозначными элементами симметричной матрицы измеренных данных  $\hat{S}(\omega_i)$  (S-параметры снимаемые с приборов или полученные с использованием формулы (1) и некоторой данной матрицы связи), а  $s_{kl}(\omega_i, M)$  являются комплекснозначными элементами симметричной матрицы  $S(\omega_i)$  и рассчитываются по формуле (1).  $m$  в формуле (3) есть количество отсчетов в рабочей частотной области. Фактически, эта целевая функция представляет собой разность между АЧХ, которую мы получаем в ходе оптимизации и желаемой АЧХ, которая либо снимается с приборов, либо получена с использованием формулы (1) и данной матрицы связи  $M_0$ .

Задача оптимизации состоит в том, чтобы найти элементы матрицы связи  $M$  и параметры  $|\varphi_k| \leq \pi$ ,  $k = 1, \dots, p$  которые обеспечивают минимум целевой функции (3)

$$f(M, \varphi) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Алгоритм комбинированного глобально-локального поиска (CGLS) для извлечения матрицы связи

Для решения задачи оптимизации (с целевой функцией в виде (3)) мы разработали алгоритм комбинированного глобально-локального поиска (CGLS), который использует алгоритм GlobalSearch [3] в сочетании с квазиньютоновским методом (алгоритм Бройдена–Флетчера–Гольдфарба–Шанно – алгоритм bfgs).

В экспериментах мы использовали следующие числовые данные:  $G_1 = 1000 \text{ MHz}$ ,  $G_2 = 1050 \text{ MHz}$ ,  $K = 3500.0$ ,  $f_1 = 900 \text{ MHz}$ ,  $f_m = 1150 \text{ MHz}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Для оценки результатов оптимизации мы ввели дополнительный параметр

$$\Delta(M_0 - M_{opt}) = \max_{ij} (|M_{0ij} - M_{optij}|) \quad (5)$$

В качестве примера приведем полученные результаты, где в качестве измеренных S-параметров принимались результаты применения формулы (1) для матрицы связи  $M_0$ , где

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.9862 & 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9862 \\ 0.9862 & 0 & 0.0076 & 0.7791 & 0 & -0.239 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7791 & 0.6332 & 0.6872 & 0.2082 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6872 & -0.8824 & 0.4493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.239 & 0.2082 & 0.4493 & 0.5187 & 0.5302 & 0 & -0.0341 & -0.025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5302 & -0.4422 & 0.5111 & 0.2725 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5111 & 0.0359 & 0.5250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0341 & 0.2725 & 0.5250 & 0.0067 & 0.8140 & 0 \\ 0 & 0.9862 & 0 & 0 & 0 & -0.0255 & 0 & 0 & 0.8140 & 0.0076 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Для работы алгоритма мы наложили на элементы матрицы связи следующие ограничения:  $0 < M_{1,3} < 1$ ;  $0 < M_{2,10} < 1$ ;  $0 < M_{3,3} < 1$ ;  $0 < M_{3,4} < 1$ ;  $-1 < M_{3,6} < 0$ ;  $0 < M_{4,4} < 1$ ;  $0 < M_{4,5} < 1$ ;  $0 < M_{4,6} < 1$ ;  $-1 < M_{5,5} < 0$ ;  $0 < M_{5,6} < 1$ ;  $0 < M_{6,6} < 1$ ;  $0 < M_{6,7} < 1$ ;  $-1 < M_{6,9} < 0$ ;  $-1 < M_{6,10} < 0$ ;  $-1 < M_{7,7} < 0$ ;  $0 < M_{7,8} < 1$ ;  $0 < M_{7,9} < 1$ ;  $0 < M_{8,8} < 1$ ;  $0 < M_{8,9} < 1$ ;  $0 < M_{9,9} < 1$ ;  $0 < M_{9,10} < 1$ ;  $0 < M_{10,10} < 1$ . После нескольких запусков алгоритма мы получили три различных решения, которые обеспечивают глобальный минимум целевой функции  $F(M_{opt})$ . Для первого решения целевая функция  $F(M_{opt1})$  равна  $8.4158e-16$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt1}) = 0.2927$ . Для второго решения целевая функция  $F(M_{opt2})$  равна  $1.4679e-16$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt2}) = 1.7913e-08$ . Для третьего решения целевая функция  $F(M_{opt3})$  равна  $3.2776e-17$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt3}) = 0.3444$ .  $\varphi_{1opt} = -3.141559 \approx -\pi$ ,  $\varphi_{2opt} = 3.141583 \approx \pi$ . На рис. 2 изображена зависимость  $20 \log |s_{kl}|$  в dB от частоты в MHz. Пунктирные линии ( $|S|$  synthetic) соответствуют S-параметрам полученными используя матрицу связи  $M_0$ , указанную выше, а сплошные линии ( $|S|$  optimized) соответствуют S-параметрам полученными используя формулу (1) и матрицу связи  $M_{opt1}$ , которая, для краткости, здесь не приведена.

Анализируя полученные результаты численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

- 1) Разработанный алгоритм способен решать многомерные задачи глобальной оптимизации, в условиях достаточно малой области поиска и с учетом проблемы множественности решений, за конечное время.
- 2) В ходе исследования выяснилось, что рассматриваемая система обладает множеством глобальных экстремумов, но не смотря на это, наш алгоритм успешно справился с задачей найдя помимо искомой матрицы связи  $F(M_{opt2}) = 1.4679e-16$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt2}) = 1.7913e-08$ , несколько дополнительных матриц связи обеспечивающих глобальный минимум целевой функции  $F(M_{opt1}) = 8.4158e-16$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt1}) = 0.2927$ ,  $F(M_{opt3}) = 3.2776e-17$ ,  $\Delta(M_0 - M_{opt3}) = 0.3444$ . Основываясь на проведенных экспериментах, можно сказать, что случай множественности глобальных решений не является единичным.

- 3) Т.к. наш алгоритм успешно работает только внутри достаточно малой области поиска, можно сказать, что в неограниченной области поиска задача остается нерешённой.

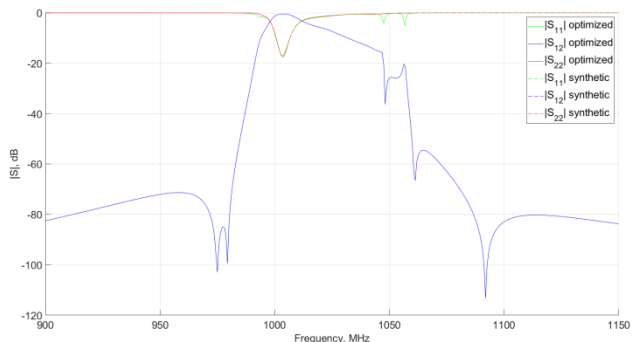


Рис. 2

- [1] Atia E., Williams A.E. // COMSAT Tech. Rev. 1971. Vol. 1. P. 21.  
[2] Cameron R.J., Kudsia C.M. Microwave Filters for Communication Systems. – Hoboken: JohnWiley & Sons, Inc., 2018, p. 897.  
[3] <https://www.mathworks.com/help/gads/how-globalsearch-and-multistart-work.html#bsc9eec>

## СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ПОПУЛЯЦИОННЫХ ИГР

О.С. Вершинина, М.В. Иванченко

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

Синхронизация колебаний играет значительную роль в естествознании. Под синхронизацией понимается подстройка частот и фаз двух или более осциллирующих объектов при их взаимодействии [1]. Существует множество примеров синхронного поведения подсистем в различных областях. Примером из радиофизики может служить взаимная синхронизация колебаний связанных генераторов с запаздыванием [2]. В биологии известны примеры синхронизации нейронных сетей [3], а также синхронизации популяций в модели связанных сообществ «хищник-жертва» [4]. Однако, несмотря на наличие большого числа исследований по синхронизации объектов разной природы, синхронизация в рамках эволюционной теории игр не была исследована.

Рассматривается эволюционная игра «Битва полов», в которой стратегии поведения (фенотипы) животных особей, касающиеся создания семьи и воспитания потомства, борются за доминирование [5]. В игре принимают участие две популяции особей одного вида, но разного пола: самцы (популяция  $A$ ) и самки (популяция  $B$ ). Каждая популяция состоит из  $N$  особей (игроков, агентов). Каждый игрок обладает одной из двух возможных наследуемых стратегий поведения. Взаимодействуя друг с другом, самец и самка получают некоторую выгоду или, наоборот, терпят убытки. Условные единицы выгоды, которые называются платежами, для данной игры представлены в матрице платежей (1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} = 1; b_{11} = -1 & a_{12} = -1; b_{12} = 1 \\ a_{21} = -1; b_{21} = 1 & a_{22} = 1; b_{22} = -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $a_{ss'}$  – это платеж для самца со стратегией  $s \in \{1, 2\}$ , который встречается с самкой со стратегией  $s' \in \{1, 2\}$ . Аналогично,  $b_{ss'}$  – это платеж для самки со стратегией  $s'$ , которая взаимодействует с самцом со стратегией  $s$ .

Эволюционный процесс состоит из многократно повторяющихся раундов игры. Каждый раунд включает в себя следующие шаги (стохастический частотно-зависимый процесс Морана): выбор игроков – в каждой популяции случайным образом с вероятностью, пропорциональной приспособленности стратегий, выбирается игрок для создания семейной пары; размножение – у выбранной пары игроков рождаются два потомка (самец и самка), которые наследуют стратегию поведения родителя того же пола; гибель – в каждой популяции погибает случайно выбранный игрок. Согласно описанному процессу, размер популяций остается постоянным на всем протяжении игры, изменяется только число особей с первой и второй стратегией, поэтому состояние системы достаточно описать двумя величинами:  $i$  – число самцов с первой стратегией,  $j$  – число самок с первой стратегией,  $0 \leq i, j \leq N$ .

Вероятность выбора игроков на каждом раунде игры зависит от приспособленности стратегий. Чем более успешна стратегия, то есть, чем большую среднюю выгоду получают игроки, придерживающиеся этой стратегии, тем больше вероятность того, что игрок с этой стратегией будет выбран для дальнейшего размножения. Вероятность выбрать в популяции самцов  $A$  игрока с первой стратегией определяется как

$$P_1^A = \frac{i}{N} \cdot \frac{1 - w + w \cdot \pi_1^A}{1 - w + w \cdot \bar{\pi}^A}, \quad (2)$$

где  $\pi_1^A = (a_{11} \cdot j + a_{12} \cdot (N - j)) / N$  – средний платеж самцов с первой стратегией;  $\bar{\pi}^A = (\pi_1^A \cdot i + \pi_2^A \cdot (N - i)) / N$  – средний платеж всей популяции самцов;  $w$  – сила отбора. По аналогии можно записать вероятность выбора самца со второй стратегией, а также обе вероятности для популяции самок.

Динамика системы рассматривается до тех пор, пока одна из популяций не достигнет состояния поглощения (вырождения, фиксации). В таком состоянии выживает только одна из двух стратегий поведения ( $i = 0, i = N, j = 0, j = N$ ). В популяциях конечного размера всегда наступает вырождение, однако, переходная динамика может быть весьма нетривиальна.

Ранее для игры «Битва полов» было показано, что до момента поглощения в системе наблюдаются переходные стохастические циклические колебания числа игроков с первой стратегией ( $i$  и  $j$ ) [6]. Свойства колебаний, такие как частота, амплитуда и время жизни (число раундов игры до поглощения) зависят от размера популяций  $N$ , а также от параметра силы отбора  $w$ . На рис. 1 представлены примеры колебаний числа игроков при следующих параметрах игры:  $N = 200, w = 0.3$  (рис. 1а),  $N = 200, w = 0.5$  (рис. 1б) и  $N = 800, w = 0.3$  (рис. 1в). При увеличении размера популяций частота колебаний уменьшается, а время жизни увеличивается. При увеличении силы отбора амплитуда колебаний уменьшается, а частота и время жизни колебаний, наоборот, увеличиваются.

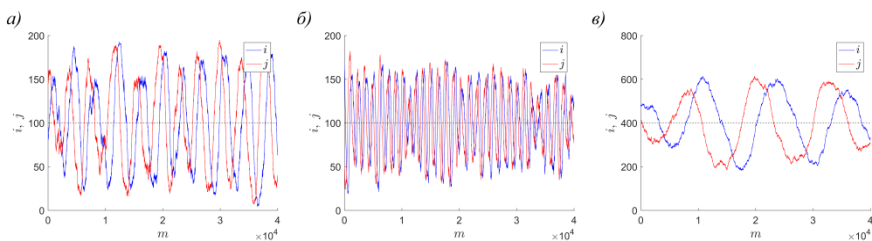


Рис. 1

Представив игру «Битва полов» как автоколебательную подсистему, была составлена система взаимодействующих эволюционных игр (популяционных сообществ) и исследована возможность взаимной синхронизации колебаний.

Связь между сообществами устанавливается посредством миграции игроков. Теперь на каждом раунде игры сначала в каждом сообществе независимо осуществляется процесс Морана, затем происходит миграция случайных особей между соседними сообществами. Сила связи между подсистемами  $0 \leq p \leq 1$  – это вероятность миграции. При  $p = 0$  сообщества никак не связаны и эволюционируют независимо, а при  $p = 1$  миграция осуществляется на каждом раунде игры. Самцы и самки мигрируют с одинаковой вероятностью, однако, поскольку процесс случаен, то на некотором раунде игры при  $p < 1$  может случиться так, что мигрируют игроки только одного пола.

Была рассмотрена система двух связанных сообществ  $C_1$  и  $C_2$  с одинаковым размером популяций  $N = 200$ , но разным значением силы отбора. Параметр силы отбора был зафиксирован для первого сообщества и равен  $w_1 = 0.3$ , а для второго сообщества значение параметра варьировалось. Поскольку сила отбора напрямую влияет на частоту колебаний, то рассматриваемая система представляет собой систему связанных стохастических осцилляторов с отличающимися собственными частотами.

Синхронизация колебаний оценивалась в терминах захвата частот и фаз. На рис. 2 представлены кривые зависимости разности средних наблюдаемых частот двух связанных сообществ  $\langle \Omega_1 \rangle - \langle \Omega_2 \rangle$  от силы отбора (по сути, от частоты) второго сообщества. Можно заметить, что малая сила способна синхронизовать только идентичные подсистемы. При увеличении силы связи появляется область захвата частоты, внутри которой разность средних частот близка к нулю. Наблюдаемая картина типична для традиционных систем связанных осцилляторов.

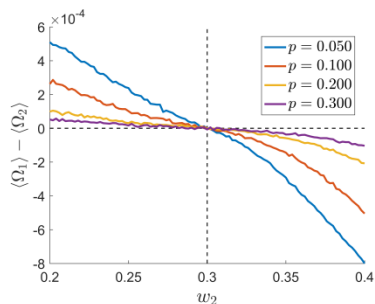


Рис. 2

На рис. 3 представлены зависимости средних частот колебаний, наблюдаемых в двух связанных сообществах  $C_1$  и  $C_2$ , от силы связи. Было рассмотрено три системы:  $w_1 = 0.3, w_2 = 0.35$  (рис. 3а),  $w_1 = 0.3, w_2 = 0.1$  (рис. 3б) и  $w_1 = 0.3, w_2 = 0.5$  (рис. 3в). Можно заметить, что чем больше разница в силах отбора двух подсистем (и, соответственно, начальная расстройка частот), тем большая сила требуется для того, чтобы синхронизовать сообщества. Однако даже максимальная сила связи ( $p = 1$ ) не способна синхронизовать сильно различающиеся подсистемы.

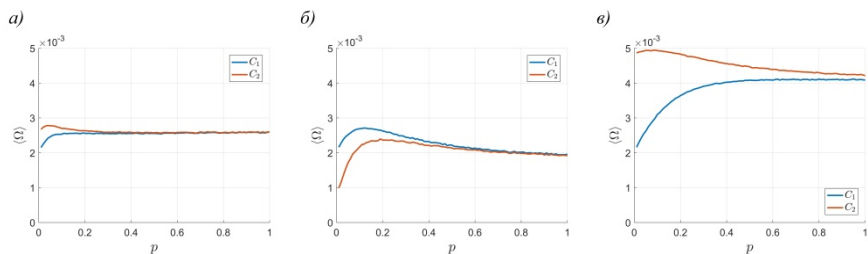


Рис. 3

Для оценки фазовой синхронизации были построены распределения циклической разности фаз  $\varphi \bmod 2\pi$  двух связанных сообществ с  $w_1 = 0.3$  и  $w_2 = 0.35$  (рис. 4). Когда сила связи мала ( $p = 0.01$ , рис. 4а), то распределение широкое, что соответствует асинхронному режиму колебаний. При увеличении силы связи ( $p = 0.1, p = 0.5$ , рис. 4б, в) на распределении появляется пик, что в статистическом смысле означает преимущественно ограниченную разность фаз и синхронизацию стохастических колебаний.



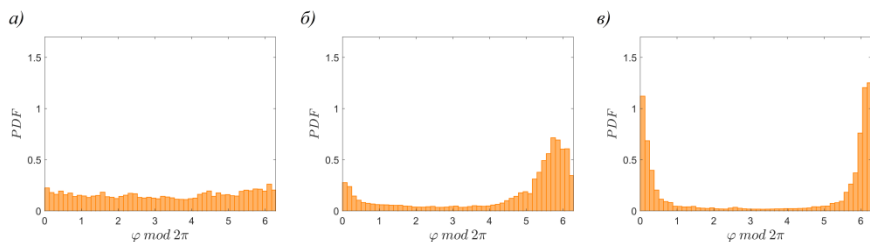


Рис. 4

Пример колебаний двух взаимосвязанных подсистем с  $w_1 = 0.3$  и  $w_2 = 0.35$ , а именно изменение с течением игры числа самцов с первой стратегией  $i$ , представлен на рис. 5. Сила связи между сообществами равна  $p = 0.7$ . Наблюдается отчетливая подстройка колебаний: частоты и фазы колебаний совпадают. При этом наблюдается так же совпадение средних амплитуд колебаний, что может быть интерпретировано, как полная синхронизация. Стоит так же отметить, что свойства колебаний изменяются при наличии сильной связи. Помимо того, что амплитуда связанных сообществ выравнивается, она так же уменьшается при увеличении силы связи. Напротив, время жизни колебаний, то есть время переходной динамики, многократно увеличивается.

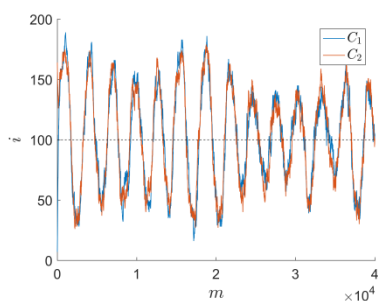


Рис. 5

Таким образом, была продемонстрирована взаимная синхронизация колебаний в системе связанных сообществ, эволюционирующих по правилам популяционной игры «Битва полов». Подстройка ритмов колебаний наблюдалась так же и в ансамблях более чем двух связанных эволюционных игр.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 20-32-90202) и Минобрнауки РФ (соглашение № FSWR-2020-0036).

- [1] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация: Фундаментальное нелинейное явление. – М.: Техносфера, 2003, 496 с.
- [2] Емельянов В.В., Емельянова Ю.П. // Известия вузов. ПНД. 2013. Т. 21, № 3. С. 52.
- [3] Abarbanel H.D. et al. // Physics-Uspekhi. 1996. Vol. 39, No. 4. P. 337.
- [4] Кулаков М.П., Курилова Е.В., Фрисман Е.Я. // Математическая биология и биоинформатика. 2019. Т. 14, No. 2. С. 588.
- [5] Dawkins R. The Selfish Gene. – Oxford: Oxford University Press, 1976.
- [6] Vershina O., Ivanchenko M., Denisov S. // Cybernetics and Physics. 2019. Vol. 8, No. 4. P. 307.

Секция «Математическое моделирование  
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 23 мая 2023 г.  
Председатель – А.А. Дубков, секретарь – А.А. Харчева.  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.