Труды XXVIII научной конференции по радиофизике

# СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»

Председатель – И.С. Павлов, секретарь – О.Н. Минаева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

# КАПЛЯ РАССЛАИВАЮЩЕГОСЯ РАСТВОРА КАК ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ КУБИТА

**В.Б. Федосеев**

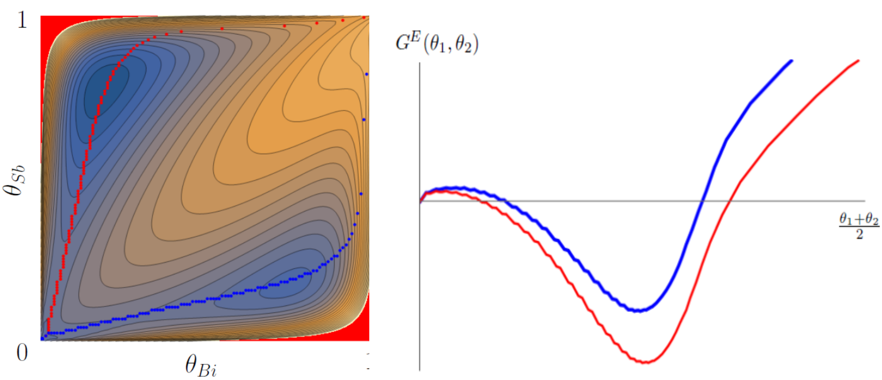
*ИМХ РАН*

Одним из свойств кубита является то, что он кроме двух основных состояний $|1\rangle$ и $|0\rangle$ может находиться в состоянии их "суперпозиции" ($x \cdot |0\rangle + y \cdot |1\rangle$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$). В сообщении показано, что подобными свойствами могут обладать относительно простые термодинамические системы микронного и субмикронного размера.

Термодинамическое описание фазовых равновесий в макросистемах основано на вычислении и минимизации энергии Гиббса (G) смеси. Для систем ограниченного объёма становятся существенными вклады, связанные с поверхностной энергией межфазных границ, и возникают эффекты, ненаблюдаемые в макросистемах. Фазовые превращения в малом объёме имеют особенности: меняются температуры переходов, меняется область растворимости, появляются новые метастабильные состояния, становится существенным эффект формы [1].

Сосуществующие растворы смачивают друг друга, поэтому при расслаивании малого объёма раствора с большей вероятностью образуется структура типа core-shell (ядро-оболочка). При термодинамическом описании состояние такой частицы описывается 2-мя параметрами ($r$ – радиус капли и $x$ – концентрация раствора) и 2-мя независимыми переменными ($\theta_1$ и $\theta_2$ – долями компонентов, перешедших в core-фазу). В этих переменных избыточную свободную энергию системы $G^E(\theta_1, \theta_2)$ можно отобразить на единичный квадрат. Это позволяет сопоставлять состояния систем разного размера, состава и конфигурации (core-shell, janus либо иной).

Пример такого отображения приведён на рис. 1, который демонстрирует состояния сферической капли ($r = 1$ мкм) раствора висмут–сурьма (Bi–Sb). Размерные эффекты при фазовых превращениях в этой системе ранее рассмотрены в [1, 2].




а б

Рис. 1

Красные и синие линии на рисунке 1 соответствуют овражным траекториям, соединяющим гомогенное состояние с равновесными core-shell состояниями, и изменению свободной энергии системы $G^E(\theta_1, \theta_2)$ вдоль этих траекторий (рис. 1б). Согласно рис. 1 система имеет три термодинамически устойчивых состояния гомогенное ($\theta = 0$) и два гетерогенных $Sb@Bi$ и $Bi@Sb$ (core-фаза содержит $Sb$ и $Bi$ соответственно). Core-shell состояния для рассмотренного случая более выгодны. Для перехода из состояния $\theta = 0$ в состояние $Sb@Bi$ или $Bi@Sb$ система должна преодолеть небольшой энергетический барьер (рис. 1б). Состояния $Sb@Bi$ и $Bi@Sb$ разделены существенно более высоким энергетическим барьером, поэтому прямой переход между ними невозможен. Высота барьеров, энергия состояний и состав равновесных core-shell состояний зависят от температуры, размера и состава капель.

Таким образом, описанная система может находиться либо в одном из основных состояний, либо в метастабильном гомогенном состоянии, являющимся переходным между ними. С точки зрения теории информации эта система хранит один бит информации. Используя аналогию с кубитом, метастабильное переходное состояние можно интерпретировать как "запутанное".

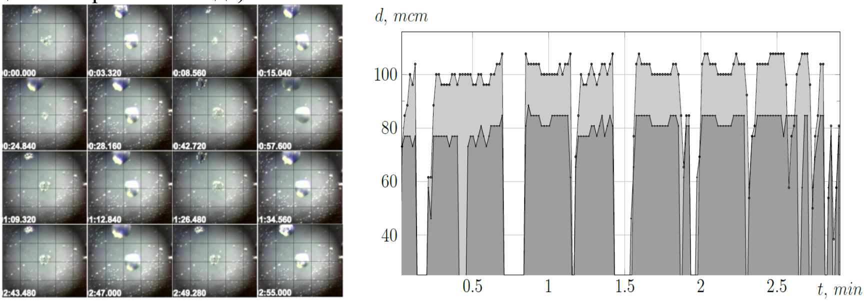
На рис. 1а видно, что область запутанного состояния включает некоторую окрестность гомогенного состояния и овражных траекторий и ограничена точками перевалов. Точки перевала на овражных траекториях $\left(G^E(\theta_1^*, \theta_2^*)\right)$ для core-shell состояний соответствуют понятию "зародыш критического размера" [3]. Рост критического зародыша переводит систему в одно из основных состояний (рис. 1б). Величины $G^E(\theta_1^*, \theta_2^*)$ соответствуют энергии активации перехода системы из гомогенного (запутанного) в одно из основных состояний. Вернуть систему в запутанное состояние (стереть информацию) можно нагревом до температуры ликвидуса или деформацией [4]. И энергию активации, и энергию стирания информации можно настраивать, меняя размеры частицы, концентрацию раствора или химический состав. При переходе из запутанного в основное состояние выделяется энергия $G^E_{Sb@Bi}$ или $G^E_{Bi@Sb}$. Эта энергия превышает энергию активации $G^E(\theta_1^*, \theta_2^*)$ и может быть использована на взаимодействие с соседними частицами.

Описанная система имеет два основных состояния и одно "запутанное", хранит один бит информации, имеет возможность взаимодействовать с другими подобными системами и управляется внешними воздействиями. По совокупности признаков для такой системы можно предложить термин

"тебит" или "т-бит" (**thebit** – **the***rmodynamic* **bit**).

Тебиты могут быть реализованы не только на твёрдых, но и на жидких расслаивающихся растворах, а также на основе других фазовых превращений.

Готовый пример, демонстрирующий "взаимодействие тебитов" на фазовом переходе кристалл – раствор, приведён в [5, 6]. При испарении или конденсации растворителя (воды) в капле раствора соли образуется либо растворяется кристалл. Это меняет давление пара растворителя и воздействует на соседние капли. В результате наблюдается возбуждение долговременных асинхронных апериодических колебаний между состояниями раствор ($S$) и кристалл ($C$) (рис. 2). Видео процесса размещено на сайте работы [5] в supplemental files. Связь между каплями и "перенос информации" осуществляется через давление пара растворителя, которое стабилизируется внешним резервуаром. В экспериментах роль резервуара выполняла крупная капля растворителя (дистиллированная вода).




а б

Рис. 2

В этом случае с запутанным состоянием можно отождествить неустойчивое состояние, при котором кристалл окружён непостоянным объёмом раствора (состояние $x \cdot C + y \cdot S$). На рис. 2б видно, что время жизни состояний $S$ и $C$ достигает нескольких десятков секунд, а переключение между ними составляет доли секунды при практически полном испарении растворителя.

Подобные осцилляции мы наблюдали с каплями растворов различных кристаллических веществ, в том числе органических [6].

***Заключение***

Обсуждая введение понятия тебит (thebit), следует рассмотреть необходимость порождения этой новой сущности. Выше показано, что тебит обладает необходимыми свойствами, чтобы выполнять функции аналогичные функциям кубита.

При сопоставлении кубита и тебита можно отметить некоторые особенности, которые могут рассматриваться как преимущества тебита. Для его функционирования не требуется высокого вакуума, сверхнизких температур, сверхчистых материалов, тебит более устойчив к слабым случайным внешним воздействиям, не нуждается в прецизионных методах измерения основных состояний, допускает возможность измерения характеристик "запутанного" состояния. Сопоставление позволяет ожидать, что накопленный опыт работы с кубитами может способствовать разработке прототипов устройств, работающих на тебитах.

[1] Федосеев В.Б. // ФТТ. 2015. Т. 57, №. 3. С. 585.
[2] Шишулин А.В., Федосеев В.Б., Шишулина А.В. // ЖТФ. 2019. Т. 89, №. 4. С. 556.
[3] Фольмер М. Кинетика образования новой фазы. – М.: Наука, 1986. 208 с.
[4] Федосеев В.Б., Шишулин А.В. // ФТТ. 2018. Т. 60, № .7. С. 1382.
[5] Федосеев В.Б., Максимов М.В. // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101, №. 6. С. 424.
[6] Федосеев В.Б. // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, №. 2. С. 195.

# ПОТОК ЭНЕРГИИ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА УПРУГИХ ВОЛН

**А.Е. Китаев**

*АО «ННПО имени М.В.Фрунзе»*

***Введение***

Уравнение Ламе – это уравнение следующего вида:

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}grad\, div\boldsymbol{u}-\frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{1}$$

В правой части уравнения стоит $\boldsymbol{f}$ – объемная плотность внешних сил. Неизвестной величиной является смещение упругой среды $\boldsymbol{u}$. Также в уравнение входят характеристики упругой среды: ρ – объемная плотность вещества, $E$ – модуль растяжения (модуль Юнга), σ – коэффициент Пуассона.

Уравнение (1) может быть записано в другой форме, использующей не коэффициенты упругости, а скорости продольных ($a$) и поперечных ($b$) волн:

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\rho(a^2-b^2)grad\, div\boldsymbol{u}-\rho b^2\Delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{2}$$

Можно записать его и с использованием оператора *rot*:

$$\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\rho a^2 grad\, div\boldsymbol{u}+\rho b^2 rot\, rot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}. \tag{3}$$

В случае равенства скоростей поперечных и продольных волн уравнение (2) приобретает сходство с волновым уравнением для векторного потенциала, используемым в теории электромагнетизма:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\Delta\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \tag{4}$$

В докладе [1] автором был предложен новый лагранжиан для уравнения Ламе. Кроме этого было представлено уравнение энергетического баланса, которое можно получить, исходя из этого лагранжиана. Объемная плотность энергии, входящая в это уравнение, имеет следующий вид:

$$\varepsilon=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2+\frac{\rho}{2}a^2(div\boldsymbol{u})^2+\frac{\rho}{2}b^2(rot\boldsymbol{u})^2. \tag{5}$$

Вектор объемной плотности потока энергии получился следующий (квадратные скобки обозначают векторное произведение):

$$\boldsymbol{S} = -\rho a^2 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} div\boldsymbol{u} - \rho b^2 [\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} rot\boldsymbol{u}]. \tag{6}$$

Цель данной работы – получить поток энергии для гармонического точечного силового источника с использованием выражения (6).

***Методика***

Пусть силовой источник имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}_0 e^{i\omega t} \delta(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Решение этой задачи представляется в виде суммы двух слагаемых ($\boldsymbol{u}$=$\boldsymbol{u}_1$+$\boldsymbol{u}_2$). Первое слагаемое, зависящее от скорости поперечных волн, выглядит так:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 = \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{b}r}}{4\pi\rho\omega^2} \Bigg\{ & \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{F}_0)}{r}\left(-\frac{\omega^2}{b^2} + 3i\frac{\omega}{br} + \frac{3}{r^2}\right) \\ & + \frac{\boldsymbol{F}_0}{r}\left(\frac{\omega^2}{b^2} - i\frac{\omega}{br} - \frac{1}{r^2}\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Второе (зависящее от $a$) – так:

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{a}r}}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{F}_0)}{r}\left(-\frac{\omega^2}{a^2} + 3i\frac{\omega}{ar} + \frac{3}{r^2}\right) + \frac{\boldsymbol{F}_0}{r}\left(-i\frac{\omega}{ar} - \frac{1}{r^2}\right)\right\}. \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{r}/r$. Подробное описание процесса нахождения решения (в координатном виде для действительного точечного источника) можно найти в [2].

Пусть внешняя сила в выражении (7) направлена вдоль оси $z$:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{z}_0 F_0 e^{i\omega t} \delta(\boldsymbol{r}). \tag{10}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 = \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{b}r}}{4\pi\rho\omega^2} \Bigg\{ & \frac{\boldsymbol{n} z F_0}{r^2}\left(-\frac{\omega^2}{b^2} + 3i\frac{\omega}{br} + \frac{3}{r^2}\right) \\ & + \boldsymbol{z}_0\frac{F_0}{r}\left(\frac{\omega^2}{b^2} - i\frac{\omega}{br} - \frac{1}{r^2}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{11}$$

и

$$\boldsymbol{u}_2 = -\frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{a}r}}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \frac{\boldsymbol{n} z F_0}{r^2}\left(-\frac{\omega^2}{a^2} + 3i\frac{\omega}{ar} + \frac{3}{r^2}\right) + \boldsymbol{z}_0\frac{F_0}{r}\left(-i\frac{\omega}{ar} - \frac{1}{r^2}\right)\right\}. \tag{12}$$

Оставим только наиболее медленно спадающие слагаемые (в дальнейшем они будут использованы при вычислении потока энергии в волновой зоне):

$$\boldsymbol{u}_{\sim} = F_0 \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{b}\boldsymbol{r}}}{4\pi\rho b^2}\left\{-\frac{\boldsymbol{n}z}{r^2} + \frac{\boldsymbol{z}_0}{r}\right\} + F_0 \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{a}\boldsymbol{r}}}{4\pi\rho a^2}\left\{\frac{\boldsymbol{n}z}{r^2}\right\}. \quad (13)$$

В сферических координатах это выражение будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{u}_{\sim} = -F_0 \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{b}\boldsymbol{r}}}{4\pi\rho b^2}\left\{sin\theta\frac{\boldsymbol{\theta}_0}{r}\right\} + F_0 \frac{e^{i\omega t - i\frac{\omega}{a}\boldsymbol{r}}}{4\pi\rho a^2}\left\{cos\theta\frac{\boldsymbol{r}_0}{r}\right\}. \quad (14)$$

В итоге после вычислений  мы получим следующее выражение для усредненной по периоду плотности радиального потока энергии:

$$\bar{S}_r = \frac{|F_0|^2\omega^2 cos^2\theta}{32\pi^2\rho a^3 r^2} + \frac{|F_0|^2\omega^2 sin^2\theta}{32\pi^2\rho b^3 r^2}. \quad (15)$$

Рассмотрим два частных случая. Если скорости продольных и поперечных волн равны (*a*=*b*), мы будем иметь следующую формулу вместо (15):

$$\bar{S}_{r1} = \frac{|F_0|^2\omega^2}{32\pi^2\rho b^3 r^2}. \quad (16)$$

Проинтегрировав по сфере, мы получим

$$\bar{S}_{tot1} = \frac{|F_0|^2\omega^2}{8\pi\rho b^3}. \quad (17)$$

Если же скорость продольных волн стремится к бесконечности, мы будем иметь (вместо (15)):

$$\bar{S}_{r2} = \frac{|F_0|^2\omega^2 sin^2\theta}{32\pi^2\rho b^3 r^2}. \quad (18)$$

После интегрирования по сфере:

$$\bar{S}_{tot2} = \frac{2}{3}\frac{|F_0|^2\omega^2}{8\pi\rho b^3} = \frac{2}{3}\bar{S}_{tot1}. \quad (19)$$

Формулы (17) и (19) представляют собой усредненные по периоду мощности потерь на излучение упругих волн (для двух рассмотренных частных случаев).

***Обсуждение результатов***

Представляет интерес сравнение полученных выше формул с известными результатами для электромагнитного поля. В докладе [1] автором были приведены два выражения, позволяющие формально (не обращая внимания на различие размерностей) сделать следующие из уравнения Ламе соотношения похожими на соотношения для электромагнитного поля:

$$4\pi\rho b^2 = 1, \qquad \boldsymbol{j} = \frac{1}{4\pi\rho b}\boldsymbol{f}. \tag{20}$$

Во второе выражение (20) входит $\boldsymbol{j}$ – объемная плотность электрического тока.

Если считать что $b$=$c$ ($c$ – скорость света), тогда можно связать амплитуду силы $F_0$ (коэффициент в выражении (10) для точечного силового источника) с амплитудой тока $J_0$ в вибраторе, создающем электромагнитное поле:

$$F_0 = \frac{J_0}{c}. \tag{21}$$

Подставив все это в формулу (17) для мощности потерь на излучение в случае равенства скоростей продольных и поперечных волн (и считая, что $b$=$c$), мы получим:

$$\bar{S}_{tot1} = \frac{|J_0|^2\omega^2}{2c^3}. \tag{22}$$

Чтобы эта формула совпала с усредненной по периоду формулой Лармора [3] (напомним: при усреднении по времени появляется множитель ½), правая часть должна быть умножена на 2/3. Формально такой же результат получается в случае, когда скорость продольных волн стремится к бесконечности.

[1] Китаев А.Е. Плотность функции Лагранжа для уравнения Ламе (и формальный переход к уравнениям Максвелла). // Труды XXVI конференции по радиофизике, ННГУ, 2022.
[2] Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей) Теория звука Т1. – М: ГИТТЛ, 1955.
[3] Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика – М: «Высшая школа», 1990.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОПОРШНЕВЫХ ВИБРОУДАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

**Е.А. Линев, И.В. Никифорова**

*ННГУ им. Н.И. Лобачевского*

В работе изучается динамика многопоршневого виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний, практическая значимость которого заключается в решении проблем забивки различных конструкций, уплотнения грунта с различным коэффициентом прочности и т. д. [1, 2 . Рассматриваемый ударно-вибрационный механизм состоит из корпуса, с расположенным в нем эксцентриковым валом с маховиками на концах. На этом валу установлены эксцентриковые механизмы, каждый из которых состоит из двух эксцентриков $r_i$, вставленных друг в друга с возможностью изменения положения шайб, что позволяет регулировать величины эксцент итетов и сдвигов по фазам $\varphi_i$ между ними ($i$ = 1,2, ..., $N$). На свободных концах шатунов установлены шарнирно поршни - ударники (ПУ). Эксцентриковые механизмы вместе с шатунами и ПУ преобразуют вращательное с постоянной циклической частотой вращения маховика ω движение вала в возвратно – поступательное движение корпуса относительно стоек. ПУ расположены один внутри другого и ударяются каждый по наковальне [3, 4].

Уравнения движения механизма в безразмерных координатах и параметрах имеют вид

$$\begin{cases} x > f(\tau) \\ \dfrac{d^2x}{d\tau^2} = -p + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \gamma_i cos(\tau - \varphi_i) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = f(\tau) \\ \left.\dfrac{dx}{d\tau}\right|_+ = -R\left.\dfrac{dx}{d\tau}\right|_- + (1+R)\left(\dfrac{df(\tau)}{d\tau}\right), \end{cases} \tag{2}$$

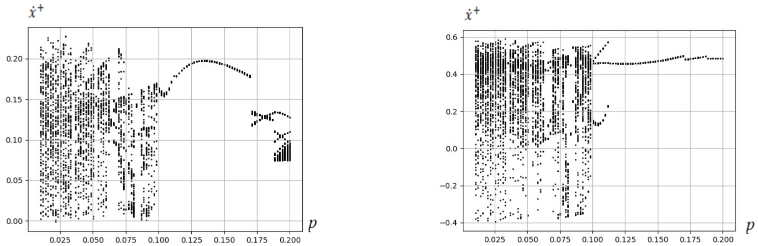
где $f_i(\tau) = \varepsilon_i - \mu_i \gamma_i cos(\tau - \varphi_i)$, $f(\tau) = \max\limits_{\tau}\{f_1(\tau), f_2(\tau), \dots, f_N(\tau)\}$,

$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_+ = \dot{x}^+, \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_- = \dot{x}^-$ – скорость непосредственно после и до удара соответственно,

$\tau = \omega t, x = \frac{y - s_2 - l}{l}, \lambda = \frac{m_i}{M + \sum_{i=1}^{n} m_i}, \mu = \frac{r_1}{l}, p = \frac{g}{l\omega^2}, \gamma_i = \frac{r_i}{r_1};\ \varepsilon_i = \frac{s_i - s_2}{l}, i = 1, \dots, N.$

Фазовое пространство системы $\Phi(x \geq f(\tau), \dot{x} < +\infty)$ в координатах $x, \dot{x}, \tau$ усечено по $x$. Поверхность $S(x = f(\tau))$ представляет собой «гофрированную» цилиндрическую поверхность, образованную пересечением $N$ поверхностей $x = f_i(\tau)$. Все фазовые траектории располагаются либо на поверхности $S$, либо выше ее. Случай $x > f(\tau)$ соответствует свободному движению механизма, а $x = f(\tau)$ – ударному взаимодействию одного из поршней с ограничителем.

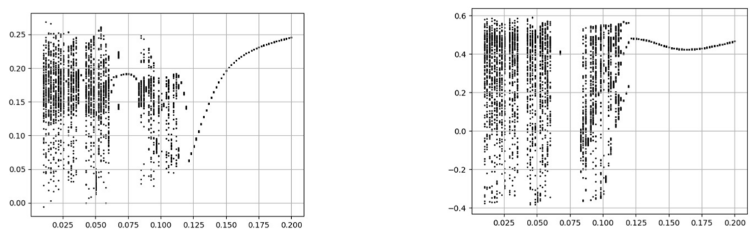
Полагая в уравнениях (1)-(2) $N$=2, $i$ =1,2, получим уравнения для двухпоршневого виброударного механизма. Исследование динамики проведено с помощью изучения свойств точечного отображения поверхности Пуанкаре $S(x = f(\tau))$ в себя [5]. На рис. 1а, 1б представлены бифуркационные диаграммы, на которых по оси абсцисс приведены значения частотного параметра $p$, а по оси ординат – значения послеударных скоростей $\dot{x}^+$ для набора параметров $\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}2;\ \lambda_2 = 0{,}3; \gamma = 4;$ $\varepsilon = 0{,}018; \varphi = 0{,}52.$ . 1а соответствуют диаграмме с ударами первым поршнем, . 1б – с ударами вторым поршнем об ограничитель.




а) б)

Рис. 1. Бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для значений параметров
$\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}2; \lambda_2 = 0{,}3; \gamma = 4; \varepsilon = 0{,}018; \varphi = 0{,}52.$

На рис. 2а, 2б приведены бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для того же набора параметров, что и на рис. 1, но при $\varphi = 1{,}5$.




а) б)

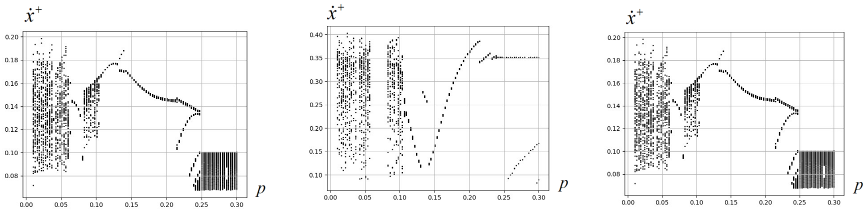
Рис. 2. Бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для значений параметров
$\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}2; \lambda_2 = 0{,}3; \gamma = 4; \varepsilon = 0{,}018; \varphi = 1{,}5.$

Сравнивая рис. 1а, 1б и рис. 2а, 2б можно увидеть, что увеличение параметра $\varphi$ (сдвиг по фазе между эксцентриситетами) приводит к увеличению области периодических режимов – периодический режим движения с поочередными ударами каждым поршнем об ограничитель на рис. 1 наблюдается при $0{,}12 \le p \le 0{,}17$, а на рис. 2 при $0{,}12 \le p \le 0{,}2$.

При $N$=3, $i$=1,2,3 получаем уравнения для трехпоршневого виброударного механизма, исследование динамики которого также проведено с помощью изучения свойств точечного отображения поверхности Пуанкаре $S\big(x = f(\tau)\big)$ в себя.

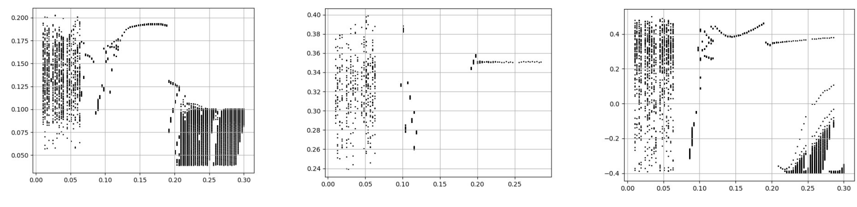
На рис. 3а, 3б, 3в представлены бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для следующего набора параметров $\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}1; \lambda_2 = 0{,}2;\ \lambda_3 = 0{,}3;\ \gamma_2 = 3; \gamma_3 = 4; \varepsilon_1 = 0{,}018;\ \varepsilon_2 = 0{,}02; \varphi_2 = 0{,}52; \varphi_3 = 1{,}1$. Рис. 3а соответствуют диаграмме с ударами первым поршнем, рис. 3б – с ударами вторым поршнем, а рис. 3в – с ударами третьим поршнем об ограничитель.

На рис. 4а, 4б, 4в приведены бифиркационные диаграммы для тех же значений параметров, что и на рис. 3, но $\varphi_2 = 0{,}8$ (сдвиг по фазе между первым и вторым эксцентриситетом).




а) б) в)

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для значений параметров
$$\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}1; \lambda_2 = 0{,}2; \lambda_3 = 0{,}3; \gamma_2 = 3; \gamma_3 = 4; \varepsilon_1 = 0{,}018;$$
$$\varepsilon_2 = 0{,}02; \varphi_2 = 0{,}52; \varphi_3 = 1{,}1.$$

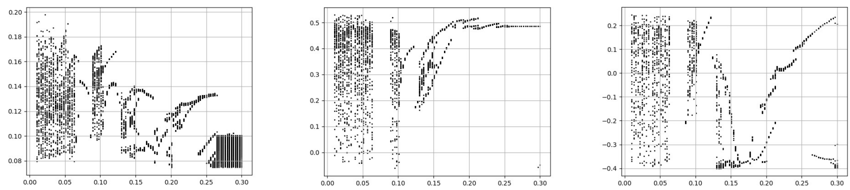


а) б) в)

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для значений параметров
$$\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}1; \lambda_2 = 0{,}2; \lambda_3 = 0{,}3; \gamma_2 = 3; \gamma_3 = 4; \varepsilon_1 = 0{,}018;$$
$$\varepsilon_2 = 0{,}02; \varphi_2 = 0{,}8; \varphi_3 = 1{,}1.$$

Сравнивая рис. 3 и рис. 4 можно заметить, что уменьшение сдвига по фазе между первым и вторым эксцентриситетами приводит к исчезновению в технологическом процессе движения механизма режима с ударом второго поршня об ограничитель (на рис. 4б $0{,}12 \le p \le 0{,}18$).

На рис. 5а, 5б, 5в приведены бифуркационные диаграммы с теми же значениями параметров, что и на рис. 3, но при $\gamma_2 = 4$. Из приведенных диаграмм видно, что при увеличении данного параметра режим с поочередным ударом каждым поршнем об ограничитель исчезает.



а) б) в)

Рис. 5. Бифуркационные диаграммы по частотному параметру $p$ для значений параметров

$$\mu = 0{,}1; R = 0{,}3; \lambda_1 = 0{,}1; \lambda_2 = 0{,}2; \lambda_3 = 0{,}3; \gamma_2 = 4; \gamma_3 = 4; \varepsilon_1 = 0{,}018;$$
$$\varepsilon_2 = 0{,}02; \varphi_2 = 0{,}52; \varphi_3 = 1{,}1.$$

В работе исследована динамика виброударных механизмов с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний. Представлены бифуркационные диаграммы, позволившие изучить влияние основных параметров механизма (место крепления шатунов к поршню-ударнику, длины эксцентриситетов, сдвиг по фазе между ПУ) на его режимы движения. Разработанные методики и результаты численных экспериментов могут быть с успехом использованы в системе управления движением виброударных механизмов при настройке их на основной режим движения (с поочередным ударом каждым поршнем за период).

[1] Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Физматгиз, 1971. 894 с.
[2] Блехман И.И., Джанелидзе Ю.Г. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964. 410 с.
[3] Nikiforova I.V., Igumnov L.A., Metrikin V.S. // Springer Nature Switzerland AG 2021 D. Balandin et al. (Eds.): MMST 2020. 2021. P. 63.
[4] Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V., Fevralskikh L.N. // Advanced Structured Materials. 2020. Vol. 137. P. 173.
[5] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 472 с.

# МОДЕЛЬ МЕТАМАТЕРИАЛА В ВИДЕ ЦЕПОЧКИ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ “МАССА-В-МАССЕ”

**В.В. Зайцев[1], И.С. Павлов[1, 2]**

*[1] ННГУ им. Н.И. Лобачевского*
*[2] Институт проблем машиностроения РАН*

Класс веществ со сложно организованной внутренней структурой (микроструктурой) и обладающих уникальными физико-механическими свойствами, которые зачастую даже не встречаются в природе, принято называть *метаматериалами* [1]. Как правило, метаматериал представляет собой сложную периодическую структуру, в узлах которой расположены не материальные точки, а тела малых, но конечных размеров, обладающие внутренними степенями свободы (фуллерены, молекулярные кластеры, нанотрубки, зерна, домены и т. п.).

Характерной особенностью класса метаматериалов является наличие в них «запрещенных зон» частот, т. е. таких частот, на которых волны в материале не могут распространяться. В частности, такими материалами являются *фононные кристаллы* – периодические структуры, в которых длина акустических волн соизмерима с периодом решетки [2]. Спектр частот такого кристалла обладает *запрещенной зоной*, и звуковая волна с частотой, попадающей в такую зону, не сможет проникнуть в фононный кристалл: она частично отразится, а частично затухнет на глубине в несколько длин волн. Таким образом, кристалл не только меняет закон распространения звука, но и полностью заглушает его в определенном диапазоне частот.

Если же в периодической структуре шаг чередования включений намного меньше длины звуковой волны, то такую среду называют *акустическим метаматериалом* [2]. В нем звуковая волна распространяется так, словно она не чувствует отдельные границы раздела, а вместо этого ощущает некую однородную «метасреду» с необычными упругими свойствами, которые можно настраивать.

Для исследования процессов распространения акустических волн в метаматериалах и изучения влияния микроструктуры метаматериала на его физико-механические свойства требуются математические модели, дающие возможность установить соответствие между макроконстантами среды (т. е. коэффициентами уравнений динамики среды) и параметрами ее микроструктуры (т. е. формой и размером частиц и параметрами взаимодействий между частицами). В настоящее время во многих работах такие исследования проводятся с помощью моделей цепочек круглых частиц “масса-в-массе” [3, 4]. Цель данной работы – построить аналогичную модель для случая сферических частиц.

Сначала рассмотрим цепочку больших сферических частиц (частиц 1-го сорта) массы $M$ и с диаметром $d_1$. В исходном состоянии их центры масс расположены на расстоянии $a$ друг от друга (рис. 1). Предполагается, что возможные смещения частиц малы по сравнению с периодом $a$ одномерной решетки. Каждая частица обладает шестью степенями свободы: центр масс частицы с номером $N=N(j)$ может смещаться вдоль осей $x$, $y$ и $z$ (трансляционные степени свободы $u_1^{(j)}$, $v_1^{(j)}$ и $w_1^{(j)}$), а сама частица может поворачиваться вокруг каждой из этих осей (ротационные степени свободы $\theta_1^{(j)}$, $\psi_1^{(j)}$ и $\varphi_1^{(j)}$) (рис. 2). В этом случае кинетическая энергия частицы $N(j)$ описывается следующей формулой:

$$T_1 = \frac{M}{2}(u_{1t}^2 + v_{1t}^2 + w_{1t}^2) + \frac{J}{2}(\varphi_{1t}^2 + \theta_{1t}^2 + \psi_{1t}^2), \qquad (1)$$

где $J_1 = \frac{2}{5}M\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{10}Md_1^2$ – момент инерции частицы относительно каждой оси, проходящей через ее центр масс.

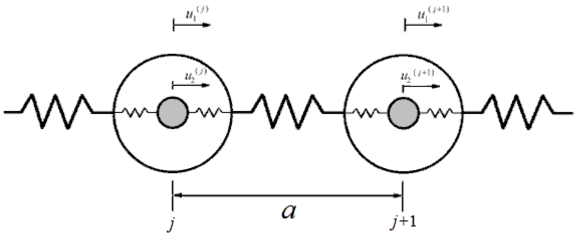



Рис. 1

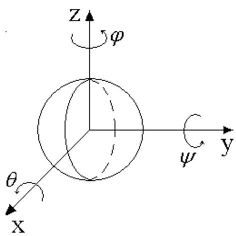



Рис. 2

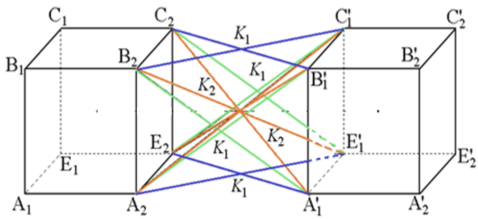



Рис. 3

Считается, что выделенная частица с номером $N$ взаимодействует лишь с ближайшими соседями по решетке, удаленными от нее на расстояние $a$. Будем считать, что взаимодействия соседних частиц моделируются упругими пружинами двух типов: горизонтальными с жесткостью $K_1$ (рис. 3, синие и зеленые пружины) и диагональными с жесткостью $K_2$ (рис. 3, коричневые пружины). Взаимодействие частиц при отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин. Для удобства дальнейших вычислений будем считать, что точки соединения этих пружин с частицами лежат в вершинах куба со стороной $b_1$, вписанного в шар диаметра $d_1$. Тогда потенциальная энергия $N$-й частицы имеет следующий вид:

$$U_N = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{16}\frac{K_1}{2}D_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{8}\frac{K_2}{2}D_{2n}^2\right), \qquad (2)$$

где $D_{1n}$ и $D_{2n}$ – удлинения пронумерованных в произвольном порядке пружин $K_1$ и $K_2$, соединяющих частицу с ее соседями. Эти удлинения определяются изменениями расстояний между точками соединения соответствующих пружин. Выразив удлинения пружин, соединяющих частицы $N$ и $N$+1, через смещения и углы поворотов частиц, можно получить формулу для потенциальной энергии $N$-й частицы первого сорта.

Далее будем считать, что внутри каждой из больших частиц находится малая частица (частица второго сорта) массы $m$ и с диаметром $d_2$, соединенная с большой частицей такой же системой пружин с жесткостями $K_3$ (аналог $K_1$) и $K_4$ (аналог $K_2$). В исходном состоянии центры масс малых частиц совпадают с центрами масс больших частиц и расположены на расстоянии $a$ друг от друга (рис. 4). Каждая малая частица, как и большая, также обладает шестью степенями свободы: трансляционными $u_2^{(j)}$, $v_2^{(j)}$, $w_2^{(j)}$ и ротационными $\theta_2^{(j)}$, $\psi_2^{(j)}$ и $\varphi_2^{(j)}$. По аналогичной процедуре можно получить выражения для кинетической энергии малой частицы и для потенциальной энергии взаимодействия между большой и малой частицами. Затем составим функцию Лагранжа для ячейки данной цепочки, состоящей из частиц двух сортов, и перейдем в континуальное приближение, разложив в ряд Тейлора смещения частиц и их повороты до производных второго порядка.

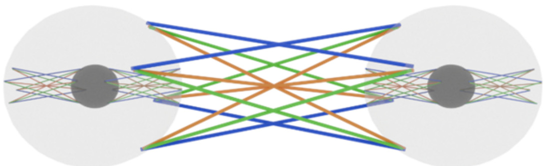


Рис. 4

Из полученной функции Лагранжа с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получим уравнения динамики рассматриваемой цепочки в длинноволновом приближении:

$$\begin{gathered}
u_{1tt} - c_1^2(4u_{1xx} - a^2 u_{1xxxx}) - c_3^2(u_2 - u_1) = 0, \\
u_{2tt} + 2c_4^2(u_2 - u_1) = 0, \\
v_{1tt} - c_2^2(4(v_{1xx} - \varphi_{1x}) - a^2 v_{1xxxx}) \\
\qquad + c_5^2(2(v_2 - v_1) - R(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0, \\
v_{2tt} + c_6^2(2(v_2 - v_1) + R(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0, \\
w_{1tt} - c_2^2\left(4\left(w_{1xx} + \psi_{1_x}\right) - a^2 w_{1xxxx}\right) \\
\qquad - c_5^2\left(2(w_2 - w_1) - R(\psi_1 + \psi_2)\right) = 0, \\
w_{2tt} - c_6^2\left(R(\psi_1 + \psi_2) - 2(w_2 - w_1)\right) = 0.
\end{gathered} \tag{3а}$$

$$\varphi_{1tt} - a^2\left(\beta_2^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\right)\varphi_{1xx} + 4\beta_1^2(\varphi_1 + v_{1x}) - \frac{1}{2}\beta_3^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \tag{3б}$$

$$+\beta_2^2\left(\frac{R}{2}(\varphi_1+\varphi_2)+(v_2-v_1)\right)+\frac{a^4}{4}(\beta_1^2+\beta_4^2)\varphi_{1xxxx}=0,,$$

$$\varphi_{2tt}+\frac{1}{2}\beta_5^2(\varphi_2-\varphi_1)+\beta_6^2\left(\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{1}{R}(v_2-v_1)\right)=0,$$

$$\psi_{1tt}-a^2\left(\beta_4^2-\frac{1}{2}\beta_1^2\right)\psi_{1xx}+4\beta_1^2(\psi_1-w_{1x})-\frac{1}{2}\beta_3^2(\psi_2-\psi_1)+$$

$$+\beta_2^2\left(\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)-\frac{1}{R}(w_2-w_1)\right)+\frac{a^4}{4}(\beta_1^2+\beta_4^2)\psi_{1xxxx}=0,$$

$$\psi_{2tt}+\left(\frac{1}{2}\beta_5^2(\psi_2-\psi_1)+\beta_6^2\left(\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)+\frac{1}{R}(w_2-w_1)\right)\right)=0,$$

$$\theta_{1tt}-\beta_7^2\left(\theta_{1xx}+\frac{a^2}{4}\theta_{1xxxx}\right)-\frac{1}{2}\beta_8^2(\theta_2-\theta_1)=0,$$

$$\theta_{2tt}+2\beta_9^2(\theta_2-\theta_1)=0.$$

В уравнениях (3а,б) введены обозначения:

$$c_1^2=\frac{a^2{r_1}^2}{M}\left(\frac{2K_1}{r_2^2}+\frac{K_2}{{r_3}^2}\right),\quad c_2^2=\frac{a^2{b_1}^2}{M}\left(\frac{K_1}{r_2^2}+\frac{K_2}{{r_3}^2}\right),$$

$$c_3^2=\frac{r_4^2}{M}\left(\frac{2K_3}{r_5^2}+\frac{K_4}{r_6^2}\right),\quad c_4^2=\frac{M}{m}c_3^2,\quad c_5^2=\frac{b_2^2}{M}\left(\frac{K_3}{r_5^2}+\frac{K_4}{r_6^2}\right),\quad c_6^2=\frac{M}{m}c_5^2. \tag{4}$$

$$\beta_1^2=\frac{a^2b_1^2}{J_1}\left(\frac{K_1}{r_2^2}+\frac{K_2}{{r_3}^2}\right),\quad \beta_2^2=\frac{b_1^2}{J_1}\left(\frac{K_1{r_1}^2}{{r_2}^2}\right),\quad \beta_3^2=\frac{b_2^2}{J_1}\frac{K_3r_4^2}{r_5^2},$$

$$\beta_4^2=\frac{R^2b_2^2}{J_1}\left(\frac{K_3}{r_5^2}+\frac{K_4}{{r_6}^2}\right),\quad \beta_5^2=\frac{b_2^2}{J_2}\frac{K_3{r_4}^2}{{r_5}^2},\quad \beta_6^2=\frac{J_1}{J_2}\beta_4^2, \tag{5}$$

$$\beta_7^2=\frac{2a^2b_1^2K_1}{J_1r_2^2},\quad \beta_8^2=\frac{b_2^4K_3}{J_1{r_5}^2},\quad \beta_9^2=\frac{J_1}{J_2}\beta_8^2.$$

Заметим, что в формуле (4) $c_1$ и $c_2$ – скорости продольных и поперечных волн.

Уравнения (3а,б) могут быть полезны для исследования дисперсионных свойств метаматериала, моделируемого цепочкой сферических частиц “масса-в-массе”, с целью нахождения запрещенных зон частот, размер которых зависит от значений параметров микроструктуры этого метаматериала.

[1] Гуляев Ю.В. и др. // Вестник РАН. 2008. Т. 78. №. 5. С. 438.
[2] Deymier P.A. (Ed.) Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals // Springer Series in Solid-State Sciences. 2013. Vol. 173.
[3] Guobiao H. et al. // AIP Advances. 2017. Vol. 7. 025211.
[4] Ерофеев В.И. и др. // Акустический журнал. 2022. Т. 68, №. 5. С. 475.

Секция «Математическое моделирование
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 28 мая 2024 г.
Председатель – И.С. Павлов, секретарь – О.Н. Минаева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.