

Труды XXVII научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ»**

Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

СЦЕНАРИИ РОЖДЕНИЯ АТТРАКТОРОВ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

Д.А. Бакалина¹⁾, Н.В. Барабаш^{1, 2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

В докладе рассматривается трёхмерная кусочно-линейная система, образованная тремя линейными подсистемами A_s , A_l и A_r [1 – 3]

$$A_s : \begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ \dot{z} = -\nu z, \end{cases} \quad A_{l,r} : \begin{cases} \dot{x} = -\lambda(x \pm 1) + \omega(z - b), \\ \dot{y} = -\delta(y \pm 1), \\ \dot{z} = -\omega(x \pm 1) - \lambda(z - b), \end{cases} \quad (1)$$

где α , δ , ν , ω , λ , b — положительные параметры. Системы $A_{s,l}$ определены в смежных областях фазового пространства $G_s = \{|x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$, $G_l = \{x \leq -1, z \leq b; x \geq -1, z > b, y \leq 0, x < 1, z > b, y < 0\}$ и $G_r = \mathbb{R}^3 \setminus \{G_s \cup G_l\}$ соответственно.

Одним из преимуществ кусочно-линейной системы является вхождение седлового индекса в качестве параметра ν . В докладе показано, что в зависимости от значения ν в системе (1) наблюдается два бифуркационных сценария.

При $\nu < 1$ в системе (1) реализуется сценарий рождения сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа, проходящий через гетероклиническую бифуркацию сепаратрис седла и седловых предельных циклов. Этот сценарий аналогичен переходу к хаосу в системе Лоренца [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (2)$$

На рис. 1 и рис. 2 сопоставлено изменение фазовых портретов кусочно-линейной системы (1) при $\nu < 1$ и системы Лоренца соответственно при изменении бифуркационных параметров b и r соответственно.

При $\nu < 1$ для системы (1) были получены следующие основные бифуркации.

- При начальном значении бифуркационного параметра b фокусы $e_{l,r}$ устойчивы (рис. 1, 2 (a)).
- При увеличении параметра в системе возникает гомоклиническая бабочка (рис. 1, 2 (b)).
- Устойчивые фокусы $e_{l,r}$ сосуществуют с двумя симметричными седловыми циклами (рис. 1, 2 (c)).
- Гетероклиническая бифуркация с образованием двух симметричных гетероклинических контуров (рис. 1, 2 (d)).
- Хаотический аттрактор сосуществует с двумя устойчивыми фокусами (рис. 1, 2 (e)).
- Фокусы теряют устойчивость в результате бифуркации Андронофа-Хопфа.
- Аттрактор Лоренца остается единственным аттрактором в системе (рис. 1, 2 (f)).

При $\nu > 1$ переход к хаосу происходит через каскад чередующихся гомоклинических бифуркаций седла и бифуркаций “вилка” устойчивых предельных циклов, приводящих к удвоению периода устойчивых периодических орбит с их последующим раздваиванием.

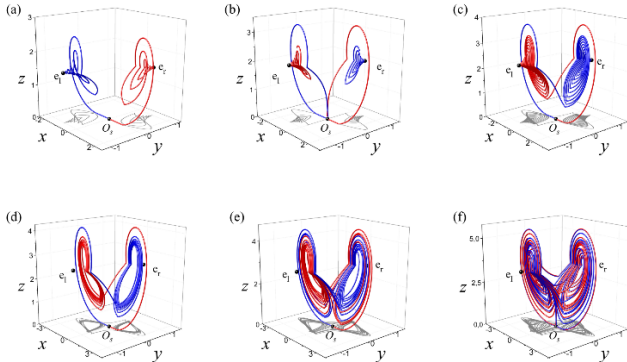


Рис. 1

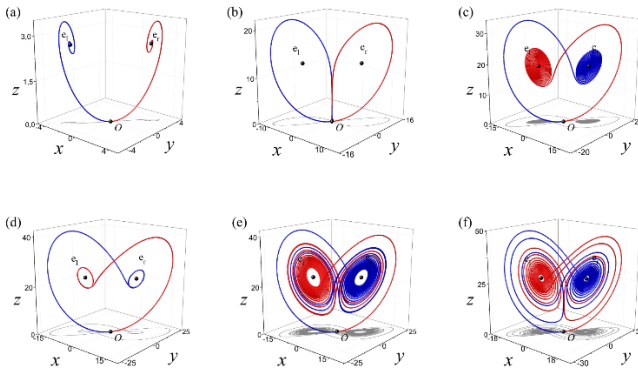


Рис. 2

В работе численно показано, что этот сценарий аналогичен переходу к хаосу в системе Любимова-Закса [5]

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y + \sigma y D(z - r), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 3 и рис. 4 сопоставлены изменение фазовых портретов системы (1) при $\nu > 1$ и системы Любимова-Закса соответственно при изменении бифуркационных параметров b и r соответственно.

Была получена следующая динамика систем при $\nu > 1$.

- При начальном значении бифуркационного параметра фокусы $e_{l,r}$ устойчивы (рис. 3, 4 (a)).
- В результате бифуркации Андронова-Хопфа из фокусов $e_{l,r}$ рождаются симметричные устойчивые предельные циклы (рис. 3, 4 (b)).
- Предельные циклы попадают на устойчивое многообразие седла и образуют устойчивую гомоклиническую бабочку (рис. 3, 4 (c)).
- В результате гомоклинической бифуркации периода 1 рождается устойчивый предельный цикл типа «восьмерки» периода 2, который при некотором значении бифуркационного параметра теряет свою устойчивость в результате бифуркации типа «вилка», и из него рождается пара устойчивых симметричных циклов периода 2, которые затем попадают на устойчивое многообразие седла, образуя в системе притягивающую гомоклиническую бабочку периода 2 (рис. 1, 2 (d)).
- В результате гомоклинической бифуркации периода 2 рождается устойчивый предельный цикл типа «восьмерки» периода 4, который в результате бифуркации типа «вилка» теряет устойчивость и из него рождаются пара устойчивых предельных циклов периода 4, которые затем попадают на устойчивое двумерное многообразие седла и образуют притягивающую гомоклиническую бабочку периода 4. (рис. 3, 4 (e)).
- В системе существует аттрактор лоренцевского типа (рис. 3, 4 (f)).

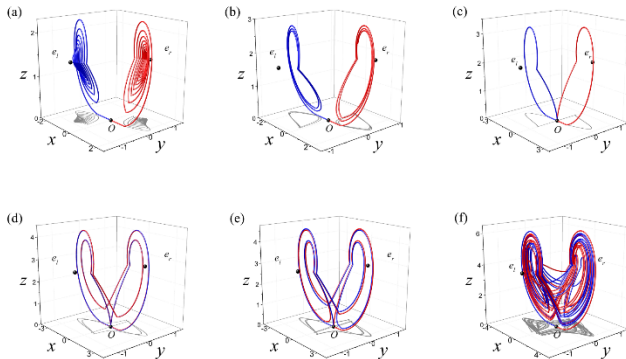


Рис. 3

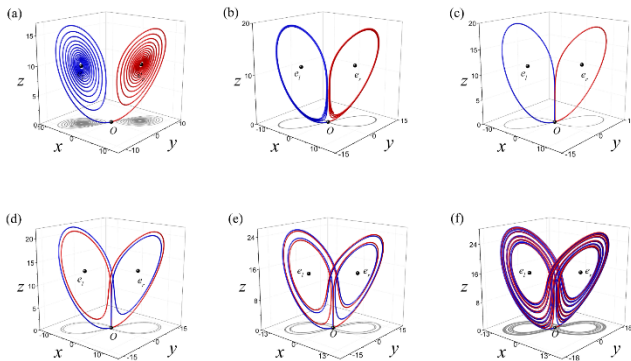


Рис. 4

На рис. 5 приводится численное сравнение бифуркационных сценариев в кусочно-линейной системе (1) при (b) $\nu < 1$ и (d) $\nu > 1$ с аналогичными сценариями в (a) оригинальной системе Лоренца и (c) системе Любимова-Закса соответственно.

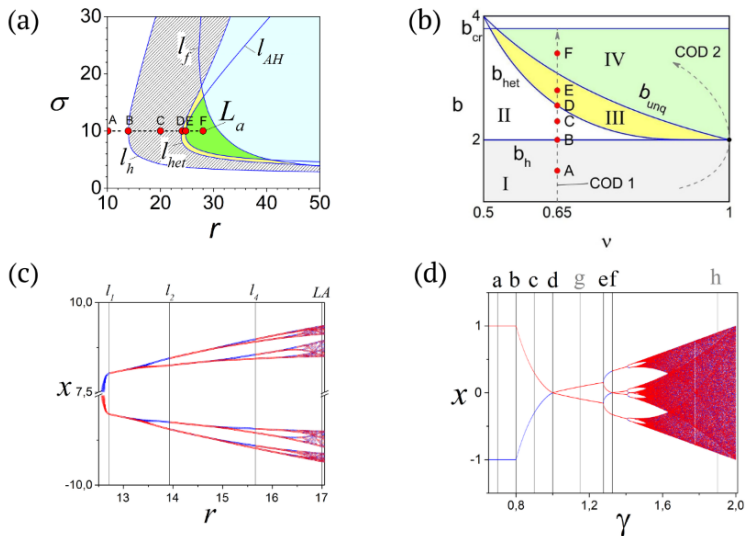


Рис. 5

Таким образом, в докладе утверждается, что на основании качественно-численного исследования кусочно-линейная система (1) подобна нелинейным системам лоренцевского типа по набору их основных свойств и сценариям рождения аттракторов. Такое

подобие позволит использовать поддающуюся аналитическому исследованию кусочно-линейную систему (1) в более сложных задачах как хорошую модель оригинальных нелинейных неинтегрируемых систем.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

- [1] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, No. 10. P. 103108.
- [2] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // *Automation and Remote Control*. 2020. Vol. 81, No. 8. P. 1385.
- [3] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 043117.
- [4] Lorenz E. N. // *Journal of atmospheric sciences*. 1963. Vol. 20, No. 2. P. 130.
- [5] Lyubimov D. V., Zaks M. A. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983. Vol. 9, No. 1-2. P. 52.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОДКОВЫ СМЕЙЛА И СКРЫТАЯ СЛОЖНОСТЬ АТТРАКТОРА ТИПА ДВОЙНОЙ СПИРАЛИ

Н.В. Барабаш^{1, 2)}, В.Н. Белых^{1, 2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ФГБОУ ВО «ВГУВТ»

Введение

Аттрактор типа двойной спирали («double scroll») – это один из наиболее популярных объектов в теории динамического хаоса. Однако строгие доказательства его существования в конкретных динамических системах, равно как и детальный анализ его структуры, на сегодняшний день отсутствуют. Подавляющее большинство работ, посвящённых системам с аттракторами такого типа, сводятся к доказательству пары симметричных гомоклинических орбит седло-фокуса и компьютерному моделированию.

В настоящей работе построена кусочно-линейная динамическая система, которая с одной стороны отражает все основные свойства нелинейных систем с двойной спиралью, а с другой – позволяет получить отображение последования Пуанкаре в явном виде. С помощью этого нового отображения, содержащего классическое отображение седло-фокуса как составную часть, решены задачи о существовании, структуре и нелокальных бифуркациях аттрактора с двойной спиралью.

Главное принципиально новое утверждение работы состоит в том, что сложность аттрактора типа двойной спирали в определяющей степени связана с наличием периодических подков Смейла конечного и бесконечного периодов. Орбиты аттрактора, определяемые такими подковами, составляют как гиперболические, так и эллиптические множества с исчезающе малыми областями притяжения, что делает их скрытыми, т.е. принципиально ненаблюдаемыми при компьютерном моделировании. Особенность длиннопериодных подков Смейла состоит в том, что часть из них локализована около гомоклинических орбит, а другая часть удаляется от них на большие расстояния, широко блуждая по фазовому пространству. Бифуркации этих множеств во многом определяют образование окон устойчивости и изменение квазиэллиптических аттракторов. Таким образом, аттрактор типа двойной спирали имеет намного более сложную структуру, чем считалось ранее.

Настоящая работа отражает ключевую часть нашей статьи об аттракторах с двойной спиралью [1] и продолжает серию наших работ по кусочно-линейной реконструкции и строгому анализу аттракторов лоренцевского типа [2 – 4]. Предложенный в этих работах метод позволяет сводить задачу о свойствах трёхмерного потока к анализу нелинейного двумерного отображения последования Пуанкаре, полученного в явном виде как композиция решений линейных подсистем.

Кусочно-линейная система

Рассмотрим трёхмерную кусочно-гладкую систему ОДУ, составленную из линейных подсистем A_0 , A_1 и A_7 :

$$\begin{aligned}
 A_0: \quad & \dot{x} = x, \\
 & \dot{y} = \nu y + \omega z, \\
 & \dot{z} = -\omega y - \nu z, \\
 & \text{при } (x, y, z) \in G_0 \\
 A_l: \quad & \dot{x} = -\alpha(x + h) - \Omega(z + 1), \\
 & \dot{y} = -\beta y, \\
 & \dot{z} = \Omega(x + h) - \alpha(z + 1), \\
 & \text{при } (x, y, z) \in G_l \\
 A_r: \quad & \dot{x} = -\alpha(x - h) - \Omega(z - 1), \\
 & \dot{y} = -\beta y, \\
 & \dot{z} = \Omega(x - h) - \alpha(z - 1), \\
 & \text{при } (x, y, z) \in G_r
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $h, \alpha, \beta, \nu, \omega$ и Ω – положительные параметры, а области G_0, G_l и G_r для некоторого параметра $r > 1$ заданы следующим образом

$$\begin{aligned}
 G_0: \quad & |x| < h, (y^2 + z^2 \leq r^2) \cap (|z| < 1), \\
 G_l: \quad & (z \leq -\text{sign } x, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0, \\
 G_r: \quad & (z \geq -\text{sign } x, y \in \mathbb{R}^1) \setminus G_0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Существует область параметров (см. Теорему 2 в [1]), для которой два прямоугольника $D = D_l \cup D_r$, где $D_{l,r} = \{|x| < h, y^2 + 1 \leq r^2, z = \mp 1\}$, являются глобальной секущей для любого аттрактора системы (1). Используя решения линейных подсистем в (1), получим отображение T секущей D в себя в явном виде

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \mu \text{sign } x + (1 - \mu)|x|^\nu (y \sin \omega \ln|x| + z \cos \omega \ln|x|), \\
 T: \quad \bar{y} &= q|x|^\nu (y \cos \omega \ln|x| - z \sin \omega \ln|x|), \\
 \bar{z} &= \text{sign } x,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $\frac{x}{h} \rightarrow x, \mu = 1 - \frac{1}{h} e^{-\frac{3\pi\alpha}{2\Omega}}, q = e^{-\frac{3\pi\beta}{2\Omega}}$. Проведённый в работе [1] анализ отображения (3) приводит к утверждениям о существовании в системе (1) аттрактора типа двойной спирали (Теорема 3 в [1]), а также о наличии в нём хаотической компоненты, определяемой подковками Смейла (Теорема 4 в [1]). Исследование отображения (3) привело к введению понятия периодических подков Смейла и к утверждению об их существенной роли в формировании структуры аттрактора. Рассмотрим здесь этот принципиально новый результат.

Периодические подковы Смейла и скрытая сложность

Каждый из прямоугольников D_r и D_l делится пополам плоскостью $x = 0$ так, что $D_r = D_1 \cup D_2, D_l = D_3 \cup D_4$. Образами этих прямоугольников являются 4 спирали $TD_j, j = \overline{1, 4}$. Ограничимся случаем $\mu = 0$ (случай двух симметричных гомоклинических петель седло-фокуса). Тогда каждая из 4 спиралей разбивается плоскостью $x = 0$ на бесконечное число подков (половин витка спирали), которые будем обозначать H_{ij}^n , таких, что $H_{ij} = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_{ij}^n$, где $H_{ij} = TD_i \cap D_j, i, j = \overline{1, 4}$. Каждая подкова имеет прообраз $\sigma_{ij}^n = T^{-1}H_{ij}^n$ (см. рис. 1). В работе [1] (Теорема 4) приведено условие существования бесконечного числа классических подков Смейла $H_{11}^n \cap \sigma_{11}^n$ и $H_{44}^n \cap \sigma_{44}^n$.

Теперь рассмотрим прообраз $\sigma_{32}^1 \in D_3$, который трансверсально отображается в подкову $H_{32}^1 \in D_2$. Эта подкова пересекает прообраз $\sigma_{23}^1 \in D_2$, образ которой в свою очередь трансверсально пересекает прообраз σ_{32}^1 . Этот объект в работе [1] нами был назван гиперболической подковой Смейла периода 2 и получил обозначение $Sh_2^1 = \sigma_{32}^1 \rightarrow \sigma_{23}^1 \rightarrow \sigma_{32}^1$ (см. рис. 2). Такая подкова порождает неблуждающее гиперболическое множество, лежащее в пересечении $(\sigma_{32}^1 \cap H_{23}^1) \cup (\sigma_{23}^1 \cap H_{32}^1)$ и топологически сопряжённое со сдвигом Бернулли из 4 символов. Нами доказано существование области параметров отображения (3), для которой оно имеет бесконечное количество подков Смейла периода 2 $Sh_2^n = \sigma_{32}^n \rightarrow \sigma_{23}^n \rightarrow \sigma_{32}^n, n = \overline{n_0, \infty}, n_0 = \text{const}$ (Теорема 5 в [1]).

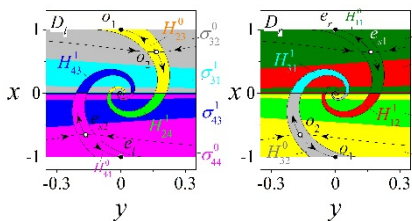


Рис. 1

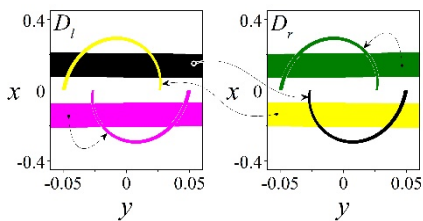


Рис. 2

Наиболее сильный результат состоит в доказательстве существования гиперболических подков Смейла произвольного периода p , включая $p \rightarrow \infty$, состоящих из цепей любых прообразов (Теорема 6 [1]). В частности, доказано, что при $v < \frac{1}{4}$ каждый прообраз $\sigma_{11}^n, n = \overline{1, \infty}$, имеет трансверсальное пересечение с подковой H_{11}^{n+1} , что означает существование подков Смейла бесконечного периода Sh_{∞}^{mix} , порождающее гиперболическое неблуждающее множество, сопряжённое с алфавитом из бесконечного числа символов (см. рис 3).

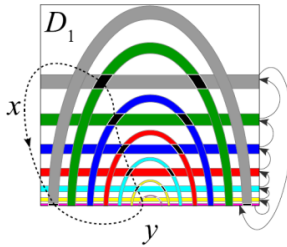


Рис. 3

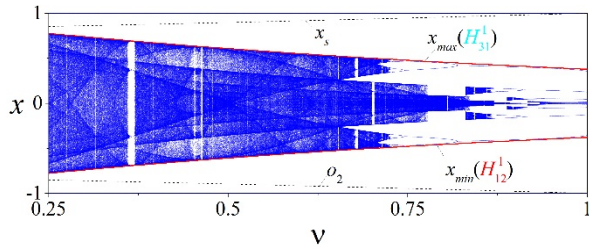


Рис. 4

Такие периодические подковы Смейла, порождающие как гиперболическое, так и эллиптическое неблуждающие множества, «заполняют» 4 спирали TD_i , $i = \overline{1, 4}$, содержащие максимальный аттрактор, тем самым определяя его невероятно сложную структуру (см. расширенную бифуркационную диаграмму на рис. 4).

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

- [1] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2023. Vol. 33, No. 4. P. 043119.
- [2] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2019. Vol. 29, No. 10. P. 103108.
- [3] Белых В.Н., Барабаш Н.В., Бelyх И.В. // Автомат. и телемех. 2020. № 8. С. 29.
- [4] Belykh V. N., Barabash N. V., Belykh I. V. // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 4. P. 043117.

ФАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ПАЧЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ НЕЙРОНА. СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЕ СВЯЗАННЫХ ФИ-НЕЙРОНОВ

Д.Е. Колесников, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Основной формой электрической активности нейрона является так называемый потенциал действия – электрический импульс или спайк. Другим распространенным видом электрической активности является спонтанная или индуцированная генерация бёрстов, то есть целых пачек импульсов. Периоды генерации импульсов при этом чередуются с периодами затишья. Наблюдается как регулярная, так и хаотическая генерация бёрстов. Нейронный бёрстинг играет важную роль в процессах передачи информации, генерации и синхронизации ритмов нейронных сетей.

В качестве модели нейрона часто используют биологически - реалистичную модель типа Ходжкина-Хаксли, которая представляет из себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка и выше с значительно нелинейной правой частью. Исследовать такую систему можно только численно, но при этом она довольно дорога в смысле вычислительности [1].

В данной работе предлагается исследовать другой способ введения фазы – уравнение фи-нейрона. Данная феноменологическая модель способна воспроизводить активность нейрона в режиме спайковой и бёрстовой периодической активности. Значительным достоинством такой модели является лёгкая вычислимость.

Постановка задачи

Определить фазовую модель фи-нейрон, описывающую спайковую и бёрстовую активность нейрона.

Также стоит задача определить возможность и условия синхронизации спайков и бёрстов в ансамбле двух связанных фи-нейронов.

Решение

Уравнение фи-нейрон:

$$\dot{\varphi} = \gamma - \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \quad (1)$$

(где φ – фаза, γ, n – параметры системы).

Переменная состояния φ изменяется циклически с периодом $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi n$. Рассмотрим $\gamma \gtrsim 1$, при данных значениях параметра в системе нет состояний равновесия, фаза растёт неограниченно [2]. Такая конфигурация системы (1) позволяет моделировать спайковую и бёрстовую нейронную активность.

На рис. 1 и 2 представлены временные реализации фазовых переменных при $n = 5$ и $n = 10$ соответственно. Выделяются быстрые движения – характерные резкие скачки фазы – спайки и медленные движения – участки незначительного роста фазы в окрестности $\varphi_0 = \pi/2$ для $n = 5$, $\varphi_0 = \pi$ для $n = 10$, которые соответствуют интервалам между бёрстами. Далее они будут называться межбёрстовыми интервалами.

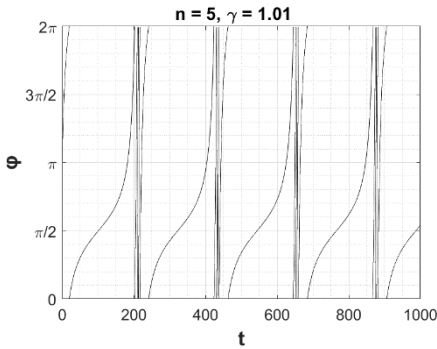


Рис. 1

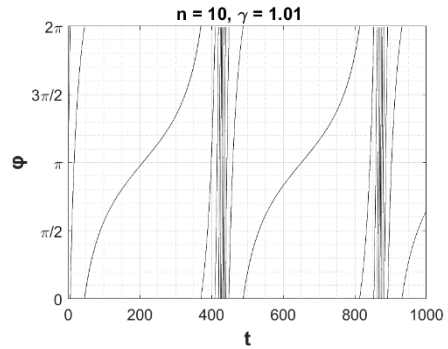


Рис. 2

Количество спайков в бёрсте:

$$m = n - 1 \quad (2)$$

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$t = \frac{2 \cdot n \cdot \arctan\left(\frac{\gamma \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2n}\right) - 1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right)}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (3)$$

Периодом следования бёрстов будет значение $T = t[0, 2\pi * n]$. Период можно разбить на сумму межбёрстового интервала и межспайковых интервалов:

$$T = T_1 + \sum_{i=2}^n T_i \quad (4)$$

(где T_1 при $i = 1$ – межбёрстовый интервал, при $i > 1$ – межспайковый интервал).

На рис. 3 представлена зависимость периодов от параметра n . Межспайковые интервалы убывают в порядке появления спайков в бёрсте. С ростом параметра n увеличиваются межспайковые интервалы и межбёрстовый интервал.

Определим возможность и условия синхронизации в ансамбле двух связанных нейтронов. Пусть каждый нейрон в ансамбле представлен фазовой переменной φ_i , и взаимодействует с другими в соответствии со следующей формулой:

$$\dot{\varphi}_i = \gamma_i - f_i(\varphi_i) + \sum_{j=1}^N d_{i,j} \cdot \sin(\varphi_j - \varphi_i) \quad (5)$$

Определим возможность и условия синхронизации в системе двух связанных фибронов:

где $N = 2$, $f_{1,2}(\varphi) = \sin\left(\frac{\varphi_{1,2}}{n_{1,2}}\right)$, $\gamma_1 = 1.01$, $\gamma_2 = 1.02$, $n_1 = n_2$, d – параметр связи. Механизмом синхронизации элементов выступает взаимная притягивающая связь. Степень синхронизации описывается в терминах захвата фаз или захвата частот. За взаимодействие элементов отвечает слагаемое с коэффициентом d , при $d < 0$ связь является отталкивающей, при $d = 0$ связь между элементами нет, при $d > 0$ связь является притягивающей. Рассмотрим динамику системы при $d > 0$.

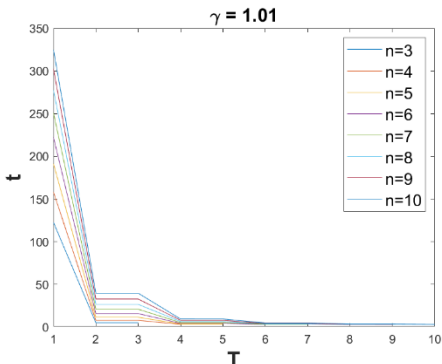


Рис. 3

Показано, что в ансамбле в зависимости от параметров возможны как синфазная синхронизация 1: 1, так и синхронизация $n: m$. Сосредоточимся на синхронизации 1: 1, так как этот режим реализуется в широкой области параметров. Синхронизация бёрстов и спайков осуществляется за счёт взаимной подстройки соответственно частот бёрстов (6) и спайков (7) элементов φ_1, φ_2 . Формулы для расчёта бёрстовой и спайковой частот следующие:

$$w_b = \frac{2\pi}{\sum_{i=1}^n T_i} \quad (6)$$

$$w_s = \frac{2\pi \cdot (m - 1)}{\sum_{i=2}^n T_i} \quad (7)$$

На рис. 4 и рис. 5 приведены эволюции бёрстовой и спайковой частот элементов в зависимости от параметра связи, демонстрирующие процесс взаимной подстройки частот. За d_{cr}^b обозначено значения d , при котором наступает синхронизация частот бёрстов, за d_{cr}^s соответственно, частот спайков. Временные реализации для соответствующих синхронных режимов приведены на рис. 6, рис. 7. Таким образом, с увеличением связи d осуществляется переход к синхронному режиму 1: 1.

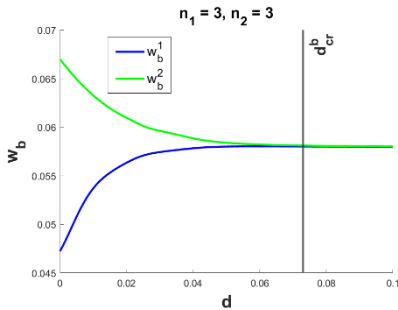


Рис. 4

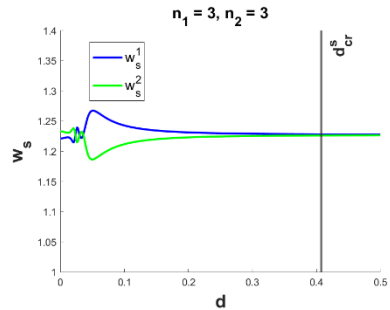


Рис. 5

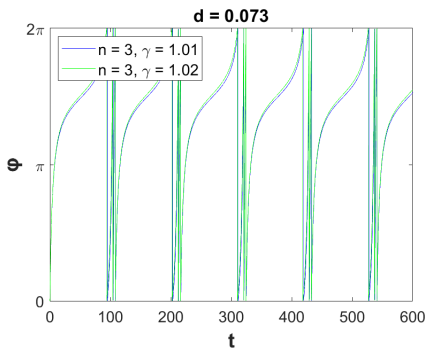


Рис. 6

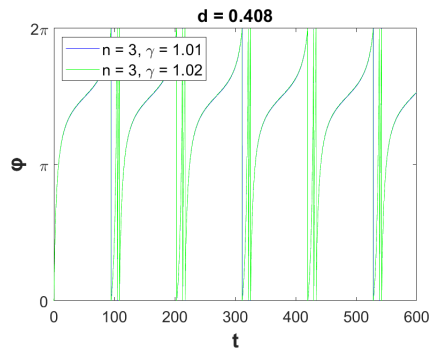


Рис. 7

Выводы

В данной работе предложена фазовая модель, описывающая спайковую и бёрстовую активность нейрона.

Определены условия существования синхронной спайковой и бёрстовой активности в ансамбле двух связанных фи-нейронов.

Работа поддержана РФФ (проект 23-12-00180).

- [1] Izhikevich. E.M. Dynamical system in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge: MIT, 2007, 503 p.
- [2] Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации: Монография. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013, 366 с.

ОБУЧЕНИЕ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ ЗАДАЧАМ КОГНИТИВНОЙ НЕЙРОНАУКИ РЕКУРРЕНТНОЙ НЕЙРОСЕТИ: СТРУКТУРА И ДИНАМИКА

Р.А. Кононов^{1,2)}, О.В. Масленников^{1,2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

Введение

В последнее десятилетие моделирование в вычислительной нейронауке всё чаще опирается на машинное обучение [1, 2, 3, 4]. При этом чаще всего применяются методы обучения с учителем, которые подразумевают настройку весовых коэффициентов на основе минимизации функции ошибок. Для обучения сети методами данного класса необходимо заранее указать пары «входной стимул – выходной отклик».

Методы другого класса – обучения с подкреплением – идеологически ближе к натурным экспериментам. Обучение в них основывается на награде за правильные решения, таким образом, алгоритм обучения с подкреплением ищет правильную стратегию выбора выходных откликов в ответ на входящие стимулы для максимизации накопленной награды (подкрепления).

В данной работе рекуррентная искусственная нейронная сеть с кусочно-линейной функцией активации обучена когнитивной задаче в рамках обучения с подкреплением. Динамика обученной сети исследована с помощью проекций в пространство главных компонент. С помощью кластеризации нейронов по рекуррентным весам выделены ключевые кластеры сети.

Обучение с подкреплением

Термин «подкрепление» происходит из биологических экспериментов по изучению рефлексов, на основе которых постепенно сформировалась теория обучения с подкреплением как самостоятельное направление машинного обучения. Основная идея обучения с подкреплением – это концепция агента, действующего в среде. Под средой подразумевается система, генерирующая набор сенсорных сигналов и сигнал награды для агента, а под агентом – система принятия решений, способная к обучению на основе награды. Конкретный алгоритм обучения, который использовался в данной работе – проксимальное обновление стратегий. Для понимания алгоритма важно указать на общепринятые в обучении с подкреплением обозначения. Текущее состояние среды обозначается s_t , в нашей задаче состояние среды полностью характеризуется сенсорными сигналами, но в общем случае может содержать и скрытые от агента параметры. Действие, которое предпринимает агент в ответ на состояние среды s_t , обозначается как a_t . Награда, полученная агентом от среды за данное действие – r_t .

Стратегия агента обозначается π_θ , где θ – вектор параметров. Стратегия – это функция, задающая вероятность выбора действия a в состоянии s_t .

Оптимизация весов происходит за счёт градиентного спуска по функции потерь следующего вида:

$$L^{actor}(s, a, \theta, \theta_k) = \min \left(\frac{\pi_\theta(a|s)}{\pi_{\theta_k}(a|s)} A^{\pi_{\theta_k}}(s, a), \quad g(\epsilon, A^{\pi_{\theta_k}}(s, a)) \right) \quad (1)$$

$$g(\epsilon, A) = \begin{cases} (1 - \epsilon)A, & A \geq 0 \\ (1 + \epsilon)A, & A < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Основную роль в поиске стратегии играет оценка преимущества A , представляющая собой разницу между суммой наград, которые будут получены, если следовать текущей стратегии, и суммой наград, которые будут получены, если следовать предыдущей. Таким образом, если новая стратегия приводит к большим наградам, она закрепляется, а если наоборот – ослабляется.

Для оценки предыдущей стратегии используется нейронная сеть, называемая критиком, а сеть, принимающая решения, называется исполнителем. Функция потерь критика имеет вид,

$$L^{critic} = \sum_t (G_t - V_t)^2, \quad (3)$$

где G_t – сумма наград текущей стратегии, V_t – выход критика.

Взятие минимума в правой части (1) играет роль ограничителя, не позволяющего стратегии измениться слишком кардинально.

Когнитивная задача перцептивного выбора с контекстом

Для рассматриваемой в настоящей работе когнитивной задачи использован прототипный эксперимент [1]. Обезьянам демонстрировали экран с двигающимися точками двух возможных цветов, и учили распознавать, какого цвета точек больше или в какую сторону движется больше точек. При этом обращать внимание они должны были только на один признак, на который указывали специальные сигналы контекста. Эксперимент проводился как на поведенческом, так и параллельно на нейрофизиологическом уровнях.

В данной работе использована упрощённая модель этой задачи. Когнитивному агенту-нейросети предоставляется 7 сенсорных сигналов. Две пары сигналов моделируют стимулы двух разных контекстов. Сумма каждой пары равна 1, а каждый сигнал по отдельности обозначает долю точек определенного цвета или направления. При этом каждую пару стимулов характеризует единый параметр – когерентность, который варьируется от -100 до 100. Абсолютная величина когерентности показывает долю доминирующего цвета или направления в процентах, а знак – какой именно цвет или направление доминирует. Какой именно из двух признаков должен быть обработан в текущем испытании, указывается с помощью соответствующего сигнала контекста, равного 1. Другой сигнал контекста при этом равен нулю. Сигнал фиксации разделяет испытание на отдельные этапы.

Испытание делится на 4 периода:

Период фиксации, в течение которого подаётся только сигнал фиксации, равный 1.

Период стимулов, когда агенту демонстрируются стимулы.

Период задержки, когда агенту вновь демонстрируется только сигнал фиксации.

Период принятия решения, когда обнулением сигнала фиксации от агента ожидается его решение в виде действия. В данной среде у агента есть всего три действия: выбор не сделан, выбор 1 и выбор 2.

Награда агенту выдается в ответ на предпринятое им действие в период принятия решения.

Обучение модели

Вышеописанной задаче обучена искусственная нейронная сеть-исполнитель. Для работы алгоритма необходима вторая сеть-критик. Архитектурно исполнитель и критик совпадают, однако это две отдельные нейронные сети, которые обучаются одновременно.

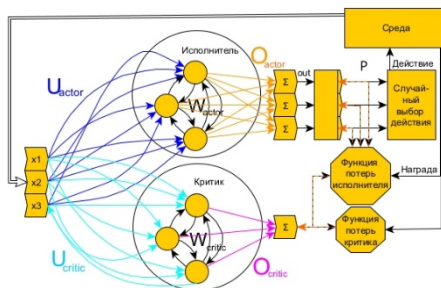


Рис. 1

$$h_t^{\text{actor}} = \text{relu}(x_t^{\text{actor}} U_{\text{actor}}^T + x_{t-1}^{\text{actor}} W_{\text{actor}}^T); \text{out}_t = h_t^{\text{actor}} O_{\text{actor}}^T \quad (4)$$

$$h_t^{\text{critic}} = \text{relu}(x_t^{\text{critic}} U_{\text{critic}}^T + x_{t-1}^{\text{critic}} W_{\text{critic}}^T); V_t = h_t^{\text{critic}} O_{\text{critic}}^T \quad (5)$$

$x_t \in \mathbb{R}^7, 0 < x_{tj} < 1$ – вектор сенсорных сигналов

$$U_{\text{actor}}, U_{\text{critic}} \in \mathbb{R}^{50 \times 7} \quad W_{\text{actor}}, W_{\text{critic}} \in \mathbb{R}^{50 \times 50}$$

$$O_{\text{actor}} \in \mathbb{R}^{3 \times 50} \quad \text{out}_t \in \mathbb{R}^3; \quad O_{\text{critic}} \in \mathbb{R}^{1 \times 50} \quad V_t \in \mathbb{R}^1$$

Выходы исполнителя интерпретируются как ненормированные логарифмические вероятности и после нормировки вида

$$P_j = \text{out}_j - \ln \sum_{j=0}^3 e^{\text{out}_j}; \quad \sum_{j=0}^3 e^{P_j} = 1 \quad (7)$$

представляют вероятностное распределение, из которого случайно выбирается действие агента. Таким образом в систему вносится элемент случайности, характерной для обучения с подкреплением.

Выход критика – это ценность состояния среды.

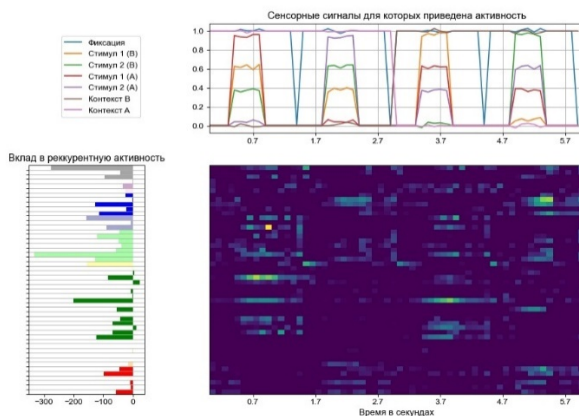


Рис. 2

Для анализа структуры и активности, лежащей в основе функционирования сети, нейроны были кластеризованы по исходящим рекуррентным весам с помощью агломеративного алгоритма. Среди выделенных кластеров обнаружено три ключевых. Отключение любого из них приводит к нарушению индуцированной стимулом динамики, а сеть только из этих кластеров динамику сохраняет. Установлена роль кластеров в формировании выходов сети: два отвечают за различные контексты, а третий – за обработку сигнала фиксации.

На рис. 2 отображена активность нейронов сети в течение нескольких испытаний. На диаграмме слева показана активность нейрона, умноженная на его выходные рекуррентные веса. Столбцы матрицы отсортированы так, чтобы сгруппировать нейроны в кластеры, выделенные указанным выше способом. Обнаружена селективная активность нейронов относительно периода испытания и доминирующего стимула.

Обученная с помощью методов с подкреплением искусственная нейронная сеть демонстрирует целевую функцию преобразования входов в выходы, схожую с поведенческой активностью в натуральных экспериментах. С помощью кластеризации по рекуррентным весам выделены кластеры нейронов, отвечающие различным аспектам функциональной активности сети.

- [1] Mante V., Sussillo D., Shenoy K. // Nature. 2013. Vol. 503. P. 78.
- [2] Pugavko M.M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. // Scientific Reports. 2023. Vol. 13. P. 3997.
- [3] Масленников О.В., Пуговко М.М., Щапин Д.С., Некоркин В.И. // УФН. 2022. Т. 192. С. 1089.
- [4] Song H.F., Yang G.R., Wang X.J. // Elife. 2017. Vol. 6. P. e21492.

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНАЯ АКТИВНОСТЬ В АНСАМБЛЕ ВОЗБУДИМЫХ НЕЙРОНОВ

А.Г. Коротков, С.Ю. Загрербин, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В работе предложено четыре динамических системы, базирующиеся на обобщённой модели Лотки-Вольтерры из трёх возбудимых элементов, взаимодействующих через возбуждающие связи. Показано, что при некоторых значениях параметров связей в фазовом пространстве систем существуют гетероклинические контуры, содержащие три или шесть седловых состояний равновесия и связывающие их сепаратрисы. При определенных внешних воздействиях, перебрасывающих систему из устойчивого нулевого состояния равновесия в малую окрестность гетероклинического контура, фазовая траектория будет поочередно посещать окрестности седловых состояний равновесия (возможно, не единожды), после чего вернётся в исходное состояние. Описанное поведение предлагается использовать для моделирования переключательной активности в нейронных ансамблях. Различные переходные процессы определяются различными внешними воздействиями. Прохождение фазовой точки системы вблизи седловых состояний равновесия, входящих в гетероклинический контур, предлагается интерпретировать как активацию соответствующего элемента.

Модель ансамбля первого типа

Каждый элемент ансамбля будем моделировать уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(\rho - 1), \quad (1)$$

где ρ – уровень активности элемента.

Эта система имеет два состояния равновесия: $\rho = 0$ – устойчивое и $\rho = 1$ – неустойчивое.

Ансамбль из трёх возбуждающе связанных элементов моделируется системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\rho_1 - 1 + \alpha\rho_2 + \beta\rho_3) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(\rho_2 - 1 + \alpha\rho_3 + \beta\rho_1), \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(\rho_3 - 1 + \alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \end{cases} \quad (2)$$

где α и β – коэффициенты, задающие силы связей между элементами. Для этой и последующих систем примем следующие ограничения на параметры: $0 < \alpha < 1 < \beta$.

На инвариантной плоскости $\rho_3 = 0$ система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\rho_1 - 1 + \alpha\rho_2) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(\rho_2 - 1 + \beta\rho_1) \end{cases} \quad (3)$$

В фазовом пространстве системы (3) – плоскости (ρ_1, ρ_2) – существует входящая сепаратриса седла, соединяющая седловое состояние равновесия $(0, 1)$ с неустойчивым узлом $(1, 0)$.

Из-за симметрии в системе (2) на двух других инвариантных плоскостях ($\rho_{1,2} = 0$) также будут существовать аналогичные траектории.

Наличие в инвариантных плоскостях $\rho_i = 0$ траекторий, соединяющих неустойчивое (в соответствующей инвариантной плоскости) и седловое состояния равновесия,

приводит к тому, что в фазовом пространстве трёхмерной системы (2) существует гетероклинический цикл между седловыми состояниями равновесия с одномерным устойчивым многообразием, показанный на рисунке 1(a). На этом и последующих рисунках используются следующие обозначения: зелёным точкам соответствуют устойчивые состояния равновесия, красным – вполне неустойчивые, синим – седловые; зелёным линиям – устойчивые сепаратрисы седел, красным – неустойчивые.

На рисунке 1 (b) приведены временные реализации. Из рисунка видно, что имеет место последовательная активность элементов ансамбля.

Описанное поведение траекторий, как показано в работах [1], [2], [3], позволяет моделировать переключательную активность (беспобедительную конкуренцию) между различными модами мозга.

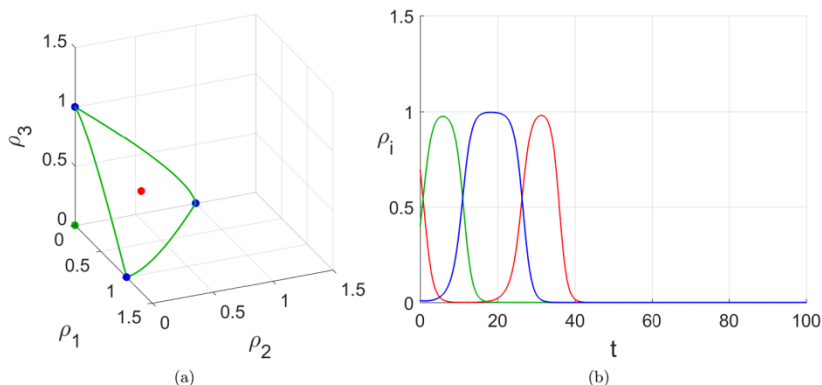


Рис. 1

Модель ансамбля второго типа

Каждый элемент ансамбля будем моделировать уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(\gamma - \rho)(\rho - 1),$$

где параметр $\gamma > 0$.

Ансамбль из трёх возбуждающе связанных элементов моделируется системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\gamma - \rho_1)(\rho_1 - 1 + \alpha\rho_2 + \beta\rho_3) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(\gamma - \rho_2)(\rho_2 - 1 + \alpha\rho_3 + \beta\rho_1) \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(\gamma - \rho_3)(\rho_3 - 1 + \alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \end{cases} \quad (4)$$

Описанная для первой модели последовательная активация элементов также наблюдается и в модели (4). На рисунке 2(a) показан гетероклинический цикл (выделен зеленым цветом), состоящий из шести седловых состояний равновесия. На рисунке 2(b) приведены временные реализации переключательной активности.

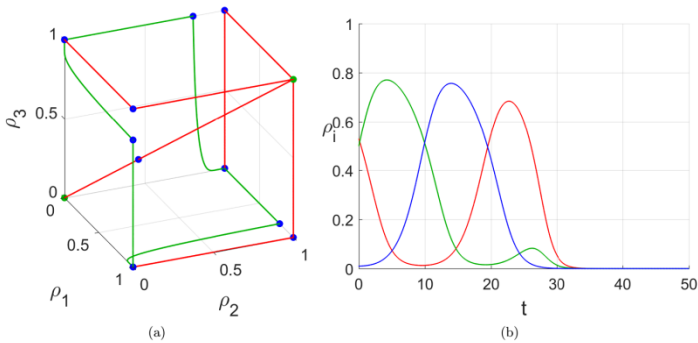


Рис. 2

Модель ансамбля третьего типа

Каждый элемент ансамбля будем моделировать уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(\gamma - 2\rho + \rho^2)(\rho - 1).$$

Ансамбль из трёх возбуждающе связанных элементов моделируется системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\gamma - 2\rho_1 + \rho_1^2)(\rho_1 - 1 + \alpha\rho_2 + \beta\rho_3) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(\gamma - 2\rho_2 + \rho_2^2)(\rho_2 - 1 + \alpha\rho_3 + \beta\rho_1) \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(\gamma - 2\rho_3 + \rho_3^2)(\rho_3 - 1 + \alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \end{cases} \quad (5)$$

Модель (5) также демонстрирует поведение, наблюдаемое в системах (2) и (4). На рисунке 3 приведены соответствующие временные реализации.

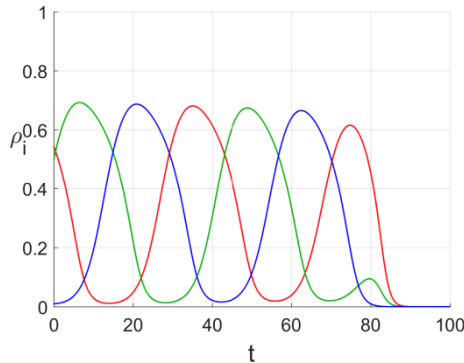


Рис. 3

Модель ансамбля четвёртого типа

Каждый элемент ансамбля будем моделировать уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(-\rho^2 + 2\rho - \gamma).$$

Ансамбль из трёх возбуждающе связанных элементов моделируется системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(-\rho_1^2 + 2\rho_1 - \gamma + \alpha\rho_2 + \beta\rho_3) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(-\rho_2^2 + 2\rho_2 - \gamma + \alpha\rho_3 + \beta\rho_1) \\ \dot{\rho}_3 = \rho_3(-\rho_3^2 + 2\rho_3 - \gamma + \alpha\rho_1 + \beta\rho_2) \end{cases} \quad (6)$$

В модели (6) также присутствует поведение, наблюдаемое в ранее описанных системах.

Заключение

В работе

- Предложено 4 модели нейронных ансамблей, задаваемых обобщённой моделью Лотки-Вольтерры. Ансамбли состоят из возбудимых элементов, связанных возбуждающими связями.
- Показано существование в фазовом пространстве моделей гетероклинических контуров. Наличие в фазовом пространстве гетероклинического контура позволяет моделировать эффект беспобедительной конкуренции между модами – последовательное непериодическое переключение активности ансамбля между отдельными нейронами или группами нейронов.
- В предложенных моделях гетероклинические контуры не являются устойчивыми, что приводит к полному затуханию активности ансамбля через некоторое время. Работа поддержана Минобрнауки РФ, Соглашение FSWR-2020-0036.

- [1] Рабинович М. И., Мюезинолу М. К. // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 4. С. 371.
- [2] Rabinovich M., Tristan I., Varona P. // PloS one. 2013. Vol. 8, No. 5. P. e64406.
- [3] Rabinovich M. I. et al. // Reviews of modern physics. 2006. Vol. 78, No. 4. P. 1213.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТИ НЕЙРОПОДОБНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С КРАТКОВРЕМЕННОЙ ПЛАСТИЧНОСТЬЮ

Н.С. Ковалева, М.А. Мищенко, В.В. Матросов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Исследование механизмов формирования колебательно-волновых процессов в нейронных сетях мозга является на сегодняшний день одной из наиболее интересных и актуальных задач. В данной работе исследуются условия возникновения коллективных динамических эффектов в сети нейроподобных генераторов с кратковременной пластичностью: синхронизации, конкуренции, эффектов рабочей памяти сети.

Рабочая память – это ограниченная по емкости часть памяти человека, которая сочетает в себе временное хранение и манипулирование информацией. В парадигме с отсроченным ответом, кратко представляемый стимул должен сохраняться в течение нескольких секунд до выполнения задачи. В течение этого периода наблюдается усиленная активность нейронов, которая считается нейрональным коррелятом рабочей памяти. Предполагается, что образ поддерживается рабочей памятью за счет кратковременного усиления связей внутри нейронной сети, активированной стимулом. Усиление связей вызвано повышенным уровнем остаточного кальция в пресинаптических терминалях нейронов, которые кодируют этот элемент [1].

Сеть состоит из N_E возбуждающих и N_I тормозных нейроподобных генераторов на основе системы ФАПЧ [2]. Динамика одиночного элемента сети описывается системой уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_i}{d\tau} &= y_i \\ \frac{dy_i}{d\tau} &= z_i \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz_i}{d\tau} &= \gamma_i - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)z_i - (1 + \varepsilon_1 \cos\varphi_i)y_i + I_i^{(rec)}(\tau) + I_i^{(ext)}(\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, N_E + N_I$ – номер нейрона, φ – текущая разность фаз опорного и подстраиваемого генераторов, y – текущая разность частот, γ – начальная частотная расстройка, I_{ext} – внешнее воздействие, ε_1 и ε_2 – параметры инерционности фильтров. Применительно к описанию динамики нейрона: y – переменная мембранного потенциала, ε_1 и ε_2 – параметры, позволяющие задавать динамический режим, I_{ext} – переменная внешнего тока. Все элементы сети находятся в возбудимом режиме, т.е. $\gamma_i = 0$.

Рекуррентный ток $I_i^{(rec)}(\tau)$ – сумма постсинаптического тока от всех других нейронов, связанных с нейроном i :

$$I_i^{(rec)}(\tau) = \sum_j \widehat{J}_{ij}(\tau) \sum_k \delta(\tau - \tau_k^{(j)}), \quad (2)$$

где $\widehat{J}_{ij}(\tau)$ – мгновенная эффективность синапса, соединяющего нейрон j с нейроном i , τ_k – все времена импульсов (j) пресинаптического нейрона j .

Мгновенная эффективность синапса для возбуждающих нейронов:

$$\widehat{J}_{ij}(\tau) = J_{ij} I_{ij}^{syn} u_j(\tau) x_j(\tau), \quad (3)$$

где J_{ij} – абсолютная синаптическая эффективность связи, I_{ij}^{syn} – функция связи, u и x – параметры синаптической пластичности. Для остальных нейронных связей – $\widehat{J}_{ij} = J_{ij}I_{ij}^{syn}$.

Функция связи:

$$\sum_j I_{ij}^{syn} = \sum_j \frac{(-y_i + 0.3)}{1 + e^{-\frac{(y_j - \theta_{syn})}{k_{syn}}}}, \quad (4)$$

где θ_{syn} – порог активации, K_{syn} – крутизна активационной функции, аналогична нелинейной функции связи, описывающей кинетику химического синапса, представленной в работе [3].

Уравнения синаптической пластичности:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\tau) &= \frac{U - u_j(\tau)}{\tau_F} + U[1 - u_j(\tau)]\sum_k \delta(\tau - \tau_k^{(j)}), \\ \dot{x}_j(\tau) &= \frac{U - x_j(\tau)}{\tau_D} + u_j(\tau)x_j(\tau)\sum_k \delta(\tau - \tau_k^{(j)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где u – синаптическая эффективность, x – синаптический ресурс, τ_F – время восстановления уровня кальция, τ_D – время восстановления нейротрансмиттеров.

Проведено математическое моделирование динамики сети, состоящей из 170 нейронов. Сеть содержит 4 кластера, в каждом из которых содержится 25 возбуждающих нейронов (1-100 нейроны), 20% сети – тормозные нейроны (137-170 нейроны), связанные с возбуждающими неструктурированным образом, остальные элементы сети – возбуждающие нейроны, не входящие в кластеры, вероятность установления синаптического контакта – 60%. На рис. 1 показана динамика сети в зависимости от времени, где каждая точка обозначает возникновение спайка на определенном нейроне. Для каждого кластера синим цветом изображены графики изменения средних значений синаптической эффективности u в кластерах, красным – изменения средних значений синаптического ресурса x в кластерах. В качестве внешних токов используется модуль гауссова белого шума:

$$I_i^{(ext)}(\tau) = \mu_{ext} + \sigma_{ext}\eta_i(\tau) \quad (6)$$

при $\langle \eta_i(\tau) \rangle = 0$, $\langle \eta_i(\tau)\eta_j(\tau') \rangle = \delta_{ij}\delta(\tau - \tau')$, так что μ_{ext} и σ_{ext}^2 являются соответственно средним значением и дисперсией внешних токов.

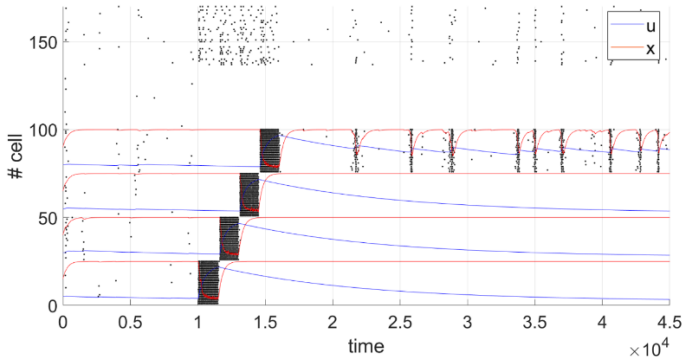


Рис. 1

Сначала происходит спонтанная активность в сети. Начиная с некоторого времени на каждый кластер последовательно воздействует внешний стимул с амплитудой 0.062. За счет кратковременной пластичности после последовательной стимуляции кластеров в последнем из них наблюдается синхронная активность нейронов или воспроизведение загруженного образа сетью.

Аналогично, на рис. 2 показана динамика сети, когда активация сети происходит за счет импульсного внешнего воздействия I_{ext} в случайные моменты времени τ_{st} с заданными минимальным средним периодом T_{min} и амплитудой A . Т.е. внешние токи описываются уравнением (7):

$$I_i^{(ext)}(\tau) = \begin{cases} A, & \tau_{st} < \tau < \tau_{st} + d\tau_{st} \\ 0, & \text{в остальное время} \end{cases} \quad (7)$$

Одномоментно воздействие поступает на 20% случайно выбранных нейронов сети.

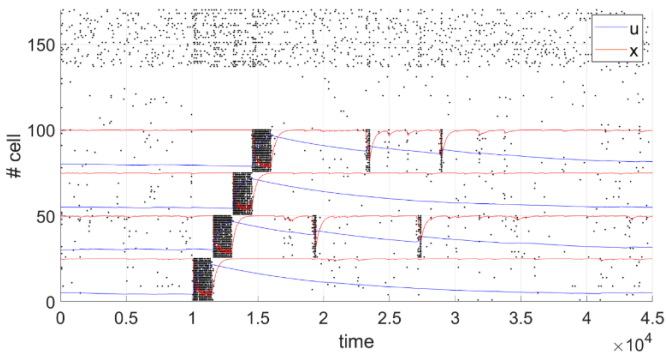


Рис. 2

После последовательной стимуляции кластеров за счет кратковременного усиления связей наблюдается синхронная активность некоторых кластеров, или воспроизведение

образов сетью. Тормозные нейроны связаны с возбуждающими кластерами неструктурированным образом, что приводит к конкуренции между различными хранимыми элементами, которые кодируются кластерами. Отмечено, баланс сил связей и силы внешнего воздействия важен для воспроизведения эффектов рабочей памяти, а баланс возбуждения и торможения сети имеет решающее значение для формирования синхронной активности кластеров.

Таким образом показано, что сеть нейроподобных генераторов на основе системы ФАПЧ с кратковременной пластичностью воспроизводит известные для других моделей нейронов сетевые эффекты: синхронизация, конкуренция, эффекты рабочей памяти.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-003).

- [1] Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. // Science. 2008. Vol. 319, No. 5869. P. 1543.
- [2] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
- [3] Simonov A.Y., Gordleeva S.Y., Pisarchik A.N., Kazantsev V.B. // JETP Letters. 2013. Vol. 98, No. 5869. P. 632.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ В СЕТИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТОПОЛОГИЯМИ

М.А. Мищенко, В.В. Матросов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Поведение ансамблей и сетей связанных активных элементов или осцилляторов долгое время находится в центре внимания исследователей динамики сложных систем [1, 2]. Динамика современных технических, биологических, социоэкономических систем и процессов обладает исключительной сложностью. Изучение динамики развития сложных систем и их понимание в значительной степени опирается на наличие в них двух характерных процессов нелинейной динамики – конкуренции и синхронизации. Именно эти процессы, по-видимому, станут своеобразным ключом к пониманию динамики сложных, в частности, социоэкономических систем [3].

Изучению колебательных экономических и социальных явлений посвящено огромное число публикаций [4]. Анализ формирования общественных мнений в социальных системах также относится к этому классу проблем [5, 6].

Рассмотрена динамическая модель, которая может быть использована для описания поведения множества потребителей на рынке. Для моделирования потребителей мы будем использовать идеи теории систем автоматического регулирования [7], где отдельные лица могут регулировать некоторую переменную, отражающую их «мнение», к некоторому эталону или информации, которую они получают.

Модель одиночного потребителя

Рассмотрим простую модель, характеризующуюся только одной переменной, а именно ценой товара, которая может быть различной для каждого потребителя и отличной от среднерыночной цены. Принимая решение о покупке, потребители сравнивают рыночную цену с той, которую они считают «разумной» ценой в своем понимании. Эта так называемая «справедливая» цена формируется с учетом собственного опыта, информации, исходящей из мнений других потребителей, а также с учетом рыночной цены. Модель описывается следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dX}{dt} + X + \Phi(X) = \gamma, \quad (1)$$

где X – безразмерное отклонение справедливой цены от рыночной, γ – безразмерное начальное отклонение справедливой цены от рыночной, $\Phi(X) = \beta X / (1 + |\beta X|)$ – нелинейная характеристика дискриминатора.

В динамической системе (1) имеется только одно устойчивое состояние равновесия с координатой X^* (рис. 1). Рисунок 2 иллюстрирует зависимость $X^*(\gamma)$, конечное состояние мнения о справедливой цене в зависимости от исходного мнения. Во всех случаях $|X^*| \leq |\gamma|$. Таким образом, модель (1) демонстрирует очень простую динамику, и такое поведение выглядит естественным. Если первоначальная оценка отклонения цены потребителем равна $\gamma > 0$, то после сравнения начальной и рыночной цены

полученная оценка разницы между рыночной ценой и справедливой ценой потребителя становится равной $0 < X^* < \gamma$.

Естественно будет считать, что, если окончательное мнение потребителя является положительным ($X^* > 0$), то потребитель принимает решение «купить» (рис. 2). И напротив, если исходная оценка показывает, что рыночная цена выше, чем та, которую потребитель считает «справедливой» ($\gamma < 0$), полученное мнение становится $X^* < 0$ и $|X^*| < |\gamma|$. В этом случае будем считать, что окончательное мнение потребителя является отрицательным, то есть он принимает решение «не покупать» (рис. 2).

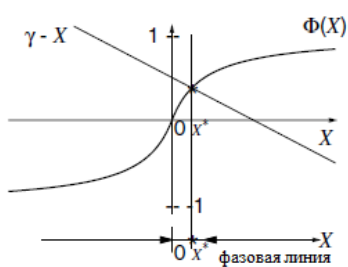


Рис. 1

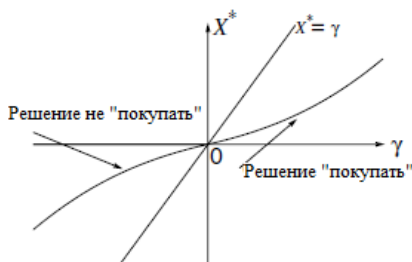


Рис. 2

Модель взаимодействующих потребителей

Поскольку потребители взаимодействуют путем обмена мнениями, мы можем рассмотреть возможность их связывания через управляющие сигналы. Для упрощения анализа предположим, что нелинейности дискриминаторов идентичны. Уравнения для взаимодействующих потребителей могут быть записаны в виде системы уравнений (2).

$$\frac{dX_i}{d\tau} + X_i + \Phi(X_i) = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \Phi(X_j), \quad (2)$$

где X_i – безразмерное отклонение справедливой цены от рыночной для i -го потребителя, γ_i – безразмерное начальное отклонение справедливой цены от рыночной для i -го потребителя, α_{ij} – сила связи между потребителями j и i . Положительное значение силы связи может быть интерпретировано как кооперативный тип связи, когда потребители, вероятнее, поступят так же, как и их соседи. И, напротив, отрицательные значения для силы связи будут представлять «антагонистический» тип взаимодействия, когда соседи не доверяют мнению друг друга или хотят сделать свой, отличный от большинства выбор.

Динамика сети взаимодействующих потребителей с различными топологиями связей

Изучена динамика сети потребителей с различными архитектурами связей на примере топологий «малый мир» [8] и масштабно-инвариантной [9]. Рассмотрим динамику сети (2) при $N=400$. Выберем все $\gamma_i = 0.3$, кроме одного возмущенного узла $\gamma_{199} = -0.3$. Силу связи между элементами будем считать одинаковой $\alpha_{ij} = \alpha$.

В случае локального взаимодействия (связей только с ближайшими соседями) при кооперативной связи ($\alpha > 0$) сеть приходит к однородному распределению, все X_i принимают положительные одинаковые значения с небольшим влиянием возмущенного элемента. При антагонистической связи ($\alpha < 0$) характерно появление «шахматного» паттерна, когда соседние элементы имеют противоположные знаки.

Изучим влияние нелокальных связей на установление стационарных режимов. В случае топологии связей «малый мир» с увеличением числа связей с ближайшими соседями в случае антагонистического взаимодействия обнаружено формирование кластеров – групп элементов сети, имеющих близкие значения состояния X . При этом между кластерами наблюдается «шахматный» паттерн (рис. 3).

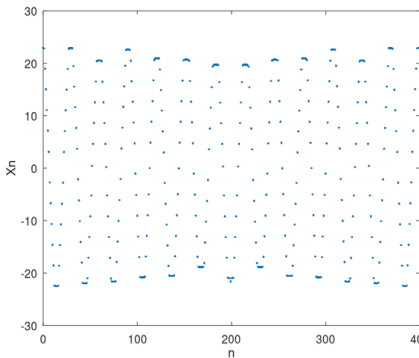


Рис. 3

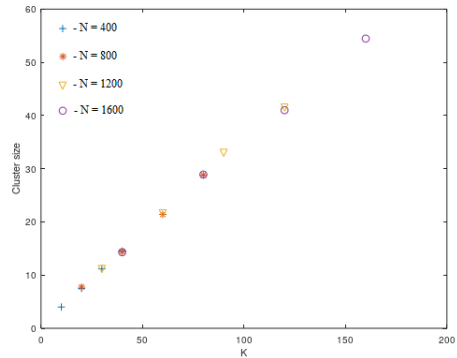


Рис. 4

Обнаружено, что размер кластера не зависит от размеров сети, а определяется числом локальных связей с ближайшими соседями k (рис. 4).

В случае масштабно-инвариантной топологии связей характерно появление хабов – узлов с большим числом связей. Если хаб имеет начальное значение $\gamma_h = -0.3$, в то время как все остальные элементы сети $\gamma_i = 0.3$, то исследуется влияние одного потребителя с большим количеством взаимодействий на динамику сети. В случае кооперативных связей сеть приходит к неравномерному, но знакоположительному состоянию, т.е. сеть подавляет возмущенное состояние хаба. При антагонистическом взаимодействии формируется знакопеременное распределение близкое к случайному.

При увеличении силы связи, с которой хаб воздействует на остальные узлы, характер динамики модели изменится. При кооперативной связи хаб «перетягивает» в

отрицательную область те узлы, связанные с ним напрямую, которые дополнительно имеют степень вершины близкую к средней для сети (рис. 5). В случае, если возмущенное состояние имеет не хаб, а элемент со средним значением числа связей, формирование подобной группы не происходит и сеть приходит к знакооднородному состоянию.

Заключение

В численном моделировании динамики сети потребителей с различными топологиями связей изучены основные закономерности формирования режимов коллективной динамики. При кооперативной связи происходит сглаживание различий между соседними элементами сети и сеть приходит к однородному распределению с небольшим влиянием возмущенного элемента. Для антагонистических связей характерно появление «шахматного» паттерна, когда соседние элементы сети имеют противоположные состояния. С добавлением симметричных связей к дальним соседям можно наблюдать «шахматный» паттерн не просто между соседями, а между кластерами элементов. При увеличении силы влияния хаба на остальные узлы в масштабной инвариантной сети можно наблюдать появление отрицательных кластеров из узлов, напрямую связанных с хабом кооперативными связями.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

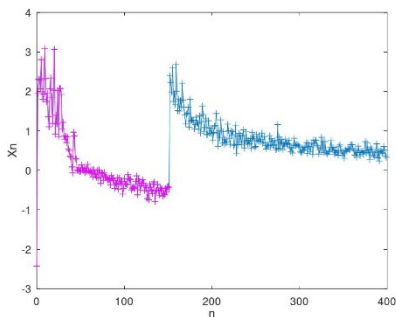


Рис. 5

- [1] Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D.U. // Phys. Rep. 2006. Vol. 424, No. 4-5. P. 175.
- [2] Arenas A., Diaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. // Phys. Rep. 2008. Vol. 469, No. 3. P. 93.
- [3] Мотова М.И., Шалфеев В.Д. // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 1. С. 93.
- [4] Jusup M., Holme P., Kanazawa K., Takayasu M., Romic I., Wang Z., Gecek S., Lipic T., Podobnik B., Wang L., Luo W., Klanjscek T., Fan J., Boccaletti S., Perc, M. // Phys. Rep. 2022. Vol. 948. P. 1.
- [5] McCullen N.J., Ivanchenko M.V., Shalfeev V.D., Gale W.F. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, No. 9. P. 2467.
- [6] Матросов В.В., Шалфеев В.Д. // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515.
- [7] Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013, 366 с.
- [8] Watts D.J., Strogatz S.H. // Nature. 1998. Vol. 393, No. 6684. P. 440.
- [9] Barabasi A.L., Albert R. // Science. 1999. Vol. 286, No. 5439. P. 509.

СИНХРОНИЗАЦИЯ АНСАМБЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОРМОЗЯЩЕЙ СВЯЗИ НА МОДЕЛИ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

Е.М. Варварин, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Коллективная динамика систем различной природы, формирование различных структур и их эволюция в системах связанных автоколебательных систем представляет собой одно из ключевых направлений в нелинейной динамике. В данной работе рассматривается синхронизация ансамбля тормозно глобально связанных нейронов.

Модель

В качестве модели отдельного нейрона была использована феноменологическая модель Бонхёффера-Ван дер Поля, воспроизводящая периодическую генерацию потенциалов действия при воздействии постоянного внешнего стимула:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) - \frac{x_i^3(t)}{3} - y_i(t) - z_i(t)(x_i(t) - v^{inh}) + S_i \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = x_i(t) - by_i(t) + a \\ \tau_2 \frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_j (g_{ij}^{inh} F(x_j)) - z_i \end{cases}, \quad (1)$$

где i – номер нейрона, x_i переменная, описывающая динамику мембранного потенциала, y_i – совокупность действия ионных токов. z_i – переменная, отвечающая за синаптическую тормозящую связь между нейронами. S_i – параметр в модели, отвечающий за внешний стимул, прикладываемый к нейрону. v^{inh} – потенциал реверсии тормозных синапсов. g^{inh} матрица коэффициентов, определяющих силу и топологию тормозных связей в ансамбле. $F(x_i)$ – функция Хевисайда. Значения параметров, неизменных во всех численных экспериментах: $a = 0.7$, $b = 0.8$, $\tau_1 = 0.08$, $\tau_2 = 3.1$, $v^{inh} = -1.5$, $S_i = 0.45$.

При отсутствии связей все нейроны находятся в автоколебательном режиме. Введем в рассмотрение фазу j -го нейрона. На k -м максимуме, она вычисляется следующим образом:

$$\varphi_j = 2\pi \frac{\Delta t_j}{T}, \quad (2)$$

где T – период – разница между временем k -го и $(k - 1)$ -го максимумов. Δt_j – разница между k -м максимумом первого нейрона и k -м максимумом j -го нейрона, как показано на осциллограмме на рисунке 1.

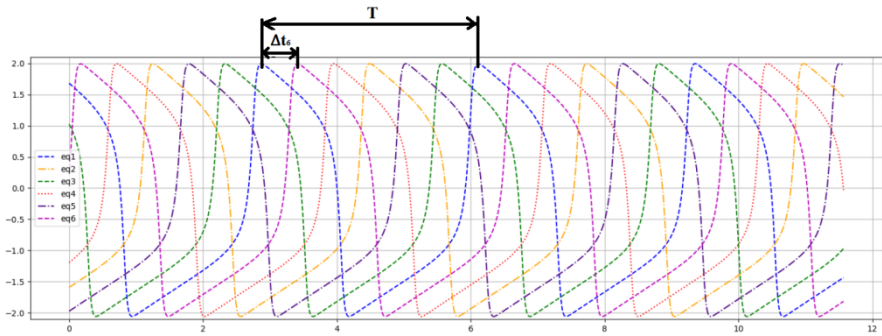


Рис. 1

Для оценки взаимной синхронизации нейронов были использованы параметры порядка R_1 и R_2 . Они вычисляются по формуле:

$$R_1 = \frac{1}{N} \left| 1 + \sum_{j=2}^N e^{i2\pi \frac{\Delta t_j}{T}} \right|, R_2 = \frac{1}{N} \left| 1 + \sum_{j=2}^N e^{i4\pi \frac{\Delta t_j}{T}} \right|. \quad (3)$$

Численные эксперименты

В зависимости от числа элементов, от значения параметра связи G_{inh} , а также от начальных условий система может показывать различную динамику и разные режимы синхронизации. При одном значении силы связи и одинаковом числе элементов в системе, в зависимости от начальных условий, реализуются различные синхронные режимы, то есть в системе имеет место мультистабильность на большей части прямой значений параметра связи.

Проведя протяжку по исследуемому параметру для четного числа элементов (в примере ниже показаны результаты для 8 элементов) получим режимы, представленные на рисунках 2 и 3:

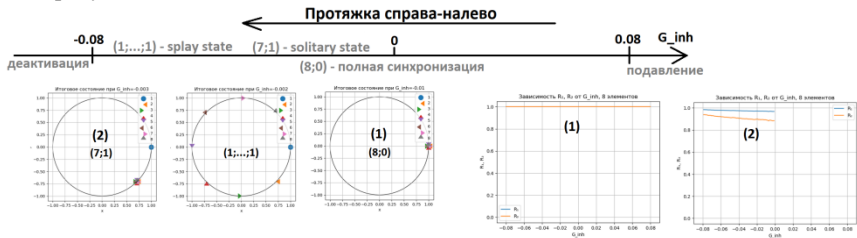


Рис. 2

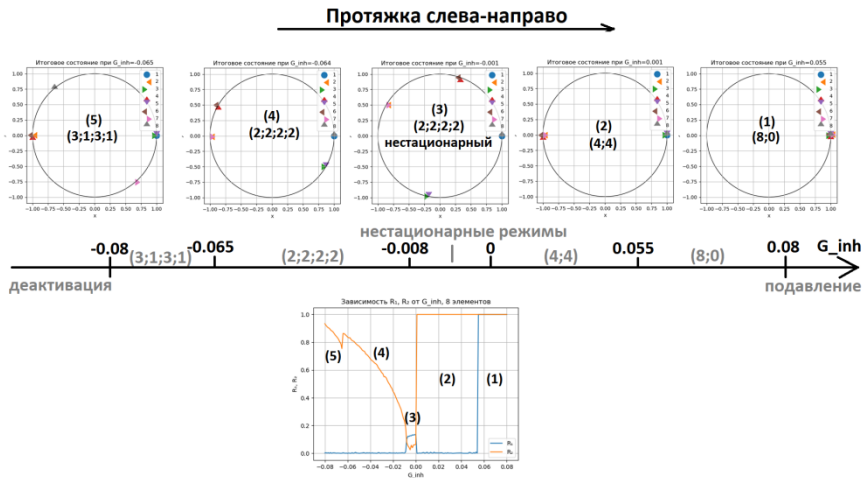


Рис. 3

На рисунках 2 и 3 представлены интервалы различных режимов системы на прямой параметра G_{inh} при протяжке по параметру справа-налево (рис. 2) и слева-направо (рис. 3). Над прямой значений параметра G_{inh} представлены графики различных режимов системы при конкретных значениях параметра (на единичной окружности). Снизу на рисунке 3 и справа на рисунке 2 представлены графики зависимости параметров порядка R_1 и R_2 от параметра связи.

Полученные режимы:

- Синфазный режим (режим полной синхронизации);
- Противофазный режим (4;4) - в общем случае $\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right)$;
- Режим (3;1;3;1) - в общем случае $\left(\frac{N}{2} - 1; 1; \frac{N}{2} - 1; 1\right)$;
- Режим (2;2;2;2) - в общем случае $\left(\frac{N}{2} - 2; 2; \frac{N}{2} - 2; 2\right)$;
- Режим splay state;
- Нестационарные режимы;
- Режим solitary state $(N-1; 1)$;
- Подавление некоторых нейронов;
- Деактивация всех нейронов.

При нечетном числе элементов (ниже представлен результат для 7 элементов) разбиение по прямой параметра связи выглядит следующим образом:

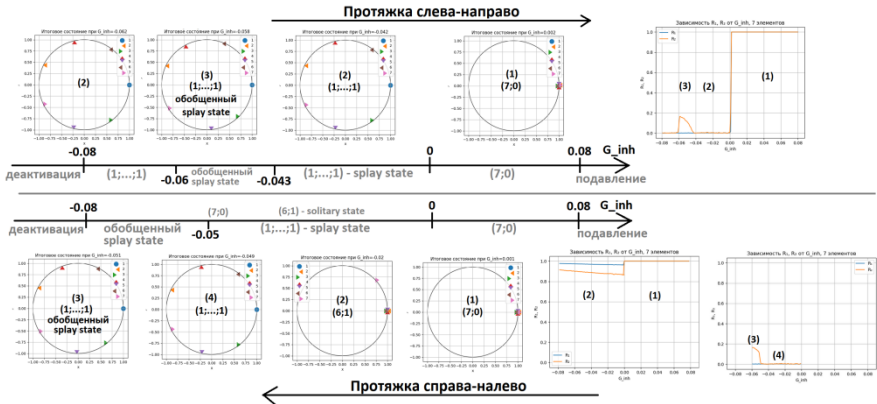


Рис. 4

Полученные для нечетного числа элементов режимы:

- Синфазный режим (режим полной синхронизации);
- Режим splay state (полный при $R_2 = 0$ и обобщенный при $R_2 \neq 0$);
- Режим solitary state ($N-1$; 1);
- Подавление некоторых нейронов;
- Деактивация всех нейронов.

Выводы

Таким образом показано, что в ансамбле глобально тормозно симметрично связанных систем ФитцХью-Нагумо при четном и нечетном числе элементов при определенных начальных условиях при слабой силе связи реализуются режимы: полной синфазной синхронизации, уединенное состояние, режим splay state, различные структуры с нулевым первым параметром порядка и ненулевым вторым параметром порядка, противофазная синхронизация (четное число элементов), мультистабильность, нестационарные структуры. При сильной связи происходят эффекты частичного и полного вымирания колебаний.

Работа поддержана Минобрнауки РФ, Соглашение FSWR-2020-0036.

[1] Рабинович М. И., Мюезинолу М. К. // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 4. С. 371.
 [2] Rabinovich M., Tristan I., Varona P. // PloS one. 2013. Vol. 8, No. 5. P. e64406.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗБУДИМОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО НЕЙРОПОДОБНОГО ГЕНЕРАТОРА

Д.В. Чиндарев, Д.И. Большаков, М.А. Мищенко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современной междисциплинарной науке одним из наиболее актуальных направлений является изучение принципов работы мозга. Помимо фундаментального характера исследований данное направление имеет выраженную практическую значимость в области разработки интеллектуальных устройств, воспроизводящих принципы обработки информации мозгом. Построение электронных моделей нейронов – быстро развивающаяся область физической электроники.

Целью данной работы является экспериментальное исследование возбуждения колебаний в электронном нейроподобном генераторе.

Описание модели

Ранее в работе [1] была предложена экспериментальная реализация нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром. Данная модель способна генерировать в режимах, характерных для нейронов мозга, в том числе производить одиночные импульсы и пачки импульсов (берсты) – как регулярные, так и хаотические, а также функционировать в возбудимом (неколебательном) режиме, отвечая на внешние воздействия, что характерно для подавляющего большинства нейронов мозга.

Динамика рассматриваемой модели описывается следующей системой дифференциальных уравнений, определенной в цилиндрическом фазовом пространстве:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = y, \frac{dy}{d\tau} = z, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} = \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi + S \varepsilon_1 \cos \varphi)y - S \sin \varphi,$$

где переменная φ – текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов, γ – начальная частотная расстройка, ε_1 и ε_2 – параметры инерционности фильтров, переменную y можно интерпретировать как описывающую изменение мембранного потенциала. S – функция состояния триггера Шмитта, принимающая значения 0 и 1.

Функциональная схема полученной цепи представлена на рисунке 1. Схема включает в себя опорный генератор (referent generator, RG), фазовый дискриминатор (phase detector, PD) и генератор, управляемый напряжением (voltage-controlled oscillator, VCO). Элементы DA1, DA2, DA3, F1 и F2 являются элементами исходного полосового фильтра, элементы DA4 и TR1 являются элементами цепи слежения за состоянием системы, а элемент SA1 – электронный ключ, управляемый цепью слежения. Данная цепь работает следующим образом: в случае $\gamma > 0$, на вход цепи слежения с выхода интегрирующего звена полосового фильтра поступает сигнал ниже порогового значения, в результате чего она генерирует сигнал логического «0», поступающий в последствии на управляющий вход электронного ключа, ключ, в таком случае, остается разомкнутым

и сигнал проходит по цепи полосового фильтра, тем самым показывая автоколебания. В случае $\gamma < 0$, на вход цепи слежения поступает сигнал выше порогового значения, в результате чего она генерирует сигнал логической «1», поступающий на управляющий вход электронного ключа, ключ, в таком случае, замыкается, тем самым пропуская постоянную составляющую сигнала обратной связи системы ФАПЧ. При наличии постоянной составляющей сигнала обратной связи в системе ФАПЧ возникает режим синхронизации, которому отвечает отсутствие колебаний на выходе петли обратной связи.

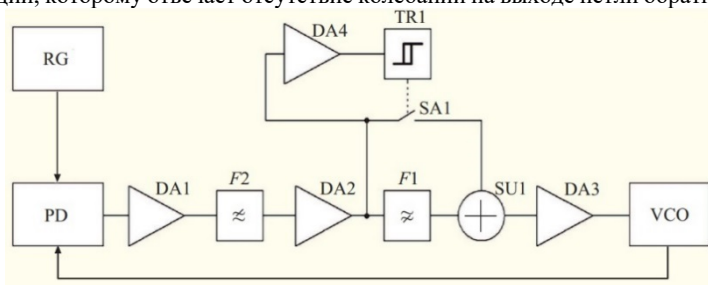


Рис. 1

Анализ возбудимости

Путем изменения параметра γ был получен возбудимый режим (отсутствие колебаний). Параметр γ изменялся не напрямую, а при помощи изменения параметра n , который отвечает за деление частоты. С помощью генератора на вход модели был подан прямоугольный импульс, изображенный на рисунке 2.

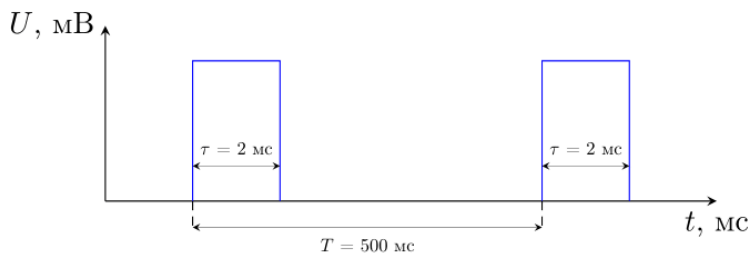


Рис. 2

Длительность импульса оставалась постоянной и равной 2мс, период равнялся 500мс. Далее фиксировалось значение амплитуды импульса, при которой система проявляла отклик. Данная зависимость представлена на рисунке 3. Измерения проводились для двух режимов. Режим 1 – пачечный режим с одним импульсом в пачке, режим 2 – пачечный режим с двумя импульсами в пачке. На рисунке 4, 5 приведены примеры полученных осциллограмм. Рисунок 4 – промежуточный случай, рисунок 5 – отклик.

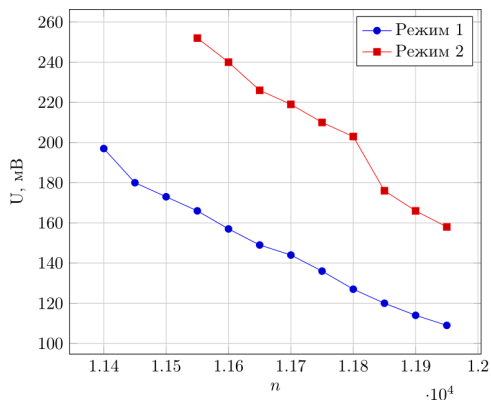


Рис. 3

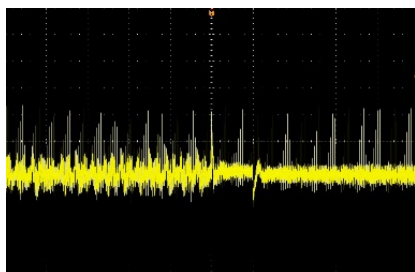


Рис. 4

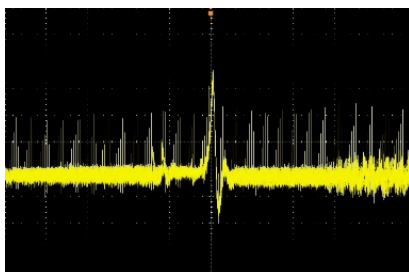


Рис. 5

Далее на вход нейрона подавался сигнал с двумя импульсами. При двух значениях и интервала Δt между импульсами (3,10 миллисекунд) фиксировалось значение амплитуды, при которой система проявляла отклик. Схема данного импульса изображена на рисунке 6.

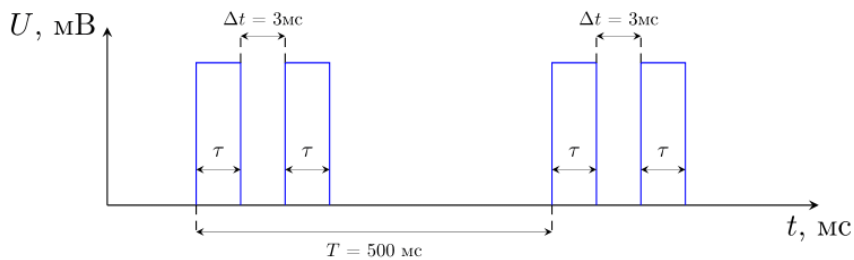


Рис. 6

На рисунке 7 изображена зависимость амплитуды, необходимой для восстановления колебаний, от параметра n , в случае парных импульсов.

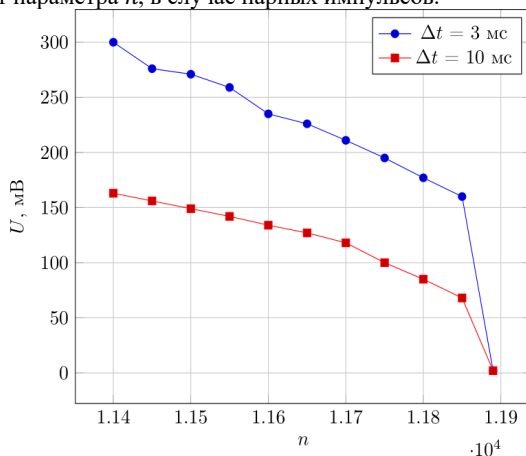


Рис. 7

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод, что на отклик системы наибольшее влияние оказывает суммарная площадь импульсов. Особо отчетливо это проявляется при уменьшении параметра γ . В случае парных импульсов особую роль играет расстояние между ними. Из результатов измерений видно, что меньший интервал между импульсами требует большего внешнего воздействия.

Работа выполнена при поддержке программы развития региональных научно-образовательных математических центров № 075-02-2020-1483 «Математика технологий будущего» и в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах»).

[1] Большаков Д.И., Мищенко М.А., Матросов В.В., Сысоев И.В // Письма в журнал технической физики. 2022. Т. 48, № 9. С. 23.

СИНХРОНИЗАЦИЯ СПАЙКОВ И БЁРСТОВ В АНСАМБЛЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ТЕТА-НЕЙРОНОВ

Д.А. Зайцева, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Нейроны передают информацию между собой с помощью электрических импульсов – спайков, которые являются основной формой электрической активности нейрона. Бёрсты – это объединения спайков в пачки, которые чередуются с периодами затишья [1]. Генерация бёрстов может быть как регулярной, так и хаотической. Исследования показали, что при обучении животных и людей происходит увеличение количества бёрстов в некоторых областях мозга. Таким образом, бёрстинг играет важную роль в нейродинамике.

Модели нейронов разделяются на два основных класса: биологически-реалистичные, т е направленные на максимально реалистичное изображение нейрона и феноменологические, создающиеся для наблюдения и исследование некоего феномена [2].

Постановка задачи

С помощью модифицированного уравнения тета-нейрона и введения параметра связи исследовать явления спайкинга и бёрстинга и их синхронизацию.

Решение

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая динамику ансамбля модифицированных тета-нейронов следующая:

$$\dot{\theta}_j = \gamma_j - f_j(\theta) + \sum_{i=1}^N d_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j), \quad (1)$$

где $f_j(\theta) = \cos\left(\frac{\theta_j}{n_j}\right)$, θ_j – фаза, γ_j и n_j – параметры системы, N – число элементов в ансамбле, d_{ij} – параметр связи.

На графиках рис.1, рис. 2 представлена временная реализация для случаев $n_j = 2$, $n_j = 5$. Рис. 1 демонстрирует спайковую активность, рис. 2 – бёрстовую: в бёрсте 4 спайка.

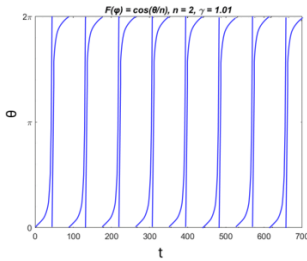


Рис. 1

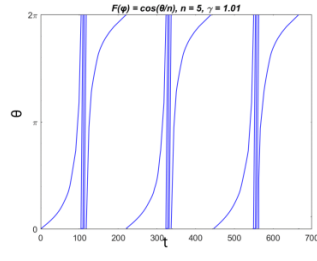


Рис. 2

Формула для нахождения частоты следования бёрстов:

$$\omega_{1,2}^b = \frac{1}{2\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(\frac{\theta_{1,2}(\tau) - \theta_{1,2}(0)}{\tau} \right). \quad (2)$$

Был проведен расчет значений частот следования бёрстов в зависимости от параметра $d_{ij} = d$ для двух тета-нейронов при параметрах $n_1 = n_2 = 3, \gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 1.02$.

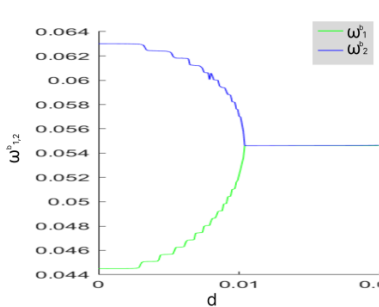


Рис. 3

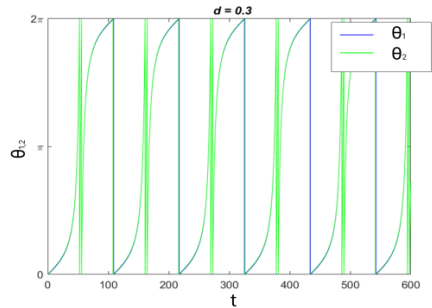


Рис. 4

На рис. 3 представлена зависимость частоты следования бёрстов от величины параметра d . При $d > 0.01$ обе частоты приходят к одному значению, что свидетельствует о наступлении частотной синхронизации бёрстов. На рис. 4 представлена временная реализация данной системы при $d = 0.3$.

На рис. 5 представлена зависимость частот следования бёрстов от величины параметра d при $n_1 = 3, n_2 = 5, \gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 1.02$. При $d \geq 0.9$ наступает синхронизация частот следования бёрстов.

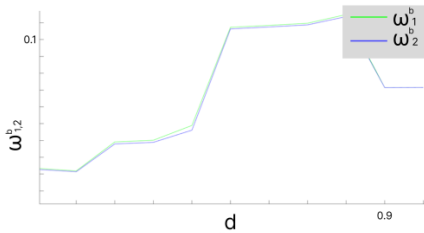


Рис. 5

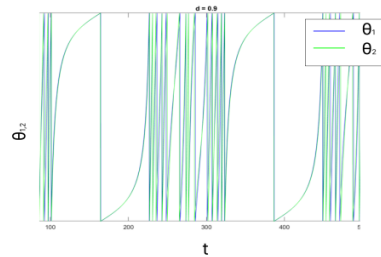


Рис. 6

На рис. 6 представлена временная реализация фазовых переменных при $d = 0.9$.

В ходе исследований был получен результат, что синхронизация следования бёрстов наступает как в системе тета-нейронов с одинаковыми значениями параметров n_1, n_2 , так и с разными.

Частота следования спайков вычислялась по формуле: $\omega_{1,2}^s = \frac{2\pi(m-1)}{T_s}$, где ω – это частота спайков, $(m - 1)$ – это количество периодов на заданном интервале, T_s – это сумма всех межспайковых интервалов, посчитанных в точке $\theta = \pi$.

На графике рис. 7 представлен переход к синхронному режиму спайков для системы двух связанных нейронов при значениях $\gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 1.02, n_1 = 3$ и $n_2 = 5$. При $d > 0.9$ частоты следования спайков приходят к одному значению, что соответствует явлению синхронизации. Очевидно, что бёрстовая синхронизация также имеет место.

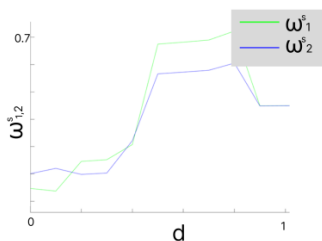


Рис. 7

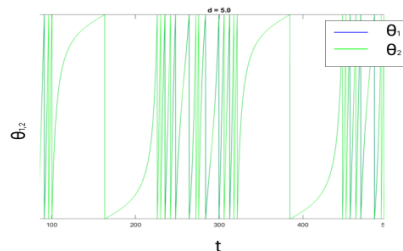


Рис. 8

Графики временных реализаций (рис. 8) демонстрируют спайковую, и, следовательно, бёрстовую активность со значениями параметров $\gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = 1.02, n_1 = 3, n_2 = 5, d = 5$.

Рассмотрена динамика ансамбля, состоящего из трех тета-нейронов. Связь устроена следующим образом. По часовой стрелке связь d_1 , а против – d_2 . На рис. 9 пред-

ставлены временные реализации в случае синфазной синхронизации частот следования бёрстов при значениях параметров $d_{12} = d_1 = 0.03$, $d_{22} = d_2 = 0.01$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$, $\gamma_1 = 1.01$, $\gamma_2 = 1.02$, $\gamma_3 = 1.03$.

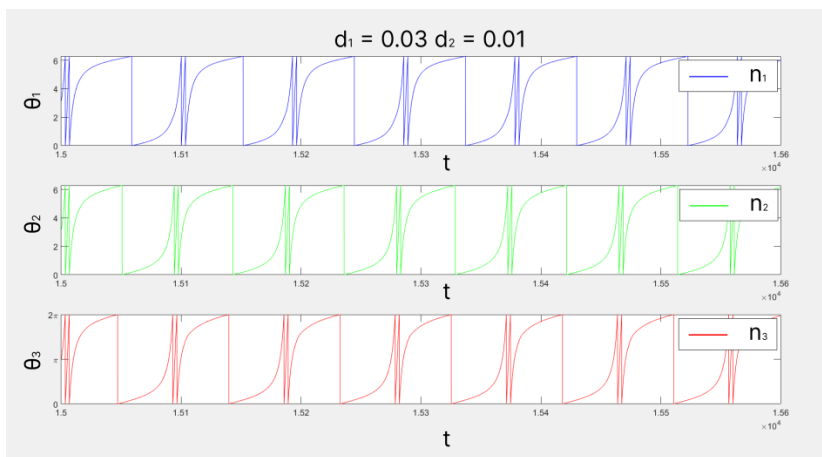


Рис. 9

Выводы

В данной работе предложена фазовая модель, описывающая спайковую и пачечную активность нейрона.

Показано существование синхронной бёрстовой и спайковой активности двух связанных модифицированных тета-нейронов.

Показано существование синфазной бёрстовой активности трех связанных модифицированных тета-нейронов.

Работа поддержана РФФ (проект 23-12-00180).

- [1] Izhikevich. E.M. Dynamical system in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge: MIT, 2007, 503 p.
- [2] Шалфеев В.Д. Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации: Монография. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013, 366 с.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО

А.А. Злобин, В.В. Клиньшов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Коллективная динамика сетей взаимодействующих элементов играет важную роль во многих областях науки и техники. Особенный интерес вызывает изучение явления синхронизации. В данной работе рассматривается модифицированная модель фазовых осцилляторов Курамото [1-2], которая учитывает временные задержки распространения сигнала между элементами как в реальных биологических системах:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_{j\tau} - \theta_i), \quad i = 1 \dots N. \quad (1)$$

В качестве переменной выступает фаза осциллятора θ_i , которая определена на единичной окружности $\theta_i \in [0, 2\pi)$. Параметры K – сила связи между нейронами, N – количество элементов в системе, ω_i – собственная частота i -го осциллятора. Особенностью данной модели является то, что во втором члене уравнения, который описывает взаимодействие между элементами, присутствует фаза j -го осциллятора $\theta_{j\tau}$ в момент времени $t - \tau$. Это означает то, что фаза осциллятора в момент времени $t - \tau$ оказывает влияние на осцилляторы в момент времени t . Таким образом прошлые состояния осцилляторов влияют на динамику системы в данный момент времени.

Для изучения синхронизации будет применён метод редуцирования, который впоследствии будет сравнён с численным счётом. Метод редуцирования [3], предложенный учёными, заключается в рассмотрении системы, когда $N \rightarrow \infty$, т.е. в системе наблюдается бесконечное количество элементов. Тогда состояние системы в момент времени t можно описывать с помощью функции распределения $f(\omega, \theta, t)$, которая зависит от частоты ω и фазы θ осцилляторов. Таким образом $f(\omega, \theta, t) d\omega d\theta$ даёт долю осцилляторов с фазами в пределах $[\theta; \theta + d\theta]$ в момент времени t и частотами в пределах $[\omega; \omega + d\omega]$. Проинтегрировав по всем параметрам, получим:

$$\int_0^{2\pi} f(\omega, \theta, t) d\theta = g(\omega), \quad (2)$$

где $g(\omega)$ – независимое от времени распределение осцилляторных частот.

$$f = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[1 + \frac{\alpha(\omega, t)^* e^{i\theta}}{1 - \alpha(\omega, t)^* e^{i\theta}} + \frac{\alpha(\omega, t) e^{-i\theta}}{1 - \alpha(\omega, t) e^{-i\theta}} \right]. \quad (3)$$

Кроме того, распределение $f(\omega, \theta, t)$ должно удовлетворять уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(f v_\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

Подставляя в плотность распределения получаем систему для локальной динамики сети, т.е. системы где параметры зафиксированы:

$$\dot{\alpha} = i \left(\frac{K}{2} [R_\tau - \overline{R_\tau} \alpha^2] + \alpha \omega \right), \quad (5)$$

$$R_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_\tau(\omega, t) g(\omega) d\omega. \quad (6)$$

Для получения редуцированной системы, описывающую систему, в которой параметр ω распределён в соответствии с $g(\omega)$, в данной работе будет рассматриваться система, в которой частоты осцилляторов распределены в соответствии со следующей серией рациональных распределений $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{n \sin \frac{\pi}{2n} \Delta^{2n-1}}{(\omega - \Omega)^{2n} + \Delta^{2n}}, \quad (7)$$

где Δ – полуширина, а Ω – центр распределения. Параметр n определяет форму распределения. Проинтегрировав уравнение (5), получим систему для глобальной динамики сети:

$$\begin{cases} R_\tau = -i \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\psi_j} \alpha_{j\tau} \\ \dot{\alpha}_j = \frac{K}{2} [R_\tau - \overline{R_\tau} \alpha_j^2] + i \alpha_j (\Delta e^{i\psi_j} + \Omega). \end{cases} \quad (8)$$

Рис. 1 показывает, что полученная редуцированная система довольно хорошо согласуется с микроскопической системой. Также можно заметить, что при $n = 10$ задержка положительно влияет на синхронизацию. Это хорошо видно на графике, т.к. критическая сила связи K_c при τ меньше, чем при $\tau = 0$. Таким образом распределение параметров играет нетривиальную роль в синхронизации фазовых осцилляторов.

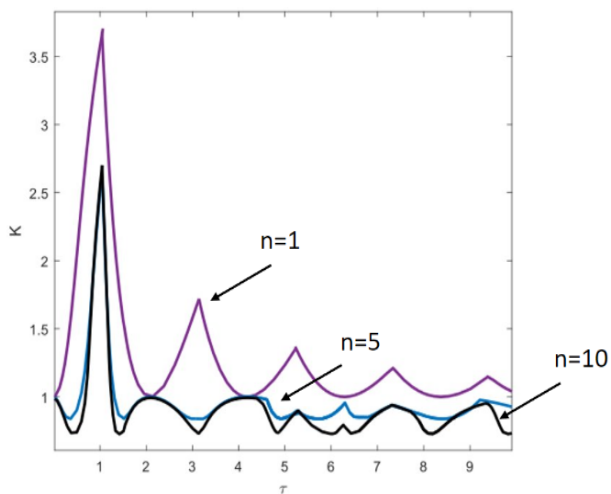


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, грант № 19-72-10114.

[1] Kuramoto Y. // Lecture Notes in Physics. 1975. Vol. 39. P. 420.

[2] Acebrón J.A, Bonilla L.L., Pérez Vicente C.J., Ritort F., Spigler R. // Reviews of modern physics. 2005. Vol. 77, No.1. P 137.

[3] Ott E., Antonsen T. M. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008. Vol 18. P. 037113.

Секция «Фундаментальные и прикладные задачи теории нелинейных колебаний»

Заседание секции проводилось 25 мая 2023 г.
Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.