

Труды XXVIII научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ»**

Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

ФОРМИРОВАНИЕ ХИМЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ В АНСАМБЛЕ ДВУХЧАСТОТНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. А. Акинин^{1,2)}, Д. С. Щапин^{1,2)}, В. И. Некоркин^{1,2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

Одной из актуальных задач [1-3] современной нелинейной физики является исследование механизмов и условий формирования в осцилляторных сетях состояний с когерентным и некогерентным (синхронным и несинхронным) поведением, так называемых химерных состояний [4]. На сегодняшний день химерные состояния обнаружены не только в различных теоретических работах, но и в экспериментальных системах различной природы, например, механических, оптических, химических, и радиотехнических. Подобные состояния зарегистрированы и в нейронной активности сетей мозга животных. Считалось, что химерные состояния возникают в сетях, имеющих сложную структуру связей, которая разрушает симметрию, вызванную идентичностью элементов сети. Это либо сети, в которых каждый осциллятор связан с некоторым числом (как правило большим) других осцилляторов, либо сети глобально связанных осцилляторов [5], либо модульные сети с кластерными связями, состоящими из двух и более слабосвязанных подсетей [6], либо сети, взаимодействие в которых происходит с запаздыванием или в присутствии шума [7]. Лишь сравнительно недавно химерные состояния были обнаружены в системах с локальной структурой связей [8]. Однако, сами связи в этих системах являются сложными, например, нелинейными или включают сразу несколько переменных. В нашей статье мы впервые приводим простую систему, демонстрирующую формирование различных амплитудно-фазовых и амплитудных [9] химерных состояний, элементы которой имеют между собой локальную линейную связь по одной переменной. В рассматриваемой системе химерные состояния формируются при наличии локальных связей с двумя соседями взаимодействующих по одной переменной (компоненте), при этом возможно формировать различные химерные состояния изменяя контрольный параметр системы.

Модель

Рассмотрим кольцевой ансамбль взаимодействующих бистабильных двухчастотных автоколебательных элементов, динамика которого описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} &= f(u_j) - v_j + d(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ \frac{dv_j}{dt} &= \varepsilon(u_j - l), \end{aligned} \quad (1)$$

$$j = 1..N, u_{N+1} \equiv u_1, f(u) = -u(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2).$$

Параметры $a = 0.32, b = 0.79, c = 1.166, \varepsilon = 0.001$, отвечающие за нелинейность и характерные временные масштабы далее для определенности будут зафиксированы, а параметры $d > 0, I > 0$, характеризующие соответственно силу связи и величину внешнего постоянного тока будут рассматриваться как контрольные. Отметим, что данный ансамбль ранее был реализован экспериментально в виде резистивно связанных аналоговых генераторов [10, 11]. Динамика такого ансамбля была исследована численно и в физическом эксперименте в случае значения параметра $I = 0$. В данной работе исследовано возможность формирования новых химерных состояний при изменении управляющего параметра I . Был проведен локальный анализ устойчивости состояний равновесия в одном элементе (в случае $d = 0$) и посчитана первая ляпуновская величина, позволяющая выявить устойчивость рождающихся в фазовом пространстве элемента циклов в результате бифуркации Андронова-Хопфа при изменении контрольного параметра I . Пример фазового портрета при $I = 0$ отвечающего существованию неустойчивого состояния в начале координат и «охватываемого» тремя предельными циклами «малым» устойчивым (синий цвет) неустойчивым (красный цвет) и «большим» устойчивым (синий цвет) представлен на рис. 1.

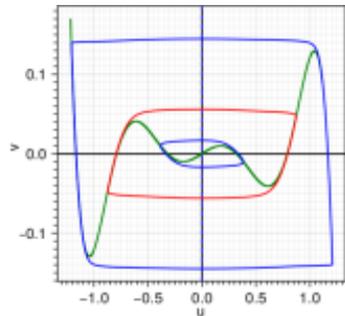


Рис. 1

Далее частоты и фазы колебаний элементов введем следующим образом. Для определенности рассмотрим j -ый автогенератор. Введем последовательность $\{t_j^n\}$ моментов времени, когда значение переменной u_j увеличивается и пересекает линию $u_j = I$, то есть $t_j^n = \{t: u_j(t) = I, v_j(t) > f(I)\}$, тогда фазу колебаний j -го элемента в момент времени t можно найти следующим образом $\varphi_j^n = 2\pi\omega_j^n(t - t_j^n), t \in [t_j^n, t_j^{n+1}]$, где $\omega_j^n = 1/(t_j^n - t_j^{n-1})$ будет определять мгновенную частоту колебаний, а $A_j^n = \{v_j(t): u_j(t) = I, v_j(t) > f(I)\}$. В общем случае при взаимодействии элементов мгновенные частоты не остаются постоянными, поэтому здесь и далее значения частот вычисляем усреднением по достаточно длинному (более 10^4 периодов) временному ряду $\langle\omega_j\rangle = \frac{1}{n}\sum\omega_j^n$, а значения амплитуд соответственно $\langle A_j\rangle = \frac{1}{n}\sum A_j^n$. Было исследовано изменение химерных состояний в кольцевом ансамбле из семи элементов. На рис. 2 представлена зависимость средних частот от контрольного параметра I при фиксированном значении параметра межэлементной связи $d = 0.01$.

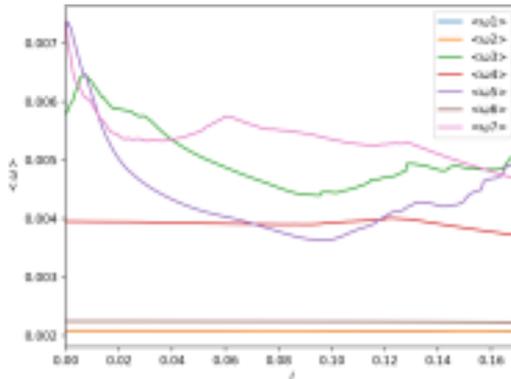


Рис. 2

При $I = 0$ существуют два синхронных элемента 1-й и 2-й с одинаковыми частотами, которые составляют когерентную (синхронную) часть, остальные элементы имеют различные частоты и соответственно представляют некогерентную (несинхронную) часть, см. рис. 3.

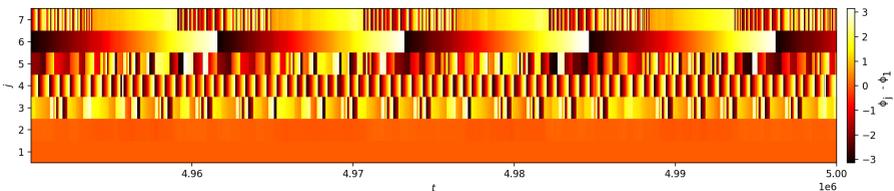


Рис. 3

Далее при увеличении параметра химерное состояние меняется, например, при $I = 0.07$ мы имеем два синхронных кластера из двух элементов, первый кластер состоит из 1-го и 2-го элементов с одинаковыми частотами, второй кластер состоит из 4-го и 5-го элементов, и оставшиеся три элемента формируют некогерентную часть. Таким образом, изменяя параметр I , можно управлять соотношением частот внутри некогерентной части, и получать различное число синхронных групп, составляющих когерентную часть. Отметим, что в системе существуют и другие химерные состояния, которые реализуются при других начальных условиях, говорит о мультистабильности химерных состояний в системе. Кроме того, получены химерные состояния в системе из $N = 100$ элементов для которых изменяя контрольный параметр можно управлять характеристиками когерентных и некогерентных групп элементов, это свидетельствует, что существование химерных состояний не связано с малыми размерами кольцевого ансамбля, а увеличение количества элементов приводит к увеличению числа наблюдаемых химерных состояний.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект № FFUF-2024-0011.

- [1] Nekorkin V.I., Voronin M.L., Velarde M.G. // *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*. 1999. Vol. 9. P. 533.
- [2] Kuramoto Y., in *Nonlinear Dynamics and Chaos: Where do we go from here?* ed. by Hogan J. et al. CRC Press, 2002.
- [3] Kuramoto Y., Battogtokh D. // *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocal-ly coupled phase oscillators*. arXiv preprint cond-mat/0210694. 2002.
- [4] Abrams D.M., Strogatz S.H. // *Physical review letters*. 2004. Vol. 93, No. 17. P. 174102.
- [5] Schmidt L. et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2014. Vol. 24, No. 1.
- [6] Abrams D.M. et al. // *Physical review letters*. 2008. Vol. 101. P. 084103.
- [7] Schöll E. // *The European Physical Journal Special Topics*. 2016. Vol. 225. P. 891.
- [8] Maistrenko Y. et al. // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95, No. 1. P. 010203.
- [9] Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. // *Physical review letters*. 2014. Vol. 112. P. 154101.
- [10] Щапин Д.С., Дмитричев А.С., Некоркин В.И. // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2017. Т. 106, №. 9. С. 591.
- [11] Дмитричев А.С., Щапин Д.С., Некоркин В.И. // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2018. Т. 108, №. 8. С. 574.

ДИСКРЕТНАЯ РЕКУРСИВНАЯ МОДЕЛЬ НЕЙРОНА

Д.И. Большаков, М.А. Мищенко, Д.В. Чиндарев, В.В. Матросов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Исследование импульсных нейронных сетей на сегодняшний день является весьма перспективным направлением науки. Применение такого типа сетей показало высокую эффективность в задачах обработки и классификации изображений [1], акустических сигналов [2], сигналов биологической активности [3-7], а так в различных задачах робототехники (навигации, управления, взаимодействия с окружающим миром и т. п.) [8-11]. Одной из основных проблем такого типа сетей является их высокая вычислительная и производственная сложность. Данная проблема возникает вследствие использования в составе импульсных нейронных сетей большого количества моделей нелинейных нейроподобных генераторов и элементов нелинейных синаптических связей. Способом решения данной проблемы может быть использование новых менее ресурсоемких моделей нейроподобных генераторов и моделей синаптических связей.

В данной работе предложена новая дискретная рекурсивная модель нейроподобного генератора. Предложенная модель построена на основе дискретного преобразования основных функциональных характеристик ранее исследованной модели нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром. Такая модель была выбрана в качестве базовой неслучайно, с одной стороны она обладает богатой колебательной динамикой [12, 13], с другой стороны имеет сравнительно простую аппаратную реализацию [14] вследствие высокой распространенности систем фазовой автоподстройки частоты в современной аналоговой и цифровой технике. Однако данная модель нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром имеет ряд недостатков: в случае численного счета она имеет высокую вычислительную сложность, так как в непрерывном времени она описывается системой из трех дифференциальных уравнений, в случае аппаратной реализации, тяжело (особенно в интегральном исполнении) создать достаточно большое количество идентичных по параметрам моделей в следствии разброса параметров элементной базы. Кроме того, вызывает сложности получение возбудимого режима, так как без изменения конструкции в данной модели такой режим реализуется только в области начальной частотной расстройки системы равной 0, т. е. только в одной точке [15].

Предложенная в данной работе новая дискретная рекурсивная модель нейроподобного генератора лишена выше описанных недостатков: с одной стороны она обладает такой же колебательной динамикой, как и базовая модель, а с другой стороны сравнительно невысокой вычислительной сложностью и способна быть реализованной при помощи элементов стандартной дискретной логики.

Для понимания механизмов дискретного преобразования, проведенного в рамках данной работы, рассмотрим структуру основных функциональных блоков базовой модели нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром. Структуру такой модели можно представить в виде двух основных функциональных блоков: фазового детектора и петли обратной связи.

В качестве фазового детектора в классической системе фазовой автоподстройки частоты используется элемент перемножения. В случае подачи на вход детектора двух

гармонических сигналов близких по частоте и в отсутствие обратной связи в системе, на выходе детектора наблюдаются биения близкие по форме к синусоидальным и с частотой, напрямую зависящей от разности частот входных сигналов.

В цифровых системах фазовой автоподстройки частоты в качестве входных сигналов применяются сигналы, близкие по форме к меандру, а в качестве фазового детектора логический элемент XOR. При этом, на выходе такого детектора образуется сигнал пилоотно-импульсной модуляции.

При фильтрации сигналов с выхода, описанных выше, фазовых детекторов получается сигнал, мгновенное значение амплитуды которого, имеет прямое соответствие значению мгновенной разности фаз входных сигналов. Причем, в случае цифровых систем фазовой автоподстройки частоты, фильтрованный сигнал с выхода детектора имеет симметричную пилообразную форму.

При создании новой модели нейрподобного генератора было принято решения: во-первых, отказаться от частотной составляющей входных сигналов и сохранить только их фазы, во-вторых, взять за основу характеристику фазового детектора цифровой системы, так как она имеет наиболее простую форму.

Для решения задачи получения необходимой формы сигнала было принято решение использовать базовый элемент стандартной логики – счетчик сумматор. Данный элемент работает следующим образом: при каждом новом такте счета он прибавляет выходному значению предыдущего такта счета (которое храниться в нем) новое значение, поступившее на вход суммы. Следует отметить, что такой элемент в базовом виде считает только в одном направлении от 0 и до переполнения, после чего сбрасывается в ноль и начинает считать заново. Такая характеристика не соответствовала исходной задаче, поэтому в данный элемент была добавлена инверсия по условию, в результате чего были достигнуты необходимая форма характеристики сигнала. Функциональная полученного фазового детектора представлена на рисунке 1, график характеристики представлен на рисунке 2.

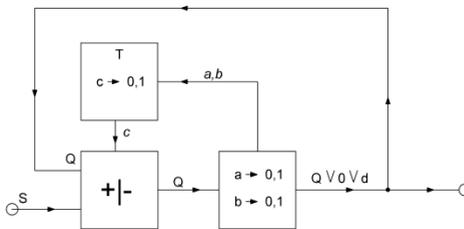


Рис. 1

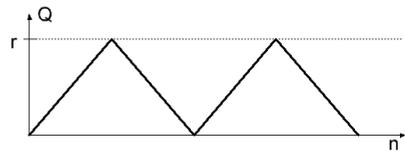


Рис. 2

Вторым основным элементом базовой модели нейрподобного генератора является петля обратной связи, в ее состав входят два элемента полосовой фильтр и генератор, управляемый напряжением. Так как выше уже было принято решение отказаться от частотной составляющей сигнала, то генератор, управляемый напряжением, можно исключить из системы. Полосовой же фильтр в базовой модели представлен в виде двух последовательно соединенных RC и CR фильтров. Такую структуру можно реализовать при помощи двух связанных цифровых рекурсивных фильтров первого

порядка. Следует отметить, в базовом виде такой тип фильтров имеет характеристику фильтра нижних частот и для получения необходимой передаточной характеристик необходимо сформировать структуру, представленную на рис 3.

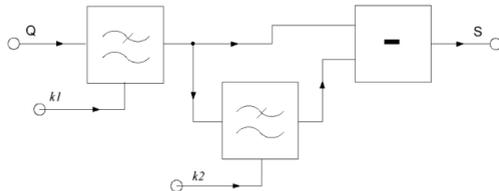


Рис. 3

На основе вышеописанных функциональных характеристик предлагаемой в данной работе новой дискретной рекурсивной модели нейрореподобного генератора можно записать следующую систему дискретных уравнений:

$$\begin{aligned}
 Q_n &= Q_{n-1} + c_{n-1}(S_{n-1} + i) - \overline{c_{n-1}}(S_{n-1} + i) \\
 S_n &= X_n - Y_n \\
 X_n &= 0.5(dQ_n + X_{n-1}) \\
 Y_n &= (X_n - Y_{n-1})k + Y_{n-1} \\
 c_n &= (c_{n-1} \vee a) \wedge b
 \end{aligned} \tag{1}$$

где Q_n – выход основного сумматора, S_n – выход петли обратной связи, выход системы, X_n – выход первого фильтра нижних частот, Y_n – выход второго фильтра нижних частот, c_n – условие направления счета (1 – считаем вперед, 0 – считаем назад), 0.5 – коэффициент затухания первого фильтра нижних частот, k – коэффициент затухания второго фильтра нижних частот, i – входное воздействие.

Первое и последнее уравнение системы (1) описывают характеристику фазового детектора. Для корректного расчета данной характеристики к данным уравнения необходимо добавить дополнительные условия (2), а на параметр Q_n ограничить в пределе от 0 до r (диапазон счета).

$$\begin{aligned}
 a &= \begin{cases} 0, & Q_n \leq 0 \\ 1, & Q_n > 0 \end{cases} \\
 b &= \begin{cases} 0, & Q_n \geq r \\ 1, & Q_n < r, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

где a и b дополнительные условия для выбора направления счета, r – параметр диапазона счета.

Второе, третье и четвертое уравнения системы (1) описывают характеристику рекурсивного полосового фильтра. В эту характеристику дополнительно было введено условие (3)

$$d = \begin{cases} 0, & Q_n < l \\ 1, & Q_n \geq l, \end{cases} \tag{3}$$

где d – условие замедления системы, l – предел замедления системы. Данное условие позволяет разбить систему на две ветки движения с линейным и экспоненциальным движением параметра Q . Введение условия замедления системы позволило на несколько порядков уменьшить размерность параметра входного воздействия i при получении сверхнизкочастотных колебаний.

Таким образом, в рамках данной работы была продемонстрирована новая дискретная рекурсивная модель нейроподобного генератора, показано на основе каких функциональных характеристик и допущений она была получена, а также данная модель была описана при помощи системы дискретных уравнений.

Работа выполнена при поддержке научной программы Национального физико-математического центра, секция № 9 «Искусственный интеллект и большие данные в технических, промышленных, природных и социальных системах».

- [1] Niu L.Y., Wei Y., Liu W.B., Long J.Y., Xue T.H. // *Applied Intelligence*. 2023. P. 1.
- [2] Wu J., Yilmaz E., Zhang M., Li H., Tan K.C. // *Frontiers in neuroscience*. 2020. Vol. 14. P. 199.
- [3] Wu X., Feng Y., Lou S., Zheng H., Hu B., Hong Z., Tan J. // *Neurocomputing*. 2023. Vol. 529. P. 222.
- [4] Ramesh M., Revoori S., Edla D. R., Kiran K.V.D. // *Soft Computing*. 2023. P. 1.
- [5] Feng Y., Geng S., Chu J., Fu Z., Hong, S. // *Biomedical Signal Processing and Control*. 2022. Vol. 77. P. 103749
- [6] Xing Y., Zhang L., Hou Z., Li X., Shi Y., Yuan Y., Zhang F., Liang S., Li Z., Yan L. // *Electronics*. 2022. Vol. 11, No. 12. P. 1889.
- [7] Sun A., Chen X., Xu M., Zhang X., Chen X. // *Frontiers in Neuroscience*. 2023. Vol. 17. P. 1174760.
- [8] Yamazaki K., Vo-Ho V.K., Bulsara D., Le N. // *Brain Sciences*. 2022. Vol. 12, No. 7. P. 863.
- [9] Juarez-Lora A., Ponce-Ponce V.H., Sossa H., Rubio-Espino E. // *Frontiers in Neurobotics*. 2022. Vol. 16. P. 904017.
- [10] Pham M.D., D'Angiulli A., Dehnavi M.M., Chhabra R. // *Brain Sciences*. 2023. Vol. 13, No. 9. P. 1316.
- [11] Azimirad V., Ramezanlou M.T., Sotubadi S.V., & Janabi-Sharifi F. // *Neurocomputing*. 2022. Vol. 490. P. 319.
- [12] Shalfeev V.D. // *Radiophys. Quantum Electron*. 1968. Vol. 11, No. 3. P. 221.
- [13] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, №. 4. С. 122.
- [14] Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В. // *Письма в журнал технической физики*. 2017. Т. 43, №. 13. С. 10.
- [15] Большаков Д.И., Мищенко М.А., Матросов В.В., Сысоев И.В. // *Письма в журнал технической физики*. 2022. Т. 48, №. 9. С. 23.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДИСКРЕТНОЙ РЕКУРСИВНОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОНА

Д.В. Чиндарев, Д.И. Большаков, М.А. Мищенко, В.В. Матросов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современной междисциплинарной науке одним из наиболее актуальных направлений является изучение принципов работы мозга. Помимо фундаментального характера исследований данное направление имеет выраженную практическую значимость в области разработки интеллектуальных устройств, воспроизводящих принципы обработки информации мозгом. Построение электронных моделей нейронов – быстро развивающаяся область физической электроники.

Целью данной работы является экспериментальное исследование динамики дискретной рекурсивной модели нейрона.

Описание модели

Динамика рассматриваемой модели описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1} + c_{n-1} \cdot (S_{n-1} + i) - \overline{c_{n-1}} \cdot (S_{n-1} + i), \\ S_n &= X_n - Y_n, \\ X_n &= 0.5 \cdot (d \cdot Q_n + X_{n-1}), \\ Y_n &= (X_n - Y_{n-1}) \cdot k + Y_{n-1}, \\ c_n &= (c_{n-1} \vee a) \wedge b \end{aligned} \tag{1}$$

Условия:

$$a = \begin{cases} 0, & Q_n \leq 0; \\ 1, & Q_n > 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} 0, & Q_n \geq r; \\ 1, & Q_n < r, \end{cases} \quad d = \begin{cases} 0, & Q_n < l; \\ 1, & Q_n \geq l \end{cases} \tag{2}$$

где Q_n – выход основного сумматора, S_n – выход фильтра верхних частот, X_n – выход первого фильтра нижних частот, Y_n – выход второго фильтра нижних частот, c_n – условие направления счета, a и b – дополнительные условия для выбора направления счета, d – условие замедления системы, r – диапазон счета, l – предел замедления системы, i – входное воздействие, 0.5 – коэффициент затухания первого фильтра нижних частот, k – коэффициент затухания второго фильтра нижних частот.

Исследование модели

Путем изменения параметров было выполнено разбиение пространства параметров модели (1) на области существования различных динамических режимов, представленное на рис. 1.

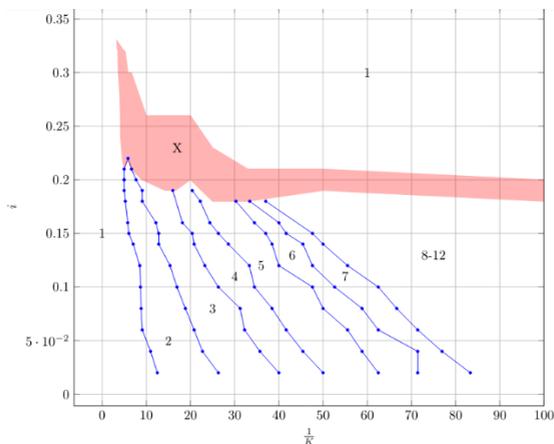


Рис. 1

Обозначение областей различных динамических режимов на рис. 1 отражает количество импульсов в пакте. Красная область соответствует хаотическому режиму.

На рис. 2 приведены изображения осциллограмм некоторых режимов.

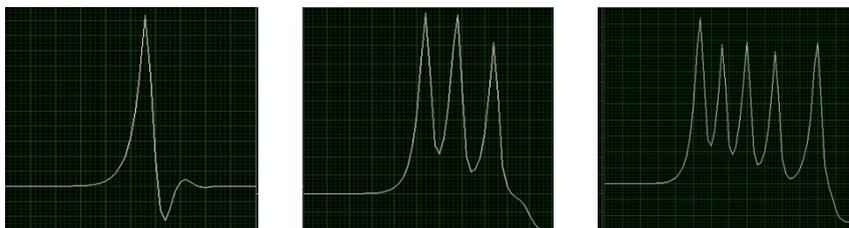


Рис. 2

Данные осциллограммы идентичны осциллограммам исходной математической модели, предложенной в работе [1]. Примеры осциллограмм исходной модели приведены на рис. 3.

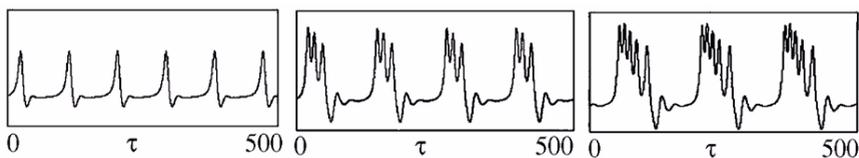


Рис. 3

Также в работе было исследовано влияние параметра r на систему. При достижении данного параметра система меняет свой рост с линейного на экспоненциальный.

Для разных значений параметра k фиксировался номер режима при изменении параметра r рис. 4.

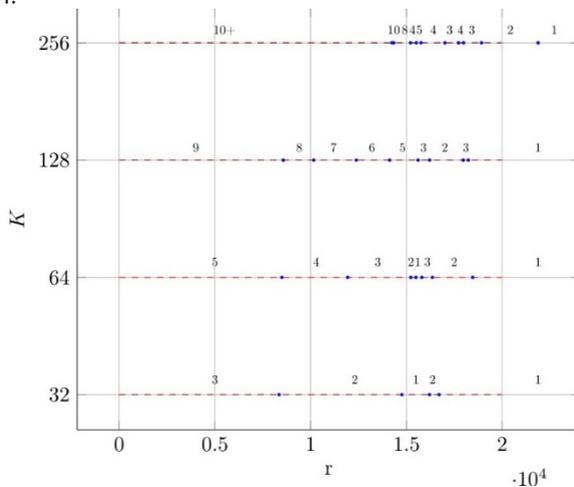


Рис. 4

Таким образом, введение данного параметра позволяет производить переключение между режимами. Однако в модели присутствует недостаток в виде перемежаемости. Данная проблема связана с негрубыми границами между режимами.

Работа выполнена при поддержке Научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», контракт № 075-02-2024-1439.

- [1] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20. №. 4. С. 122.

МОДЕЛЬ НЕЙРОНА ПЕРВОГО И ВТОРОГО КЛАССА ВОЗБУЖДЕНИЙ

В.П. Еремеев, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современном научном мире значительное внимание уделяется исследованию нейронных систем как в биологическом, так и в искусственном контексте. Особенно интерес представляет моделирование нейронной динамики, поскольку это позволяет не только глубже понять механизмы работы мозга, но и способствует разработке новых подходов в медицине и технологиях искусственного интеллекта. Существует много тематических моделей в виде обыкновенных дифференциальных моделей или точечных отображений, описывающих динамику единичного нейрона [1, 2]. Модели описывают поведение нейронов, находящихся в невозбужденном состоянии, и нейронов, генерирующих спайковую и (или) берстовую активность. В первом случае система находится в состоянии равновесия, во втором случае имеют место автоколебания. Переход из первого состояния во второе происходит, как правило, через две бифуркации: бифуркацию Андронова Хопфа (2 класс возбуждения), как, например, в система Фитцхью-Нагумо, так и бифуркацию инвариантной кривой седло-узла (1 класс возбуждения), как, например, в системе Морриса-Лекара.

В настоящей работе предлагается новая модель, которая в зависимости от параметров допускает возникновение автоколебаний – предельных циклов на фазовой плоскости через обе бифуркации.

Описание системы

Предлагаемая система имеет вид:

$$\begin{cases} \mu \dot{x} = -2e^{-x} + e^{-2x} + y \\ \dot{y} = -x + k \cdot y + b, \end{cases}$$

где μ , k , b – параметры.

В работе анализируется динамика системы с фокусом на установление различных динамических режимов и бифуркационные переходы между ними.

Моделирование начинается с анализа равновесных состояний системы. Далее, используя метод быстрых и медленных движений, мы анализируем, как медленные и быстрые переменные взаимодействуют, чтобы вызвать кратковременные и долгосрочные изменения в системе. Это позволяет выявить основные механизмы, способствующие возникновению автоколебаний, спайков и других динамических явлений.

Далее исследуется, как небольшие изменения в параметрах k и b могут вызывать значительные изменения в поведении системы, например, переход от устойчивых состояний к колебательным режимам через бифуркацию. Этот анализ помогает идентифицировать критические значения параметров, при которых система становится устойчивой или неустойчивой.

Бифуркационная диаграмма (b , k)

На представленной бифуркационной диаграмме изображены различные динамические режимы системы в зависимости от изменения двух параметров. Диаграмма

разделена на несколько зон, каждая из которых окрашена в свой цвет и имеет свои обозначения, указывающие на тип динамического поведения системы в этой зоне.

Желтая зона представляет область с одним устойчивым состоянием равновесия. Серая область указывает на отсутствие состояний равновесия в данном диапазоне параметров. В фиолетовой зоне присутствуют два состояния равновесия: одно является седловым, а другое – неустойчивым узлом. В розовой зоне находятся два состояния равновесия: одно – неустойчивый узел, другое – седло. Также возникает устойчивый предельный цикл. В голубой области есть одно неустойчивое состояние равновесия и возникает устойчивый предельный цикл. В красной зоне находятся три состояния равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел и седло, и образуется устойчивый предельный цикл. В зеленой зоне находятся три состояния равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел и седло.

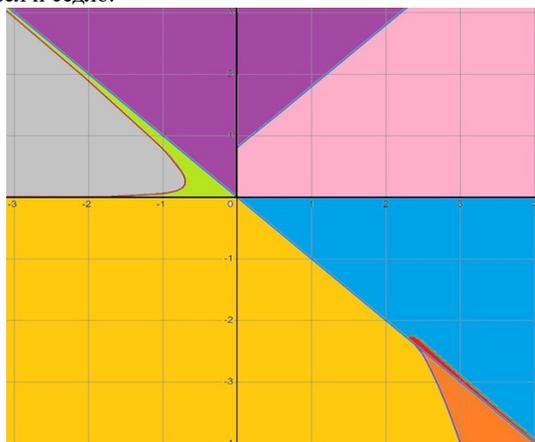


Рис. 1

Возникновение автоколебаний при бифуркации инвариантной кривой седлоузла (возбуждение 1 класса)

Бифуркация инвариантной кривой седлоузла, характеризующаяся слиянием и последующим аннигилированием устойчивой и неустойчивой точек равновесия, служит триггером для появления устойчивого предельного цикла, который в свою очередь порождает устойчивые автоколебания. Фазовый портрет был построен при значениях параметров: $b = 3$ и $k = -2.8914749$. На бифуркационной диаграмме это соответствует границе между красной и голубой областями.

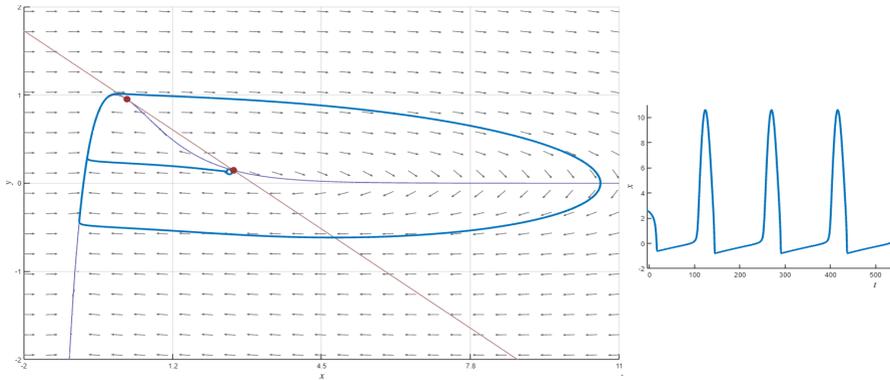


Рис. 2

Возникновение автоколебаний при бифуркации Андронова-Хопфа (2 класс возбудимости)

График иллюстрирует бифуркацию Андронова-Хопфа, происходящую при переходе параметра b через критическое значение 0. Вокруг бывшей устойчивой точки начинает формироваться предельный цикл, указывающий на возникновение устойчивых автоколебаний. Фазовый портрет был построен при значениях параметров: $b = 0.5$ и $k = 0$. На бифуркационной диаграмме это соответствует границе между голубой и розовой областями.

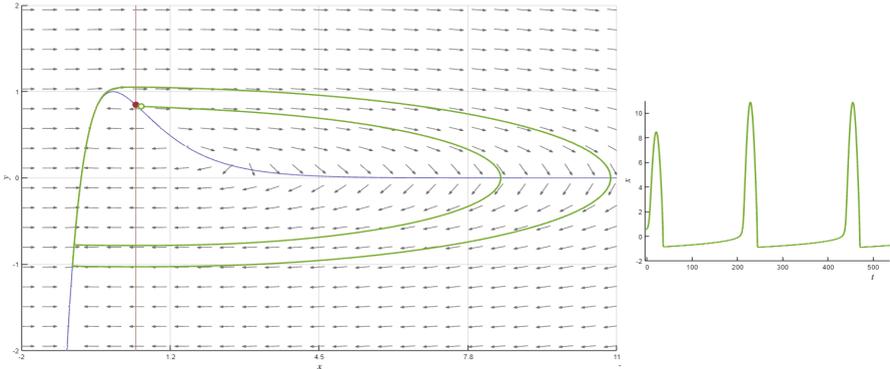


Рис. 3

Возникновение двойного предельного цикла

Важной особенностью этого состояния является появление двух предельных циклов: один устойчивый и один неустойчивый. Такая конфигурация представляет собой сложную динамическую структуру, где устойчивый цикл обеспечивает

возможность поддержания регулярного колебательного режима, в то время как неустойчивый цикл действует как пороговый элемент, чувствительный к внешним воздействиям и внутренним изменениям параметров. В случае, если система начинается в состоянии близком к неустойчивому предельному циклу и не получает достаточных возмущений для поддержания активности, колебания могут затухнуть, приводя систему к состоянию покоя или к минимальной активности. Фазовый портрет был построен при значениях параметров: $b = 5$ и $k = -4.943204$. На бифуркационной диаграмме это соответствует границе между красной и оранжевой областями.

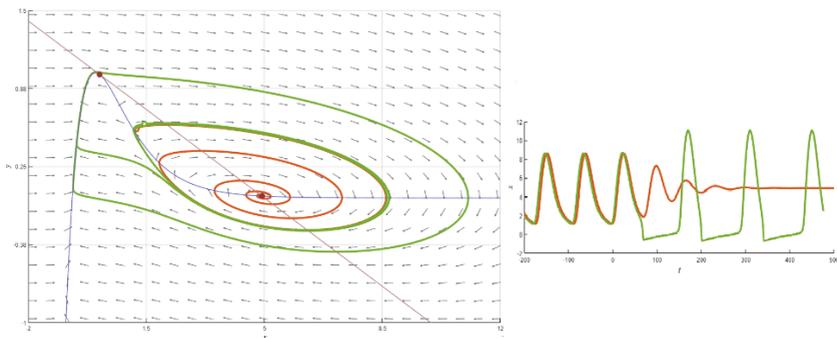


Рис. 4

Заключение

В работе:

- Предложена нейронная модель, в которой присутствуют 2 класса возбудимости, при которых возникают автоколебания, в зависимости от заданных параметров.
- Используя метод быстрых и медленных движений, мы проанализировали динамику нейронной модели и выяснили, что состояния равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от их положения относительно вершины графика экспоненты.
- Анализ системы также позволил выявить потенциальные точки бифуркаций, где изменения в параметрах модели могут вызвать качественные изменения в ее поведении.

- [1] Izhikevich. E.M. Dynamical system in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge: MIT, 2007. P. 15.
- [2] Некоркин В.И., Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Щапин Д.С. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, №. 4. С. 5.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЙРОНА ПОД СЛАБЫМ ШУМОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

О.А. Горюнов^{1,2)}, В.В. Клиньшов^{1,2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

Введение

В живых организмах нервные клетки образуют функционально связанные группы – нейронные сети. За счёт генерации биопотенциалов нейроны обмениваются друг с другом электрическими импульсами, из-за чего внутри сети возникает сложная динамика [1]. Целью работы является разработка слабошумового приближения для уравнения Фоккера-Планка, которое описывает динамику нейрона типа «накопление-сброс» под воздействием белого шума.

Автомодельное решение

Согласно модели мембрану нейрона можно представить в виде эквивалентной электрической схемы. К контуру с сопротивлением утечки R , ёмкостью мембраны C и источнику E_0 , параллельно подключается источник тока, который описывает воздействие от связанных нейронов. Когда мембранный потенциал V достигнет некоторого порогового значения V_{th} , нейрон генерирует спайк, длительность которого считается пренебрежимо малой.

В случае, когда нейрон имеет большое число связей внешнее воздействие часто можно аппроксимировать белым шумом. Тогда уравнение, описывающее изменение мембранного потенциала, примет вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{E_0 - V}{\tau} + \mu + \sigma\eta(t), \quad (1)$$

где $\tau = RC$ – мембранное время, μ и σ – параметры, характеризующие бело-шумовой процесс, $\eta(t)$ – стандартный белый шум.

Для (1) справедливо уравнение Фоккера-Планка [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{E_0 - V + \mu\tau}{\tau} \cdot \rho \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial V^2} [\sigma^2 \rho], \quad (2)$$

где $\rho(V, t)$ – функция плотности вероятности, удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$\rho(V_{th}, t) = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial V} \Big|_{V=V_{th}} = r, \quad (4)$$

где r – частота генерации потенциала действия на выходе нейрона.

Будем искать решение уравнения (2) в виде:

$$\rho(V, t) = R(V)e^{-rt}. \quad (5)$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$R'' + \frac{2}{\tau\sigma^2}(V - E_0 - \mu\tau)R' + \frac{2}{\tau\sigma^2}(1 + r\tau)R = 0. \quad (6)$$

В случае, когда величина шумовых флуктуаций $\Delta = \sigma\sqrt{\tau/2}$ гораздо меньше, чем расстояние $A = |E_0 + \mu\tau - V_{th}|$ между средним потенциалом (центром массы) и порогом возбуждения, приближённо профиль $R(V)$ может быть найден в виде:

$$R(V) = \frac{r\sqrt{\pi\tau}}{\sigma} \exp\left(-\frac{(V - E_0 - \mu\tau)^2}{\tau\sigma^2}\right) \cdot \left\{ \operatorname{erfi}\left(\frac{V_{th} - E_0 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erfi}\left(\frac{V - E_0 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right\}. \quad (7)$$

Частота генерации находится из условия нормировки:

$$r = \left[\pi\tau \cdot \operatorname{erfi}\left(\frac{V_{th} - E_0 - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \right]^{-1} \quad (8)$$

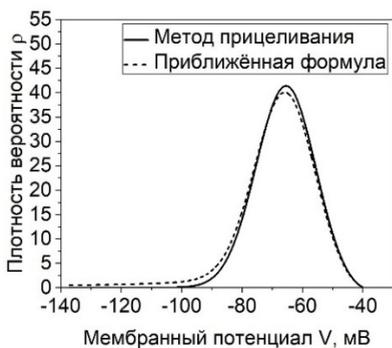


Рис. 1

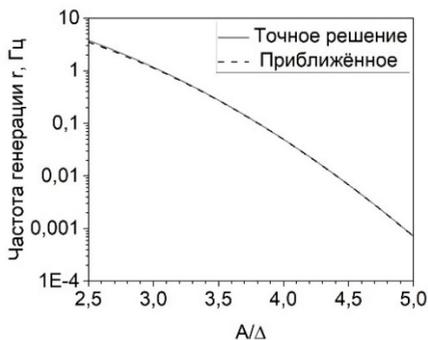


Рис. 2

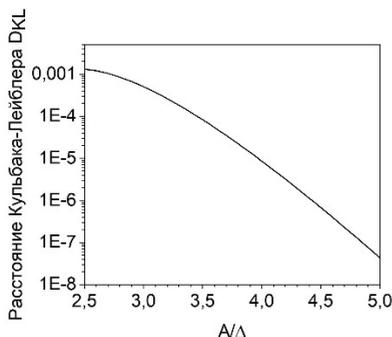


Рис. 3

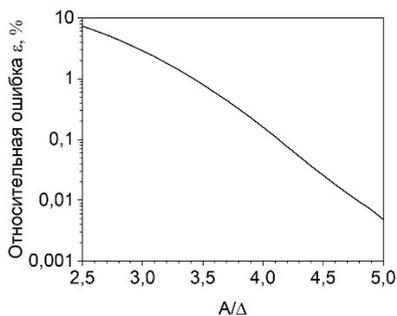


Рис. 4

На рис. 1 приведено сравнение профилей, вычисленных по формуле (6) и (7). На рис. 3 показано расстояние Кульбака-Лейблера между этими профилями в зависимости от отношения A/Δ . Оно падает ниже $5 \cdot 10^{-4}$ при $A/\Delta > 3$.

Наиболее важной характеристикой динамики нейрона является частота генерации r . Результаты сравнения слабошумового приближения с точным представлением на рис. 2 и рис. 4.

Несмотря на свою простоту, наше приближение даёт точные результаты. Так в случае стационарной стимуляции ошибка для частоты генерации составляет менее 3%, если $A/\Delta > 3$.

Нестационарная стимуляция

В биологических нейронных сетях внешнее воздействие на отдельный нейрон определяется электрической активностью сети и может изменяться со временем. В работе рассмотрен случай, когда со временем изменялся параметр $\mu = \mu(t)$. В случае быстрого изменения параметров внешнего воздействия проявляется инертность нейрона, и в этом случае изменение центра масс приближенно описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dm(t)}{dt} + \frac{m(t)}{\tau} = \frac{E_0}{\tau} + \mu(t). \quad (9)$$

Тогда приближённое значение частоты генерации можно искать по формуле:

$$r = \left[\pi \tau \cdot \operatorname{erfi} \left(\frac{V_{th} - m(t)}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \right]^{-1}. \quad (8)$$

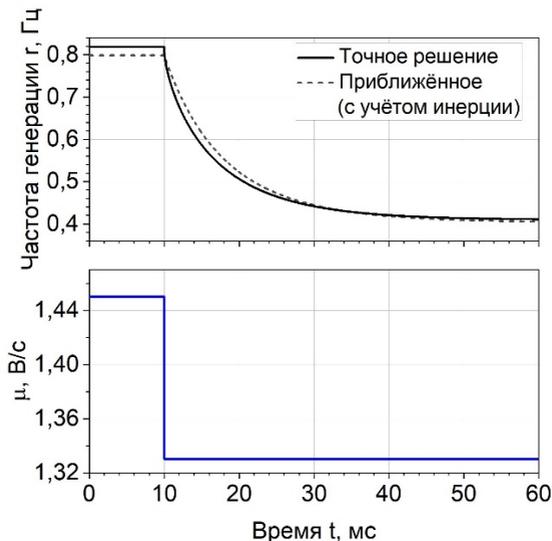


Рис. 5

Для оценки точности при нестационарном воздействии мы рассмотрели случай, когда $\mu(t)$ изменялось скачкообразно таким образом, чтобы стационарная частота генерации γ изменялась ровно в два раза. На рис. 6 приведена зависимость относительной динамической и статической ошибки от отношения A/Δ . Видно, что с увеличением отношения ошибка уменьшается, но не так быстро, как в стационарном случае. При этом ошибка для частоты генерации составляет менее 3% для нестационарной стимуляции, если $A/\Delta > 5$.

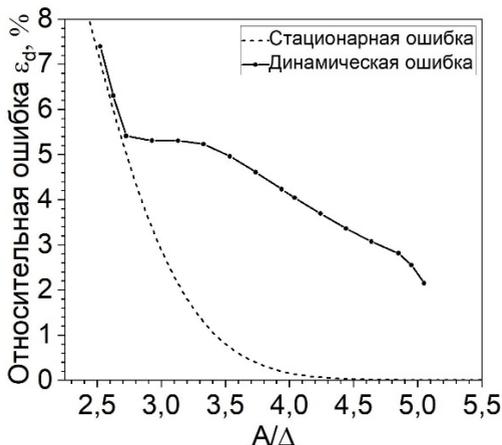


Рис. 6

Заключение

В работе рассмотрена динамика нейрона накопление-и-сброс под действием белого шума. В случае слабого шума получено приближенное аналитическое решение для соответствующего уравнения Фоккера-Планка, из которого можно определить частоту генерации нейроном потенциалов действия. Приближение является достаточно точным, когда средняя амплитуда шумо-индуцированных флуктуаций Δ много меньше расстояния до порога возбуждения A : ошибка определения частоты генерации не превышает 3% при $A/\Delta < 3$ для стационарного воздействия и $A/\Delta < 5$ для изменяющегося во времени воздействия.

- [1] Антонов В.Ф., Черныш А.М., Пасечник В.И., Вознесенский С.А., Козлова Е.К. Биофизика: Учеб. для студ. высш. учеб. заведений. – Б63 М.: Гуманит. изд. Центр ВЛАДОС, 2006. С. 77.
- [2] Гарднер К.В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. С. 160.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АСТРОЦИТА НА ПЕРЕМЕЖАЮЩУЮСЯ СИНХРОНИЗАЦИЮ НЕЙРОНОВ

Д.Д. Яблонский, С.Ю. Маковкин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В данной работе изучается нейрон-астроцитарный ансамбль, состоящий из двух пар нейронов и астроцитов (см. рис. 1). Динамика внутриклеточной концентрации Ca^{2+} в астроците описывается моделью Уллаха-Юнга [1], мембранный потенциал нейрона описывается моделью Ходжкина-Хаксли с модификацией Мэйнена [2, 3].

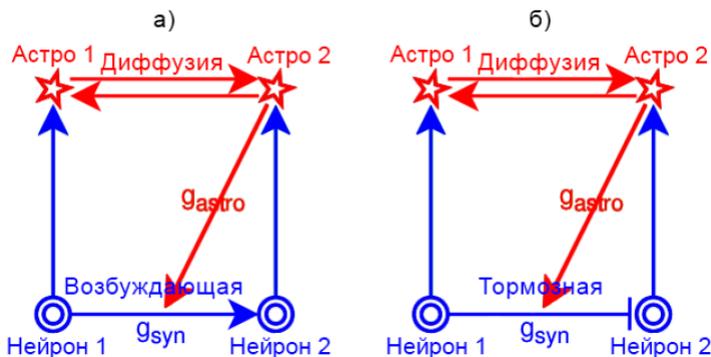


Рис. 1

Явление синхронизации играет важную роль в нейронной коммуникации, обработке информации и координации двигательной активности. В данном исследовании используются физиологически значимые модели Ходжкина-Хаксли и Уллаха-Юнга для исследования влияния астроцита на динамику пары синаптически связанных импульсных нейронов. В работе обнаружено, что импульсная активность в нейронах индуцирует медленную колебательную активность в астроцитах, что, в свою очередь, модулирует силу синаптической связи. Это приводит к новому режиму перемежаемой синхронизации между импульсными нейронами в масштабе времени медленных кальциевых колебаний.

Возбуждающая или тормозная однонаправленная нелинейная связь от пресинаптического (ведущего) нейрона к постсинаптическому (ведомому) нейрону реализуется с помощью синаптического тока. Этот ток отражает кинетику химического синапса.

Активность астроцита описывается с помощью следующих переменных: внутриклеточная концентрация Ca^{2+} , доля активированных рецепторов IP3 в эндоплазматическом ретикулуме и внутриклеточная концентрация инозит-1,4,5-трифосфата (IP3) [4]. Они задаются моделью астроцита Уллаха-Юнга.

Астроцитарная модуляция синаптической связи нейронов улучшает синхронизацию между колеблющимися нейронами. Влияние астроцитов на динамику пары связанных нейронов заключается в стимуляции синхронизации колебательной активности нейронов за счет управляемого астроцитами увеличения нейронной синаптической

силы связи [5, 6, 7]. **Изолированные два астроцита в системе.** Рассчитан регион синхронизации в области параметров $\Delta\nu_4$ и k . Что соответствует расстройке частот и силе связи между двумя астроцитами. Происходит расчет разницы фаз спайков астроцитов и значения корня из дисперсии разницы фаз. Отличное от нуля значение корня из дисперсии разницы фаз говорит о наличии биений в системе двух астроцитов (см. рис. 2).

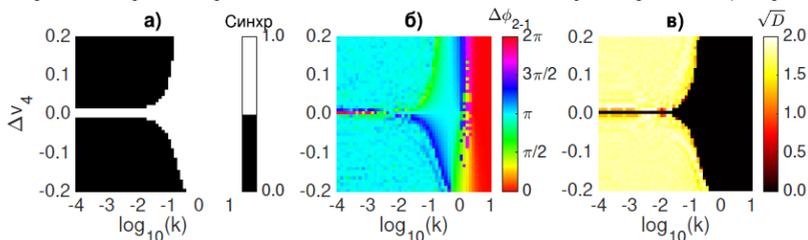


Рис. 2

Нейроны изолированы друг от друга, не связаны с астроцитами, астроциты не воздействуют на нейроны. Управляющий нейрон может воздействовать на управляемый либо возбуждающей, либо тормозной связью. Видно, что с увеличением частотной расстройке между нейронами требуется большая сила связи, на то, чтобы установить синхронизацию и при возбуждающей, и при тормозной связи. Также отметим, что область синхронизации не является симметричной (см. рис. 3). Главный нейрон с более высокой частотой колебаний через возбуждающую одностороннюю импульсную связь увеличивает частоту срабатывания подчиненного нейрона и, соответственно, наоборот – для тормозящей связи.

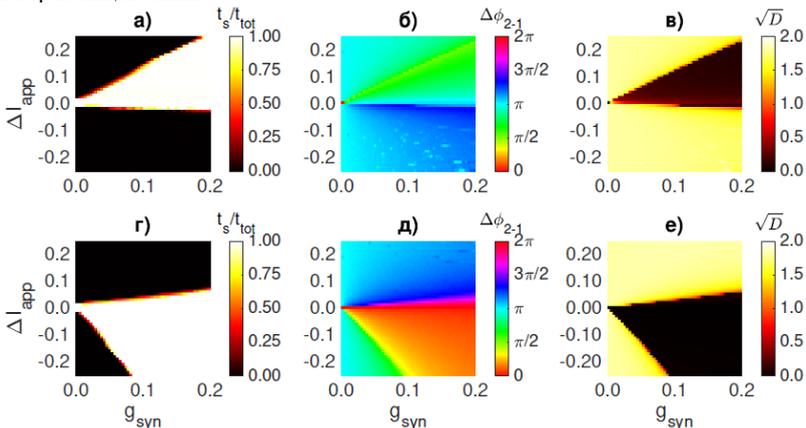


Рис. 3

Пример вызванной астроцитами синхронизации смотрите на рис. 4. Первоначально колебания нейронов вызывают колебания кальция в астроците. При достижении

порога внутриклеточной концентрации Ca^{2+} , астроцит усиливает синаптическую силу связи между нейронами, и они синхронизируются в противофазе на интервале времени, равном длительности импульсов кальция в астроците. В отсутствие астроцитарного воздействия система проявляет биения из-за расстройки частоты между связанными осцилляторами. Однако астроцит может ослаблять синаптическую силу связи между нейронами.

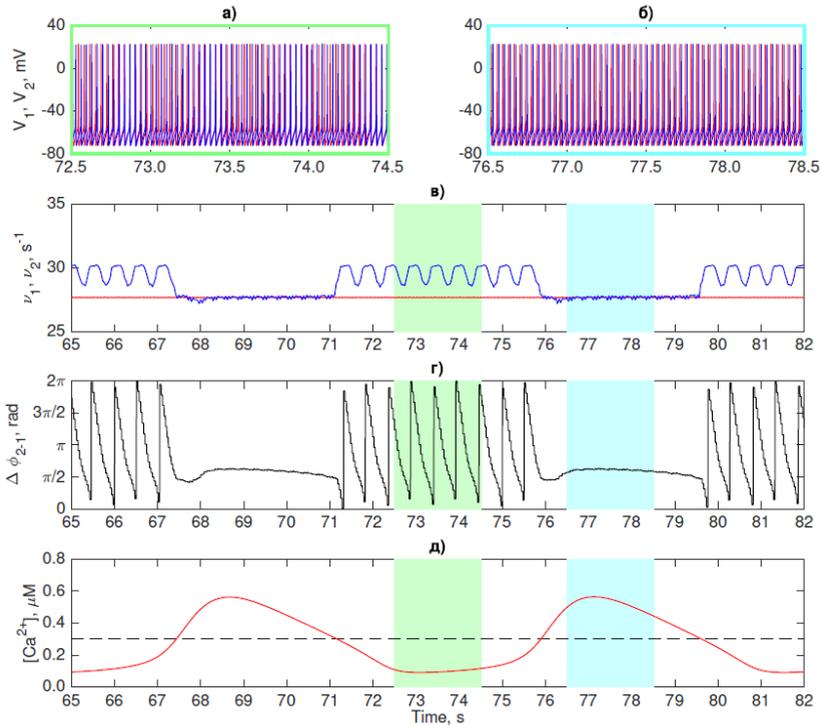


Рис. 4

Таким образом, усиливающий астроцит способен расширить регион синхронизации нейронов (см. рис. 5).

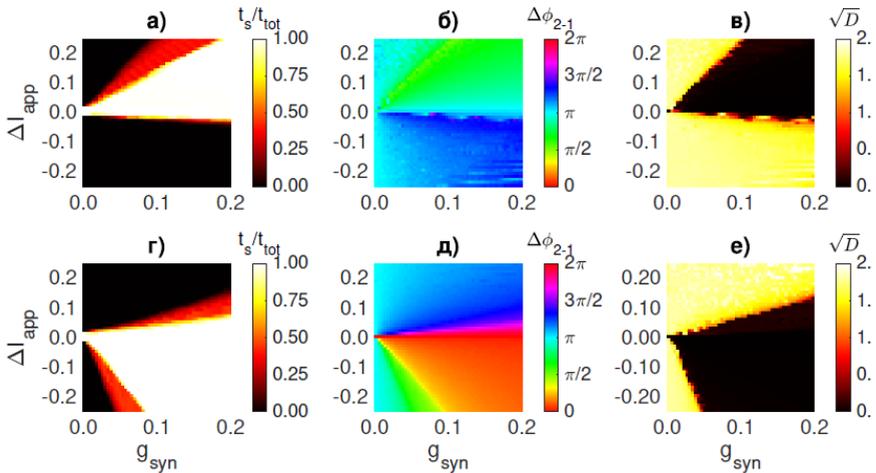


Рис. 5

- [1] Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A.H. // Cell Calcium. 2006. Vol. 39. P. 197.
 [2] Hodgkin A.L., Huxley A.F. // The Journal of physiology. 1952. Vol. 117, No. 4. P. 500.
 [3] Mainen Z.F., Joerges J., Huguenard J.R., Sejnowski T.J. // Neuron. 1995. Vol. 156, No. 6. P. 1427.
 [4] Matrosov V., Gordleeva S., Boldyreva N., Ben-Jacob E., Kazantsev V. // Computational Glioscience. 2018. Vol. 1. P. 151.
 [5] Kanakov O., Gordleeva S., Ermolaeva A., Jalan S., Zaikin A. // Physical Review E. 2019. Vol. 99, No. 1. P. 012418.
 [6] Gordleeva S.Y. Lebedev S.A., Rumyantseva M.A., Kazantsev V.B. // JETP Letters. 2018. Vol. 107, No. 7. P. 440.
 [7] Pankratova E.V., Kalyakulina A.I., Stasenko S.V., Gordleeva S.Y., Lazarevich I.A., Kazantsev V.B. // Nonlinear Dynamics. 2019. P. 1.

КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА И ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА В НЕЙРОННОЙ СЕТИ ИЗ ВОЗБУЖДАЮЩЕЙ И ПОДАВЛЯЮЩЕЙ ПОПУЛЯЦИЙ

С.Ю. Кириллов, А.А. Злобин, В.В. Клиньшов

ИПФ РАН

Нейронные сети, состоящие из двух взаимодействующих популяций — возбуждающей и подавляющей — являются одними из базовых фундаментальных структур в крупномасштабных сетях мозга [1-2]. Для исследования их коллективной динамики активно используется подход, основанный на редуцированных, среднеполевых моделях, называемых также моделями нейронных масс [3]. В настоящей работе рассматривается модель большой двухпопуляционной нейронной сети и соответствующей ей модели нейронной массы [4]. Исследуется возникновение различных режимов коллективной активности в этих двух моделях и проводится их сравнение.

В качестве базового элемента сети рассматривается квадратичный нейрон типа накопление-сброс

$$\dot{V}_j = V_j^2 + \eta_j + I_j(t), \quad (1)$$

где V_j — мембранный потенциал j -го нейрона, η_j — неоднородный ток смещения, I_j — совокупный ток, получаемый j -м нейроном от других нейронов сети. Для каждого нейрона из популяции $X = \{e, i\}$ (здесь и далее индексы e, i определяют принадлежность к возбуждающей или подавляющей популяции) этот ток определяется как

$$I_X = J_{eX}r_e + J_{iX}r_i, \quad (2)$$

где J_{YX} — сила синаптических связей, действующих со стороны популяции Y на популяцию X , а r_X — полный выходной сигнал популяции X , имеющий смысл средней частоты генерации спайков:

$$r_X = \frac{1}{N_X} \sum_{j \in X} \delta(t - t_j^k). \quad (3)$$

Здесь N_X — число нейронов в популяции X . Каждый j -й нейрон генерирует индивидуальные спайки в моменты времени t_j^k , которые определяются из дополнительного условия: когда мембранный потенциал нейрона V_j достигает некоторого, заданного наперед порогового значения V_p . После генерации спайка потенциал сбрасывается в значение V_r .

При большом числе нейронов в обеих популяциях (в термодинамическом пределе при $N_X \rightarrow \infty$) динамика каждой такой популяции может быть приближенно описана с помощью модели нейронных масс. Положим далее для определенности, что индивидуальные токи смещения η_j в каждой популяции X распределены по Лоренцу с центром ζ_X и полушириной Δ_X :

$$g(\eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta_X}{\Delta_X^2 + (\eta - \zeta_X)^2}. \quad (4)$$

К описанной модели сети может быть применена техника редукции, предложенная в работе Монтбрио–Пазо–Роксина [5]. Тогда коллективное поведение сети будет описываться следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{r}_e &= \frac{\Delta_e}{\pi} + 2r_e v_e, \\ \dot{v}_e &= v_e^2 + \zeta_e - \pi^2 r_e^2 + J_{ee} r_e + J_{ie} r_i, \\ \dot{r}_i &= \frac{\Delta_i}{\pi} + 2r_i v_i, \\ \dot{v}_i &= v_i^2 + \zeta_i - \pi^2 r_i^2 + J_{ei} r_e + J_{ii} r_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где переменными являются физически релевантные переменные: средние частоты популяций и их средние мембранные потенциалы.

Бифуркационный анализ редуцированной модели показывает, что при слабом межпопуляционном взаимодействии с течением времени система приходит в одно из двух равновесных состояний, которые характеризуются высоким или низким уровнем средней активности полной сети. При этом взаимная связь практически не влияет на асимптотическую (стационарную) динамику. Вместе с тем, такое взаимодействие влияет на переходные и резонансные процессы в системе. В частности, с его помощью возможно настроить избирательную реакцию сети на действие внешних импульсов тока определенной амплитуды и длительности. Интересно отметить, что, в то время как макроскопическая, коллективная активность сети после воздействия сравнительно быстро выходит на стационарный уровень, анализ микроскопической динамики отдельных элементов показывает также наличие более долгих переходных процессов.

Коллективная динамика двухмодульной сети начинает постепенно усложняться при увеличении межмодульной связи, и в такой системе возникают самоподдерживающиеся коллективные колебания. Механизм возникновения этих колебаний связан с усилением петли обратной связи, возникающей со стороны возбуждающего модуля через подавляющий. В результате этого происходит дестабилизация состояния, соответствующего высокому уровню активности сети. Бифуркационный анализ редуцированной модели позволяет с высокой точностью предсказывать возникновение и исчезновение таких коллективных колебаний. Вместе с тем микроскопический анализ позволяет выявить существование в сети кластеров элементов, совершающих регулярные колебания на единых частотах, в то время как собственные колебания прочих элементов являются нерегулярными, а их частоты несоизмеримыми.

Действие межмодульных связей может также влиять на количество равновесных состояний в системе и форму областей их существования. Описан сценарий возникновения режима тристабильности, когда помимо состояния с низким и высоким уровнем активности формируется еще третье – среднее состояние. Режим тристабильности, предсказанный редуцированной моделью, наблюдается и в микроскопической системе. Вместе с тем наблюдаются различия между соответствующими бифуркационными границами динамических режимов. Эти различия связаны с эффектами конечного размера. Они уменьшаются по мере увеличения размера сети, однако остаются заметными даже для сетей довольно большого размера порядка 100000 элементов.

Помимо равновесных и периодических колебательных режимов, в двухмодульной сети могут возникать и более сложные хаотические коллективные колебания. Макроскопическая редуцированная система в среднем довольно хорошо воспроизводит поведение микроскопической сети. Вместе с тем траектории, соответствующие коллективным микроскопическим колебаниям, содержат явно видимые флуктуации. Существование таких флуктуаций связано с эффектами конечного размера. С увеличением количества элементов их интенсивность уменьшается обратно пропорционально размеру сети, и траектории редуцированной и микроскопической систем асимптотически сближаются.

Работа выполнена при поддержке Министерством высшего образования и науки РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН, проект FFUF-2024-0011.

- [1] Brunel N. // *J. Comput. Neurosci.* 2000. Vol. 8, No. 3. P. 183.
- [2] Kirillov S.Y., Klinshov V.V., Nekorkin V.I. // *Chaos.* 2020. Vol. 30. P. 051101.
- [3] Schmidt H., Avitabile D., Montbrió E., Roxin A. // *PLoS Comput. Biol.* 2018. Vol. 14, No. 9. P. e1006430.
- [4] Кириллов С.Ю., Злобин А.А., Клиньшов В.В. // *Известия вузов. ПНД.* 2023. Т. 31, №. 6. С. 757.
- [5] Montbrió E., Pazó D., Roxin A. // *Phys. Rev. X.* 2015. Vol. 5, No. 2. P. 021028.

СИНФАЗНАЯ И ПРОТИВОФАЗНАЯ СПАЙКОВАЯ И БЕРСТОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЕ СВЯЗАННЫХ ФИ-НЕЙРОНОВ

Д.Е. Колесников, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Синхронизация играет ключевую роль в работе мозга [1–3]. В частности, синхронизация нейронов лежит в основе формирования популяционных ритмов мозга [4, 5]. Также синхронная активность нейронов мозга может приводить к патологическим процессам. В связи с этим исследование этого процесса является важным в нейронауках. Эффективным способом изучения синхронизации является применение методов нелинейной динамики и математического моделирования.

Согласно последним результатам, исследование синхронизации можно свести к анализу систем относительно простых фазовых уравнений [6]. Такие системы с одной стороны обеспечивают воспроизведение различных сложных паттернов активности, а с другой стороны, они могут быть частично исследованы аналитически.

Цель данной работы – исследовать динамику системы, моделирующую нейронные ансамбли, элементы которых описываются моделью фи-нейрона [6]. При этом связь между элементами глобальная с фазовой задержкой. Как показали наши исследования, такая модель может воспроизводить различные синфазные и противофазные спайковые и берстовые синхронные режимы. Для данной системы были получены и исследованы различные области параметров, при которых система демонстрирует те или иные динамические состояния.

Ансамбль связанных нейронов

Пусть каждый нейрон в ансамбле представлен фазовой переменной φ_i , и взаимодействует с другими в соответствии со следующей формулой:

$$\dot{\varphi}_i = \gamma_i - \sin\left(\frac{\varphi_i}{n_i}\right) + \sum_{j=1}^N d_{ij} \cdot \sin(\varphi_j - \varphi_i - \alpha), \quad i = \overline{1, N} \quad (1)$$

где n_i, γ_i – параметры, определяющие временные масштабы спайковой и берстовой активности i -го элемента; $d_{ij} = d$ – параметр связи, описывающий взаимодействие между двумя элементами (i, j) ; α – фазовая задержка в связи, параметр меняется от 0 до π .

Определим условия существования синхронного поведения нейронов, в ансамбле из двух и трёх элементов. Исследуем динамику ансамбля неодинаковых элементов с одинаковыми $n_i = n_j$ при $i \neq j$, но разными $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$.

Параметр α определяет тип взаимодействия между элементами. В области значений $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ взаимодействие является притягивающим, при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – отталкивающим.

Режимы синхронизации в ансамбле

Приведём критерии попарной синхронизации элементов (i, j) ансамбля.

Критерии существования частотной и фазовой спайковой синхронизации элементов:

- Частотная спайковая синхронизация элементов (i, j) : $\Omega_i^s = \Omega_j^s$
- Фазовая спайковая синхронизация элементов (i, j) : $|\varphi_j - \varphi_i| = const$

Критерии существования частотной и фазовой бёрстовой синхронизации:

- Частотная бёрстовая синхронизация элементов (i, j) : $\Omega_i^b = \Omega_j^b$
- Фазовая бёрстовая синхронизация элементов (i, j) : $|\varphi_j^k - \varphi_i^k| = const$ (сдвиг между фазами k -х спайков в пачке константен)

Критерии существования синфазной и противофазной синхронизации:

- Синфазная синхронизация элементов (i, j) : $|\varphi_j - \varphi_i| \ll 1$
- Противофазная синхронизация элементов (i, j) : $|\varphi_j - \varphi_i - \pi| \ll 1$

Глобальная синхронизация (для $N=3$) будет существовать если условия попарной синхронизации выполняются для всех таких пар элементов (i, j) .

Диаграммы динамических режимов

На рис 1 и 3 ($N=2$), 5 и 7 ($N=3$) приведены диаграммы фазовой синхронизации. На рис. 2 и 4 ($N=2$), 6 и 8 ($N=3$) приведены диаграммы частотной синхронизации для пары значений параметра Δ .

На диаграммах видно, что с увеличением параметра связи d в системе осуществляется переход:

- 1) От асинхронных режимов к синхронным, как при попарной синхронизации элементов, так и при глобальной. Сначала наступает бёрстовая синхронизация, а затем спайковая.
- 2) От попарной синхронизации элементов, к глобальной синхронизации ансамбля (при $N=3$).
- 3) От режимов $n:m$, к противофазным или синфазным режимам $1:1$ ($n:m:k$ и $1:1:1$ при $N=3$).
- 4) От осцилляторной смерти (1,2), к вымиранию всех элементов ансамбля (при $N=3$).

Расшифровка обозначений на диаграммах фазовой синхронизации:

D (death) – осцилляторная смерть, Q-P (quasi-periodic) – квазипериодический режим, SS $n:m$ (spike sync) – спайковая синхронизация $n:m$, BS $n:m$ (burst sync) – бёрстовая синхронизация $n:m$, SS 1-2 (spike sync) – спайковая синхронизация 1-го и 2-го элемента, BS 2-3 (burst sync) – бёрстовая синхронизация 2-го и 3-го элемента, GBS (global burst sync) – глобальная бёрстовая синхронизация, GSS (global spike sync) – глобальная спайковая синхронизация, SP (sync-phase) – синфазная синхронизация, AP (anti-phase) – противофазная синхронизация.

Ансамбль из двух элементов ($N=2$)

Частотная расстройка Δ между элементами меняется от 0 до Δ_{max} . Параметры $\gamma_1 = 1.01$, $\gamma_2 = \gamma_1 + \Delta$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$.

Рассмотрим систему (1) с притягивающим и отталкивающим взаимодействием:

- 1) $\alpha = \frac{\pi}{8}$: до осцилляторной смерти обоих элементов существует сравнительно большая область бёрстовой синхронизации 1:1. С увеличением параметра связи d элементы начнут осциллировать и установится спайковый синфазный режим 1:1.

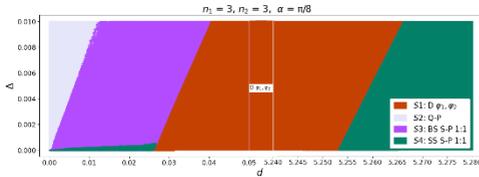


Рис. 1

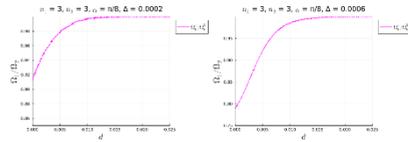


Рис. 2

- 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$: существует большая область бёрстовой синхронизации 1:2. Размер областей синхронизации 1:m (где $m > 2$) очень мал. С увеличением параметра связи d установится бёрстовый противофазный режим 1:1. При $\Delta \approx 0.01$ существенную часть диаграммы занимает область осцилляторной смерти ансамбля.

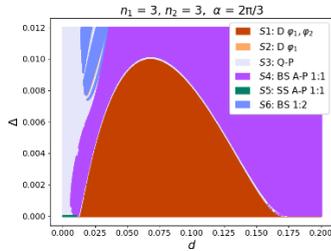


Рис. 3

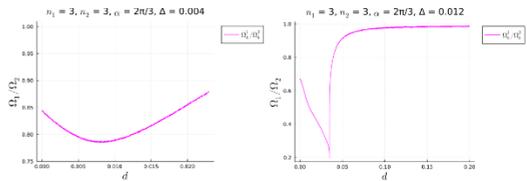


Рис. 4

Ансамбль из трех элементов ($N=3$)

Частотная расстройка Δ между элементами меняется от 0 до Δ_{max} . Параметры $\gamma_1 = 1.01, \gamma_2 = \gamma_1 + \Delta, \gamma_3 = \gamma_1 + 2\Delta, n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3$.

Рассмотрим систему (1) с притягивающим и отталкивающим взаимодействием:

- 1) $\alpha = \frac{\pi}{8}$: до осцилляторной смерти ансамбля существует множество областей попарной синхронизации элементов $n:m$. С увеличением параметра связи d элементы начнут возвращаться и установится глобальный спайковый синфазный режим.

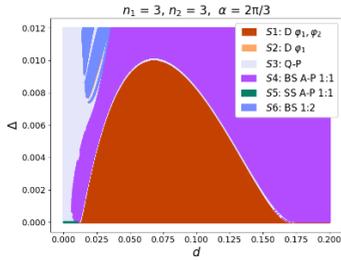


Рис. 5

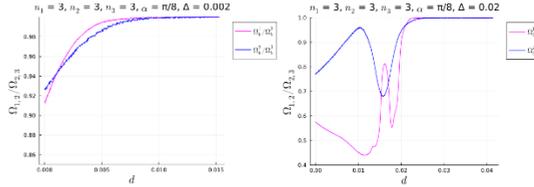


Рис. 6

- 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$: при малых значениях d существуют большие области вымирания пары элементов (1,2), и вымирания всего ансамбля (1,2,3). При увеличении связи появляются режимы бёрстовой попарной синхронизации $n:m$, затем в ансамбле устанавливается глобальный бёрстовый противофазный режим.

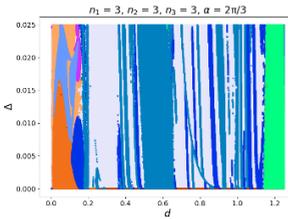


Рис. 7

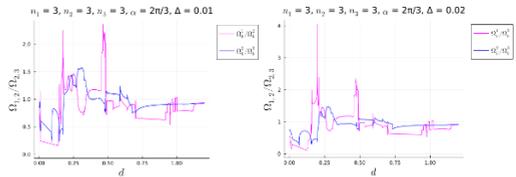


Рис. 8

В ансамблях из двух и трех фи-нейронов исследованы синхронные режимы и определены границы их существования: бёрстовая синфазная и противофазная синхронизация, спайковая синфазная и противофазная синхронизации.

Работа поддержана Минобрнауки РФ, Соглашение FSWR-2020-0036 и грантом РФФ 23-12-00180

[1] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. // Synchronization: A Universal Concept in Non-linear Sciences. 2003. P. 433.
 [2] Izhikevich. E.M. Dynamical system in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge: MIT, 2007, 519 p.
 [3] Kuramoto Y. // Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence, Springer-Verlag. 1984. P. 176.
 [4] Llin'as R.R. // I of the Vortex: From Neurons to Self. 2002. P. 302.
 [5] Buzsaki G. // Rhythms of the Brain. 2006. P. 448.
 [6] Колесников Д.Е., Осипов Г.В. // Труды XXVII научной конференции по радиофизике. 2023. С. 186.

ДИНАМИКА РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ АКТИВАЦИИ

Р.А. Кононов¹⁾, О.В. Масленников^{1, 2)}

¹⁾ ИПФ РАН

²⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Одно из направлений вычислительной нейробиологии – построение функциональных моделей нейронных сетей, решающих сенсорно-моторные и когнитивные задачи. Для настройки весовых коэффициентов в таких моделях применяют методы машинного обучения. Если в структуре сетей есть соединения с петлями обратной связи, то такие сети являются рекуррентными. Обученные рекуррентные сети представляют собой динамические системы, которые можно анализировать методами теории колебаний и находить динамические механизмы решения ими целевых задач [1, 2]. В данной работе исследован ансамбль рекуррентных нейронных сетей с кусочно-линейной функцией активации, обученных задаче контекстно-зависимого двухальтернативного выбора.

Полносвязная рекуррентная сеть

В качестве модели функциональной нейросети взята полносвязная рекуррентная сеть с кусочно-линейной функцией активации ReLU, которая интерпретируется как средняя частота спайковой активности нейрона:

$$\text{ReLU}(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Активность сети описывается отображением в векторной форме

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{x}_t U^T + \mathbf{h}_t W^T), \quad (1)$$

где \mathbf{x}_t – это входные стимулы, подаваемые на сеть в момент времени t , а \mathbf{h}_t – активность нейронов в данный момент времени (скрытое состояние сети).

U – входные веса нейронной сети,

W – рекуррентные веса нейронной сети.

Выход сети вычисляется как

$$\text{out}_t = \mathbf{h}_t O^T,$$

где O – выходные веса нейронной сети. Векторные и матричные величины имеют размерности

$$\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^S, \mathbf{h}_t \in \mathbb{R}^N, \text{out}_t \in \mathbb{R}^C,$$

$$U \in \mathbb{R}^{N \times I}, O \in \mathbb{R}^{C \times N}, W \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

где S, C, N – размерности входа, выхода и скрытого состояния сети соответственно.

Когнитивная задача двухальтернативного выбора с контекстом

Прототипный нейробиологический эксперимент целевой задачи в настоящей работе состоит в следующем. Испытуемой обезьяне демонстрируют экран с движущимися точками разных цветов, два сигнала контекста и сигнал фиксации в форме отдельных сенсорных стимулов. Начало испытания сообщается возникающим сигналом фиксации, далее загорается сигнал одного из контекстов, показывающий, на что нужно обращать внимание в текущем испытании: на цвет или на направление движения точек. От агента требуется определить доминирующее направление или цвет и запомнить своё решение. Ответ от агента из трех предложенных вариантов – слева, в центре, справа – ожидается через некоторую задержку с помощью движения глаз. Движения влево и вправо соответствовали двум вариантам ответа, за каждой стороной были закреплены определённый цвет и соответствующее направление движения точек [3].

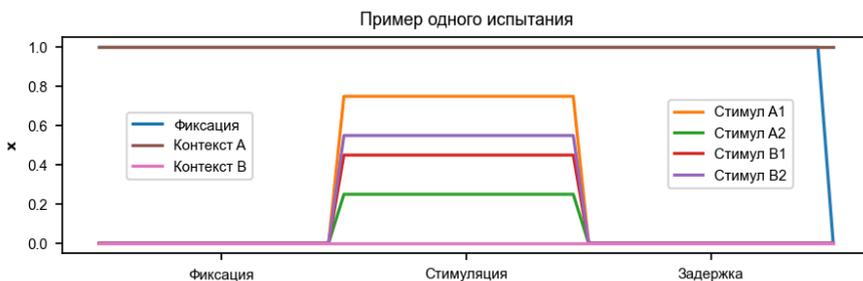


Рис. 1

Для моделирования данной задачи на вход сети подаётся «сенсорный» сигнал из семи компонент:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$$

$x_1 \in \{0,1\}$ – моделирует сигнал фиксации. Равен единице на всём протяжении испытания, кроме момента принятия решения;

$x_{2,3} \geq 0$ – моделируют пару стимулов первого контекста. В период подачи стимулов $x_2 + x_3 = 1$, а в остальные периоды нулевые;

$x_{4,5} \geq 0$ – моделируют пару стимулов второго контекста. В период подачи стимулов $x_4 + x_5 = 1$, а в остальные периоды нулевые;

$x_{6,7} \in \{0,1\}$ – моделируют сигналы контекста. Эти сигналы подаются на сеть в течение всего испытания и $x_6 \neq x_7$.

Все приведённые связи между компонентами справедливы для испытания без шума, пример идеализированного испытания приведён на рис. 1. При обучении и тестировании сети на сенсорные сигналы накладывался шум.

Функциональная модель как автономная система

В течение каждого из периодов испытания на вход сети подаётся зашумлённый сигнал с определенным средним. Для анализа динамики системы в пределах каждого периода мы рассматриваем вход сети как вектор параметров $I_t = \mathbf{x}_t U^T$

Для исследования динамики в течение определенного периода мы рассматриваем соответствующую автономную систему вида:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \text{ReLU}(\mathbf{I}_t + \mathbf{h}_t \mathbf{W}^T). \quad (2)$$

В строго положительной области фазового пространства динамика системы будет совпадать с динамикой линейной системы:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{I}_t + \mathbf{h}_t \mathbf{W}^T \quad (3)$$

$$\mathbf{h}_{t+1} = \begin{cases} \text{ReLU}(\mathbf{I}_t + \mathbf{h}_t \mathbf{W}^T), & \text{любой } \mathbf{h}_{t+1}^l < 0 \\ \mathbf{I}_t + \mathbf{h}_t \mathbf{W}^T, & \text{все } \mathbf{h}_{t+1}^l \geq 0 \end{cases}.$$

При переходе от (3) к (2), новые особые траектории в системе, помимо неподвижной точки линейной системы могут возникнуть только на границе положительной области. Если изображающая точка находится в бассейне притяжения такого пограничного аттрактора – это означает, что один или более нейронов неактивны, а вся динамика формируется только активными нейронами. В этом случае мы можем рассмотреть сеть из активных нейронов как отдельную систему, для которой справедливы те же утверждения.

Далее по рекурсии мы получаем вывод, что любому аттрактору системы вида (1) должна соответствовать подсистема из нейронов, в которой неподвижная точка линейной системы находится в положительной области фазового пространства. В зависимости от природы этой неподвижной точки аттрактор может быть устойчивой неподвижной точкой или же устойчивой квазипериодической траекторией. На примере фазового портрета двумерной системы это продемонстрировано на рис. 2

Если неподвижная точка линейной системы, соответствующей множеству активных нейронов, является седлом или имеет отрицательные координаты, с течением времени фазовая траектория притянется к границе положительной области, пример показан на рис. 2, где за счет нахождения седловой точки в положительной области, при переходе от (2) к (3) появляются две устойчивые неподвижные точки на границах.

Тип устойчивости неподвижной системы задаётся собственными числами матрицы смежности. Таким образом установлена связь между собственными числами матрицы смежности популяции нейронов, активность которых формирует траекторию аттрактора и типом этого аттрактора.

Помимо этого, сформулировано условие существования такого аттрактора: неподвижная точка линейной системы должна находиться в положительной области фазового пространства и быть устойчивой или же иметь только комплексно-сопряжённые собственные числа по модулю больше единицы.

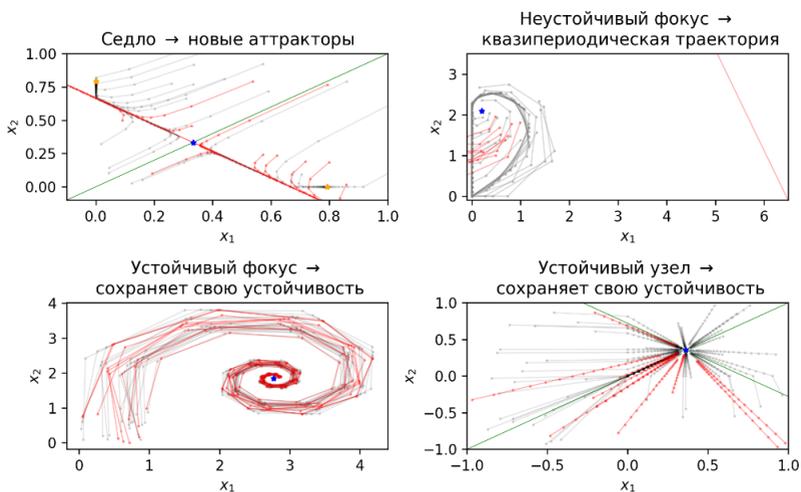


Рис. 2

Динамический механизм решения когнитивной задачи

С помощью предложенного подхода был исследован динамический механизм решения вышеописанной задачи, формируемый в сети в процессе обучения. В течение испытания можно выделить две автономные системы, которые передают друг другу состояние в конце соответствующего периода. Полная динамика формируется поочередным склеиванием траекторий двух систем.

Первая система управляет динамикой в периоды задержки и фиксации. В данные периоды существуют два аттрактора, соответствующие двум вариантам ответа сети. В период подачи стимулов в системе только один аттрактор, но в зависимости от параметров испытания данный аттрактор оказывается в бассейне притяжения определенного аттрактора системы, активной в период фиксации. Поэтому в период задержки траектория притягивается к неподвижной точке, кодирующей конкретный ответ, и остаётся там до принятия решения.

Установлено, что при использовании биологически более релевантного метода обучения с подкреплением значительно выше вероятность возникновения квазипериодических аттракторов, чем при использовании обучения с учителем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-72-10088.

- [1] Масленников О.В., Пугавко М.М., Щапин Д.С., Некоркин В.И. // УФН. 2022. Т. 192. С. 1089.
- [2] Pugavko M.M., Maslennikov O.V., Nekorkin V.I. // Scientific Reports. 2023. Vol. 13. P. 3997.
- [3] Mante, V., Sussillo, D., Shenoy, K. // Nature. 2013. Vol. 503. P. 78.

ЕМКОСТЬ РАБОЧЕЙ ПАМЯТИ СЕТИ С ДВУМЯ ТИПАМИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н.С. Ковалева, В.В. Матросов, М.А. Мищенко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Рабочая память — это ограниченная по емкости часть памяти человека, которая сочетает в себе временное хранение и манипулирование информацией. В рамках синаптической теории рабочей памяти запоминаемые элементы сохраняются в виде кратковременных потенцированных связей в выборочных заранее сформированных популяциях нейронов [1]. В данной работе рассматривается гибкая модель рабочей памяти сети на основе синаптической теории с двумя типами пластичности [2, 3], в которой популяции, кодирующие элементы, формируются посредством синхронного воздействия стимула на группу нейронов за счет механизмов пластичности, зависящей от времени импульсов на нейронах (STDP).

Рассматриваемая сеть состоит из N_E возбуждающих и N_I тормозных нейронов – пороговых интеграторов. Подпороговая динамика деполяризации описывается уравнением:

$$\tau_m \dot{V}_i = V_r - V_i + I_i^{(rec)}(t) + I_i^{(ext)}(t), \quad (1)$$

где $i = 1, NE + NI$ – номер нейрона, τ_m – постоянная времени мембраны, $I_i^{(ext)}$ – внешний ток. Каждый раз, когда деполяризация достигает определенного порога θ (т.е. $V_i(t) \geq \theta$), нейрон генерирует импульс и становится невосприимчивым в течение рефрактерного периода τ_{ref} , затем снова восстанавливается со значения потенциала V_r .

Рекуррентный ток $I_i^{(rec)}(t)$ – сумма постсинаптического тока от всех других нейронов, связанных с нейроном i :

$$I_i^{(rec)}(t) = \sum_j \widehat{J}_{ij}(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}), \quad (2)$$

где $\widehat{J}_{ij}(t)$ – мгновенная эффективность синапса, соединяющего нейрон j с нейроном i ; t_k – все времена импульсов (j) пресинаптического нейрона j .

Мгновенная эффективность синапса:

$$\widehat{J}_{ij}(t) = J_{ij} u_j(t) x_j(t) \omega_{ij}, \quad (3)$$

где J_{ij} – абсолютная синаптическая эффективность связи между возбуждающими нейронами. Для остальных нейронных связей $\widehat{J}_{ij} = J_{ij}$.

Уравнения кратковременной синаптической пластичности:

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(t) &= \frac{U - u_j(t)}{\tau_F} + U[1 - u_j(t)] \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}) \\ \dot{x}_j(t) &= \frac{U - x_j(t)}{\tau_D} + u_j(t) x_j(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}) \end{aligned}, \quad (4)$$

где u – синаптическая эффективность, x – синаптический ресурс, τ_F – время восстановления уровня кальция, τ_D – время восстановления нейротрансмиттеров.

Уравнения, описывающие синаптический вес ω_{ij} , который регулируется STDP, аналогичны уравнениям, представленным в работах [4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} &= -\frac{s_i}{\tau_s} + \sum_i \delta(t - t_i) \\ \frac{ds_j}{dt} &= -\frac{s_j}{\tau_s} + \sum_j \delta(t - t_j) \\ \frac{d\omega_{ij}}{dt} &= \lambda[(1 - \omega_{ij})s_j\delta(t - t_i) - \alpha\omega_{ij}s_i\delta(t - t_j)], \end{aligned} \quad (5)$$

где s_i и s_j – переменные, отслеживающие импульсы на постсинаптическом и пресинаптическом нейроне, τ_s – характерное время спада локальных переменных, λ – скорость обучения, α – параметр асимметрии [4, 5].

Внешние токи моделируются как гауссовский белый шум:

$$I_i^{(ext)}(t) = \mu_{ext} + \sigma_{ext}\eta_i(t) \quad (7)$$

при $\langle \eta_i(t) \rangle = 0$, $\langle \eta_i(t)\eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t - t')$, так что μ_{ext} и σ_{ext}^2 являются соответственно средним значением и дисперсией внешних токов.

Моделируемая сеть состоит из 1000 нейронов, 80% сети – возбуждающие нейроны, 20% сети – тормозные нейроны, вероятность установления синаптического контакта – 20%. На рис. 1 показан пример динамики сети в зависимости от времени при $\tau_F = 2550$ мс, $\tau_D = 430$ мс, $\lambda = 0.0012$, $\mu_{ext} = 10$, $\sigma_{ext}^2 = 0.12$, где каждая точка обозначает возникновение импульса на определенном нейроне. Для каждого сформированного кластера синим цветом изображены графики изменения средних значений синаптической эффективности u в кластерах, красным – изменения средних значений синаптического ресурса x в кластерах. С 3 секунды реализации последовательно на разные группы нейронов, в каждой из которой содержится 70 нейронов, в течение 0.3 секунд действует стимул с амплитудой 26 мВ.

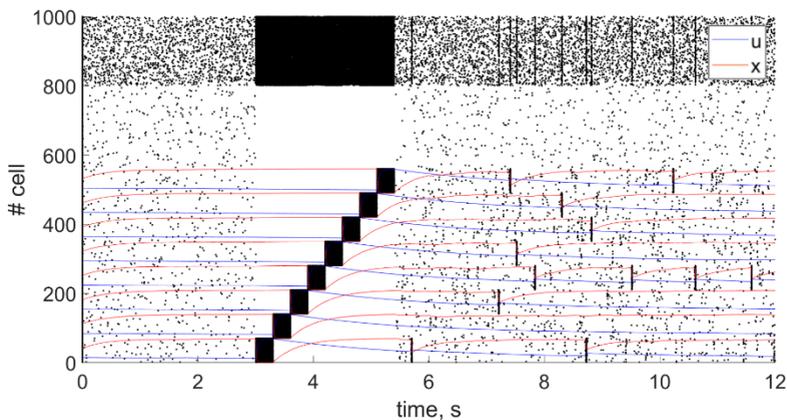


Рис. 1

За счет долговременной пластичности (STDP) происходит увеличение среднего значения веса связей внутри групп нейронов, на которые воздействовал стимул, формируются кластеры, что соответствует запоминанию. После загрузки образов в сеть, за счет кратковременной пластичности происходит периодическая спонтанная реактивация запомненных образов.

Исследована емкость рабочей памяти сети с двумя типами пластичности в зависимости от параметров времен синаптической пластичности и скорости обучения. Емкость определялась как количество кластеров, в которых наблюдается синхронная активность в течение 5 секунд после полного прекращения внешней стимуляции и спустя секунду для каждой популяции, чтобы устранить эффекты переходных процессов. При этом рассматриваемая сеть не имела спонтанной реактивации синхронных разрядов в течение периода до стимуляции. Для заданных параметров среднего значения и дисперсии фонового шума моделировалось 10 различных реализаций, затем считалось среднее значение емкости.

На рис. 2, 3 представлены полученные зависимости емкости от времен синаптической пластичности при скоростях обучения $\lambda = 0.001$ и $\lambda = 0.0012$ соответственно.

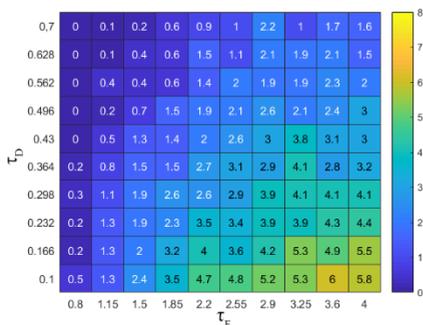


Рис. 2

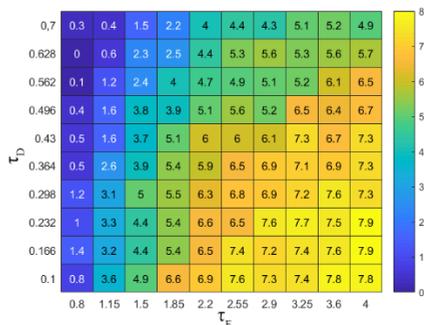


Рис. 3

Результаты схожи с полученными ранее результатами для аналогичной сети с кратковременной пластичностью: емкость в среднем увеличивается при увеличении времени восстановления уровня кальция τ_F и при уменьшении времени восстановления нейротрансмиттеров τ_D [6]. При этом показано, что при увеличении скорости обучения емкость в среднем увеличивается, при этом зависимость от времен синаптической пластичности сохраняется.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

[1] Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. // Science. 2008. Vol. 319, No. 5869. P. 1543.

- [2] Ковалева Н.С., Матросов В.В, Мищенко М.А. // Труды XXVI научной конференции по радиофизике, посвященной 120-летию со дня рождения М.Т. Греховой. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2022. С 215.
- [3] Ковалева Н.С., Матросов В.В, Мищенко М.А. // Тезисы докладов XX научной школы «Нелинейные волны - 2022». ИПФ РАН. 2022. С. 131.
- [4] Morrison A., Diesmann M., Gerstner W. // Biological Cybernetics. 2008. Vol. 98. P. 459.
- [5] Song S., Miller K.D., Abbott L.F. // Nature Neuroscience. 2000. Vol. 3. P. 919.
- [6] Ковалева Н.С., Матросов В.В., Мищенко М.А. // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, №. 1. С. 86.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ТОРЫ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ БАУТИНА

А.А. Маркелов^{1,2)}, А.С. Дмитричев²⁾, В.И. Некоркин^{1,2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

Введение

Явление подавления колебаний, изначально существующих в невзаимодействующих динамических системах и исчезающих при “включении” связи между ними, получило название амплитудной смерти (АС). Это явление возникает в системах самой различной природы и привлекает большое внимание исследователей [1, 2]. В основе многих моделей, описывающих явление АС, лежит осциллятор Стюарта-Ландау, являющейся нормальной формой бифуркации Андронова-Хопфа (при которой так называемая первая Ляпуновская величина не равна нулю).

Здесь мы представляем результаты исследования явления АС в системе осцилляторов Баутина. Бифуркация Баутина является обобщением бифуркации Андронова-Хопфа на случай, когда первая ляпуновская величина обращается в ноль, а вторая – не равна нулю [3].

Система взаимосвязанных осцилляторов Баутина

Система из двух связанных осцилляторов имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (\alpha + i\omega_1)z_1 + \beta z_1|z_1|^2 - z_1|z_1|^4 + c(z_2 - z_1) \\ \dot{z}_2 = (\alpha + i\omega_2)z_2 + \beta z_2|z_2|^2 - z_2|z_2|^4 + c(z_1 - z_2) \end{cases} \quad (1)$$

где $z_{1,2} = x_{1,3} + ix_{2,4}$, $c > 0$ – параметр, характеризующий силу связи между осцилляторами, а α и β – параметры системы.

Система (1) при любых значениях параметров имеет единственное состояние равновесия в начале координат O , которое в зависимости от значений параметров может быть устойчивым или неустойчивым фокусом, а также седло-фокусом. Заметим, что состояние равновесия принадлежит трёхмерному многообразию симметричных решений $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\}$. Помимо симметричных, в системе также могут существовать и несимметричные решения, однако мы установили, что при $\beta < 1$ такие решения в системе отсутствуют.

Пределные циклы и инвариантные торы

Было установлено, что при $\Delta < 2c$ многообразие M , в зависимости от значений параметров, может содержать различное число периодических движений вида:

$$L_j: \begin{cases} x_1 = \sqrt{\rho_j} \cos\left(\Omega t - \frac{\theta_{1,2}}{2} + \varphi_0\right), x_2 = \sqrt{\rho_j} \sin\left(\Omega t - \frac{\theta_{1,2}}{2} + \varphi_0\right) \\ x_3 = \sqrt{\rho_j} \cos\left(\Omega t + \frac{\theta_{1,2}}{2} + \varphi_0\right), x_4 = \sqrt{\rho_j} \sin\left(\Omega t + \frac{\theta_{1,2}}{2} + \varphi_0\right) \end{cases} \quad (2)$$

$$\rho_j = \frac{\beta}{2} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 + 4(\alpha - c) + 4c \cos(\theta_{1,2})}}{2}, j = 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

где $\theta_1 = \arcsin \frac{\Delta}{2c}$, $\theta_2 = \pi - \arcsin \frac{\Delta}{2c}$, $\Delta = \omega_2 - \omega_1$, $\Omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$, $\varphi_0 = \text{const}$.

Таким образом, в системе (1) при фиксированном значении параметров α и β может существовать до четырёх предельных циклов различной устойчивости: L_1 – устойчивый предельный цикл, $L_{2,3}$ – седловые предельные циклы, L_4 – неустойчивый предельный цикл.

При $\Delta = 2c$, в зависимости от значения параметра c , происходят различного вида седло-узловые бифуркации циклов.

При $\Delta > 2c$ в фазовом пространстве системы (1) существует либо один устойчивый двумерный инвариантный тор T_s^2 , либо два инвариантных тора устойчивый – T_s^2 и неустойчивый T_u^2 :

$$T_{s,u}^2: \begin{cases} x_1 = \sqrt{\rho_{s,u}(t)} \cos(\Omega t + \theta_{s,u}(t)), x_2 = \sqrt{\rho_{s,u}(t)} \cos(\Omega t + \theta_{s,u}(t)) \\ x_3 = \sqrt{\rho_{s,u}(t)} \cos(\Omega t + \theta_{s,u}(t)), x_4 = \sqrt{\rho_{s,u}(t)} \cos(\Omega t + \theta_{s,u}(t)) \end{cases} \quad (5)$$

где $\theta(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, $\varphi_{1,2}$ – фазовые переменные системы (1) в полярных координатах.

На рисунке представлено разбиение плоскости параметров (c, Δ) (для $\beta = 0.9$, $\alpha = 0.1$) на области с различным числом предельных циклов и торов, которое осуществляется следующими бифуркационными кривыми:

SN_{13}^+ : $\{\Delta = 2c, 0 < c < \alpha\}$ – седло-узловой бифуркацией предельных циклов L_1 и L_3 ,

A_2 : $\{\Delta = 2\sqrt{2ac - \alpha^2}, \frac{\alpha}{2} < c < \alpha\}$ – субкритической бифуркация Андронова-Хопфа цикла L_4 ,

HN : $\{c = \alpha, \Delta > 2c\}$ – Хопф-Хопф бифуркацией инвариантного тора T_u^2 ,

A_1 : $\{\Delta = 2\sqrt{2ac - \alpha^2}, c > \alpha\}$ – субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа цикла L_2 ,

$SN_{13,24}$: $\{\Delta = 2c, \alpha < c < \frac{\beta^2}{4} + \alpha\}$ – седло-узловыми бифуркациями предельных циклов L_1 ; L_3 и L_2 ; L_4 ,

K_2 : $\{\Delta = \frac{\sqrt{16c^2 - (4(\alpha - c) + \beta^2)^2}}{2}, \frac{1}{2}(\frac{\beta^2}{4} + \alpha) < c < \frac{\beta^2}{4} + \alpha\}$ – седло-узловой бифуркацией предельных циклов L_3 и L_4 ,

K_1 : $\{\Delta = \frac{\sqrt{16c^2 - (4(\alpha - c) + \beta^2)^2}}{2}, c > \frac{\beta^2}{4} + \alpha\}$ – седло-узловой бифуркацией предельных циклов L_1 и L_2 ,

Γ_{32} – бифуркацией образованной многообразия седловых предельных циклов L_3 и L_2 ,

T – бифуркацией слияния торов T_s^2 и T_u^2 .

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ АСТРОЦИТА УЛЛАХА-ЮНГА

Л.П. Никифорова, С.Ю. Маковкин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Изучение механизмов, которые порождают колебания в биофизической модели астроцитов, является одной из главных и актуальных проблем современной науки. В данной работе исследуется динамика кальциевого генератора, описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка, полученной из уравнений биохимических превращений в астроцитах. Также мы моделируем воздействие внешних импульсов на астроцит.

Модель Уллаха-Юнга [1] описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. В одиночном астроците основным механизмом, приводящим клетку к автоколебательному режиму, является бифуркация Андронова–Хопфа, которая связана с изменением устойчивости равновесного значения кальциевой концентрации [2, 3]. Учет более тонких механизмов молекулярных преобразований и воздействия межклеточных взаимодействий может привести к более сложным механизмам возникновения колебаний и генерации сигналов, в том числе и сложной формы, включая хаотическую.

В работе исследуется поведение системы с управляющим параметром $IP3^*$ и фиксированным параметром v_d . Чтобы исследовать систему находят максимумы и минимумы для идентификации устойчивых состояний, исследования бифуркаций и переходов между состояниями и определения критических точек. На графике максимальной и минимальной амплитуды кальция (рис. 1) можно увидеть диаметр предельного цикла, на нем мы двигаемся на увеличение и уменьшение управляющего параметра $IP3^*$.

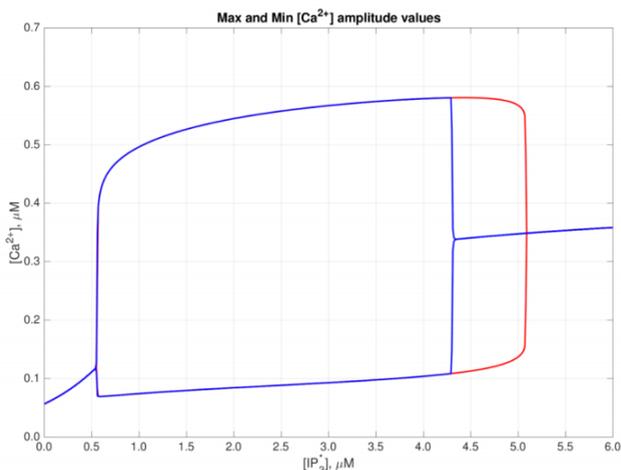


Рис. 1

В статье рассматривается отклик астроцита, который представляет собой последовательность одинаковых импульсов одной и той же амплитуды и длительности. При

значениях интервала следования, близких к характерным временам релаксации системы, сигнал отклика становится более сложным и в некоторых случаях нерегулярным [4]. Дальнейшее уменьшение периода стимуляции приводит к тому, что концентрация кальция становится квазистационарной. Чтобы понимать, в каком режиме работает астроцит, делается численная оценка старшего показателя Ляпунова λ . В работе были вычислены показатели Ляпунова, которые показывают, что при показателе $\lambda > 0$ в системе наблюдается хаотическая динамика, а при $\lambda = 0$ присутствует регулярная динамика. Эти два режима можно увидеть на рис.2, где на верхнем графике представлена максимальная амплитуда концентрации кальция, а на нижнем — старший показатель Ляпунова.

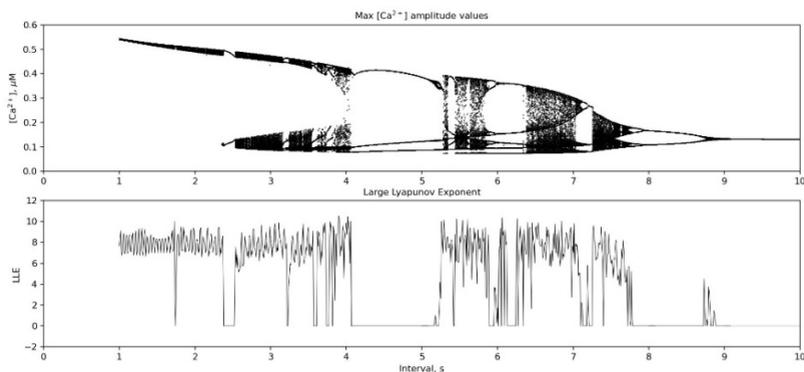


Рис. 2

Проведено исследование динамики модели астроцита, включая численное интегрирование, анализ бифуркаций, построение бифуркационной диаграммы и выявление областей гистерезиса. Были выявлены бифуркации в модели, а также численно определены области параметров, соответствующие хаотическим режимам. Для подтверждения наличия хаотической динамики в системе был рассчитан старший показатель Ляпунова.

- [1] Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A.H. // Cell Calcium. 2006. Vol. 39. P. 197.
- [2] Makovkin S.Y., Shkerin I.V., Gordleeva S.Y., Ivanchenko M.V. // Chaos, Solitons Fractals. 2020. Vol. 138. P. 109951.
- [3] Matrosov V.V., Kazantsev V.B. // Chaos. 2011. Vol. 21, No. 2. P. 023103.
- [4] Гордлеева С.Ю., Матросов В.В., Казанцев В.Б. // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, №. 3. С. 29.

СИНХРОНИЗАЦИЯ И ХИМЕРЫ В АНСАМБЛЕ АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ С ПРИТЯГИВАЮЩЕЙ И ОТТАЛКИВАЮЩЕЙ СВЯЗЬЮ

П.А. Щербаков, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Изучение поведения нелокально связанных осцилляторов, движущихся в некоторой среде – актуальная тематика на стыке физики, биологии и химии, которой посвящено значительное количество работ.

Например, в [1] изучается влияние движения на синхронизацию в популяции мобильных агентов, имеющих фазу и совершающих случайную прогулку на графе. Там рассмотрено два различных способа перехода к синхронизации: через вершины малой степени и через хабы. Каждый агент является осциллятором в модели Курамото и взаимодействует лишь с агентами, которые в этот же момент времени находятся в той же вершине графа. Показано, что синхронизация существенно зависит от того, где с течением времени концентрируются агенты: около хабов или около вершин малой степени. Баланс между ними определяется параметром сдвига. А именно, существуют два его критических значения, при которых синхронизация может быть индуцирована движением. Соответственно, возможны два разных фазовых перехода, связанных с синхронизацией на микроскопическом уровне.

В работе [2] исследуется близкий к настоящей работе вариант модели Курамото-Сакагучи с периодическими граничными условиями и специфически параметризованным фазовым сдвигом. Для ядра взаимодействия выбрана кусочно-постоянная аппроксимация фиксированной ширины. Осцилляторы расположены на целочисленной решётке, свёрнутой в кольцо. В каждый момент времени осциллятор может случайным образом поменяться местами со своим соседом. В случае притягивающей связи в зависимости от фазового сдвига устойчив полностью когерентный режим или бегущая волна. В случае отталкивающей связи движение осцилляторов приводит к разрушению когерентных кластеров. Ключевую роль играет соотношением временных масштабов между фазами и положениями.

Также в [3] рассматривается синхронизация локально связанных фазовых осцилляторов с шумом, которые диффундируют в кольце. Показано, что в системах низкой размерности глобальная синхронизация может подавляться m -скрученным состоянием, демонстрирующим установление локального порядка. Большая степень движения осцилляторов дестабилизирует m -скрученные состояния и приводит к глобально синхронному состоянию. То есть, высокая мобильность разрушает все решения соответствующих уравнений в термодинамическом пределе, кроме решений с глобальной синхронизацией. Выдвинута гипотеза, что глобальная синхронизация может порождаться нестабильностью локальных эффектов и в системах большей размерности.

А, например, в [4] анализируется динамика синхронизации фазовых осцилляторов с локальной связью при движении на одномерной решётке. Осцилляторы случайно меняются местами со своими соседями в короткие промежутки времени. Движение ускоряет релаксацию пространственных режимов и приводит к более быстрой синхронизации. Помимо этого, из-за движения взаимодействие приобретает среднеполевой

характер и пространственные режимы гаснут. Оценён временной масштаб релаксации доминирующего пространственного режима и показано, что движение расширяет диапазон взаимодействия исходной локальной системы.

В свою очередь, в работе [5] изучается популяция нелокально связанных фазовых осцилляторов, совершающих броуновское движение на кольце. В качестве ядра связи выбрано косинусоидальное. В стационарном случае получены синфазный и противофазный химерный режимы. При малом движении синфазный режим переходит в синфазную химеру при фазовом сдвиге близко к $\frac{\pi}{2}$ и иначе переходит в другие состояния. При средней степени движения в зависимости от фазового сдвига происходят случайные переходы между разными динамическими режимами. Их время жизни масштабируется степенью мобильности.

В работе рассматривается случаи синфазной и противофазной, а также прыгающей химеры. Последняя получена при специфическом характере движения осцилляторов.

Модель

При условии нулевых собственных частот связь между фазовыми осцилляторами описывается уравнением:

$$\dot{\varphi}_k = \sum_{j=1}^N G(x_j - x_k) \sin(\varphi_j - \varphi_k - \alpha), \quad (1)$$

где φ_k – фаза k -го осциллятора, N – число осцилляторов, α – параметр фазового сдвига. Экспоненциальное ядро нелокального взаимодействия:

$$G(x) = H \frac{\cosh H \left(|x| - \frac{L}{2} \right)}{2 \sinh \frac{HL}{2}}, \quad (2)$$

где H – параметр нелокального взаимодействия, L – длина кольца, в котором расположены осцилляторы.

Предполагается, что осцилляторы движутся в некотором потенциале $U(x, t)$, поэтому их координаты подчиняются уравнениям:

$$m\ddot{x}_k + \lambda_k \dot{x}_k + \frac{dU_k}{dx_k} = 0, \quad (3)$$

где m – масса осциллятора, λ – параметр диссипации.

В работе рассматривается частный случай, когда $\lambda_k \in \{0, 1\}$, $U_k = \frac{(x_k - a_k)^2}{2}$, где a_k – эквидистантно расположенные минимумы потенциала. Также вводится дополнительный параметр p – процент осцилляторов с $\lambda_k = 0$. Предполагается, что в начале положение каждого из осцилляторов берётся из равномерного распределения диаметра $\frac{2LD}{N}$ в окрестности минимума потенциала. Изучаются случаи притягивающей и отталкивающей связи.

Экспериментальные результаты

Рассмотрим случай $D = 2$. Для химерного режима с классическими начальными условиями в притягивающей связи ожидаемо получаем в силу малости D небольшие гармонические флуктуации. При этом параметр p контролирует выраженность гармонической составляющей в движении химеры. Например, при $p = 0.1$:

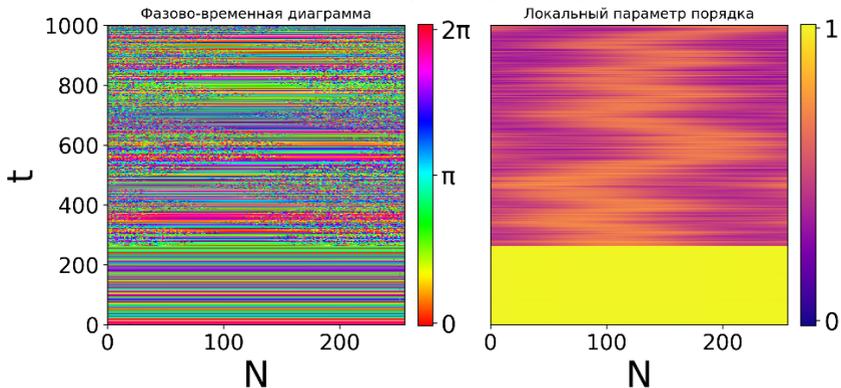


Рис. 1

Пусть теперь $D = 0$, в отталкивающей связи для начальных условий в виде двух противофазно синхронизованных кластеров наблюдаем противофазную химеру. Она имеет достаточно долгий процесс установления ввиду сильной зависимости системы от начальных условий. Заметно, что в процессе переходного процесса возникают так называемые m -скрученные состояния, которые в отталкивающей связи дестабилизируются:

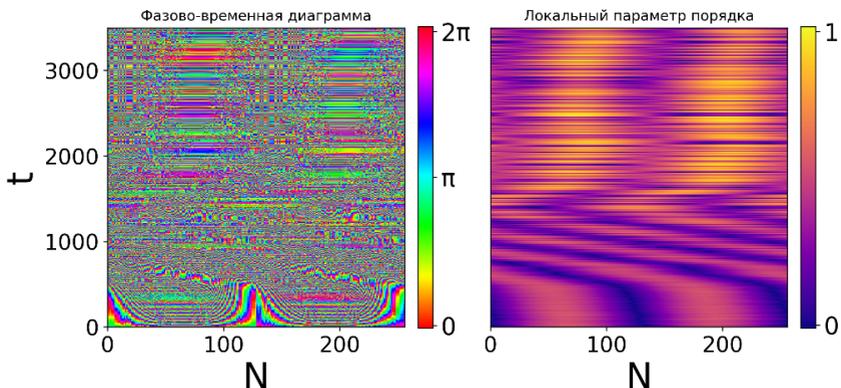


Рис. 2

Если же для синфазной химеры в притягивающей связи положить $D \gg 1$, то возникнут пересечения траекторий частиц, которые приводят к особому виду движения когерентного кластера. Мы называем этот феномен прыгающей химерой (jumping chimeras). Например, для $D = 30, p = 0.5$ имеем:

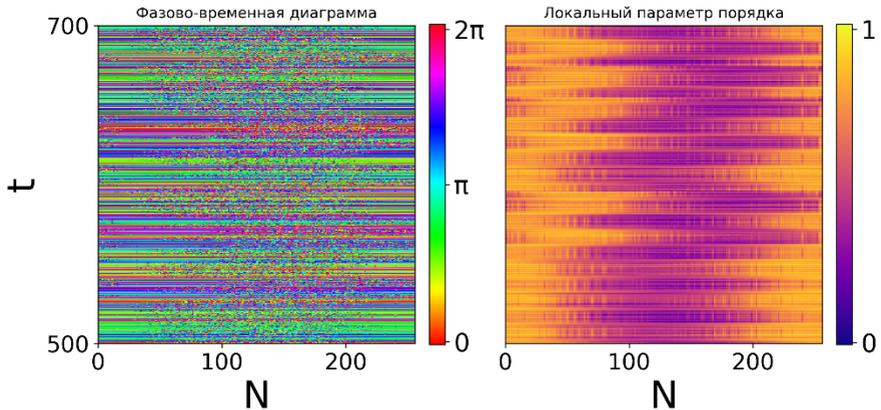


Рис. 3

Когерентный кластер перескакивает между двумя положениями. Причём эти положения противоположны на кольце.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект FSWR-2020-0036.

- [1] Gómez-Gardenes J. et al. // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87, No. 3. P. 38.
- [2] Li B., Uchida N. // *Physical Review E*. 2022. Vol. 106, No. 5. P. 54.
- [3] Peruani F., Nicola E.M., Morelli L.G. // *New Journal of Physics*. 2010. Vol. 12, No. 9. P. 93.
- [4] Uriu K. et al. // *Physical Review E*. 2013. Vol. 87, No. 3. P. 32.
- [5] Wang W.H. et al. // *Frontiers of Physics*. 2019. Vol. 14, No. 4. P. 43.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАНДШАФТА ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ В ЗАДАЧЕ РЕГРЕССИИ

И.А. Соловьев^{1, 2)}, В.В. Клиньшов^{1, 2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

Стремительное развитие искусственных нейросетей в последние годы позволило использовать их в решении множества прикладных задач. Так, нейронные сети были использованы в задачах распознавания изображений и локализации объектов в пространстве [1], [2], распознавания человеческой позы [3] и речи [4], [5], обработке текста [6], [7]. Однако, несмотря на широкое применение в реальных задачах, теория нейросетей далека от завершения. Цель данной работы – попытка заполнить пробел в теоретических знаниях о динамике нейронных сетей путем исследования ландшафта функции потерь сети в задаче регрессии. Для этого обучение нейронной сети рассматривается как динамический процесс с использованием методов теории колебаний и нелинейной динамики, что позволяет получить оценки глубины и крутизны локальных минимумов функции потерь. Эксперименты, проведенные в работе, показали, что даже для достаточно простой сети и решаемой задачи вид ландшафта оказывается сложным, а результаты обучения существенно зависят от начальных условий.

В качестве модельной сети был выбран перцептрон [8] с одним скрытым слоем из 10 нейронов. Она решает задачу аппроксимации функции, то есть учится выдавать ее значение в ответ на предъявляемое значение аргумента. Выходное значение сети записывается в виде:

$$y = F(x, \mathbf{w}), \quad (1)$$

где x – входное значение, а \mathbf{w} – вектор обучаемых параметров (весов). Входные данные для обучения представляют собой множество чисел X от 0 до 10 с шагом в 0.01, а целевое значение задается гладкой функцией:

$$t_v = g(x) = 0.5 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi x}{5} \right) \right). \quad (2)$$

Для обучения методом обратного распространения ошибки [9] вводится функция потерь (ошибки). В работе используется батч-обучение [11], то есть перед тем, как осуществить обновление весов, сети предъявляется весь набор X , а ошибка усредняется по всем показанным на данном шаге примерам. С учетом этого квадратичная функция потерь записывается в виде:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - t_{v_i})^2, \quad (3)$$

где N – количество примеров в наборе, а y_i, t_{v_i} – соответственно i -ые выходные значения сети и целевое значение. На каждом шаге обучения веса сети изменяются таким образом, чтобы (3) уменьшалась.

Существует достаточно большое количество методов обновления весов, однако для разработки метода анализа ландшафта функции потерь необходимо было выбрать

тот, что легко поддается теоретическому анализу. Таким является, например, алгоритм градиентного спуска (SGD), для которого обновление веса записывается как:

$$w_i(t+1) = w_i(t) - \epsilon \frac{\partial C}{\partial w_i}. \quad (4)$$

Здесь и далее ϵ – параметр, который называется скоростью обучения (лернинг-рейт, обозначаемый также lr), а t – дискретное время. Эксперименты показали, что этот метод в данной задаче показывает намного более медленную сходимость ошибки к минимуму, чем сложные алгоритмы, такие, как, например, адаптивный градиентный спуск (ADAGRAD) [10]. Поэтому, принимая во внимание тот факт, что ландшафт будет исследоваться вблизи локальных минимумов функции потерь, было предложено совместить оба метода обновления весов. До определенного порогового значения ошибки сеть учится с помощью адаптивного спуска, а затем переходит на обычный градиентный спуск. Это позволяет достаточно быстро оказаться в окрестности локального минимума, а затем двигаться в ней по алгоритму SGD, который поддается теоретическому анализу.

Вблизи локального минимума функция потерь описывается квадратичной формой A :

$$C = C_0 + \tilde{C} = C_0 + \mathbf{w}^T A \mathbf{w}. \quad (5)$$

Если веса обновляются с помощью обычного градиентного спуска (4), можно записать точечное отображение для вектора весов:

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - 2\epsilon A \mathbf{w}. \quad (6)$$

С использованием его разложения по собственным векторам матрицы A функция потерь представляется как сумма экспонент:

$$C = C_0 + \sum_j C_{A_j} \exp(\alpha_j t), \quad \alpha_j = 2 \ln(|1 - 2\epsilon \lambda_j|), \quad (7)$$

где λ – одно из собственных чисел матрицы A . На больших временах динамика функции потерь определяется экспонентой с наименьшим показателем α :

$$C = C_0 + C_A \exp(\alpha t), \quad \alpha = 2 \ln(|1 - 2\epsilon \lambda|). \quad (8)$$

Входящий в показатель λ (индексы далее опущены) – минимальное собственное число квадратичной формы. Предложенный метод анализа ландшафта функции потерь состоит в аппроксимации ее графика такой экспонентой. Показатель экспоненты характеризует крутизну минимума, а свободный член – глубину.

В результате экспериментов было получено множество кривых обучения с разных начальных условий для нескольких скоростей обучения. Они были аппроксимированы экспонентами, в результате получены распределения глубин минимумов, изображенные на рис. 1. Из распределений видно, что даже в такой простой задаче ландшафт функции потерь очень сложен, присутствует большое количество минимумов разной глубины, и в зависимости от начальных условий при одной и той же скорости обучения можно получить существенно разный результат.

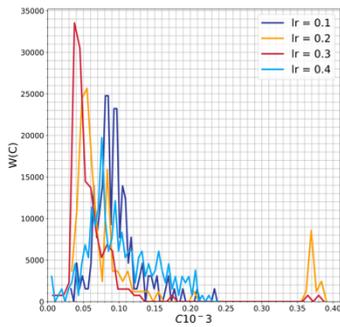


Рис. 1

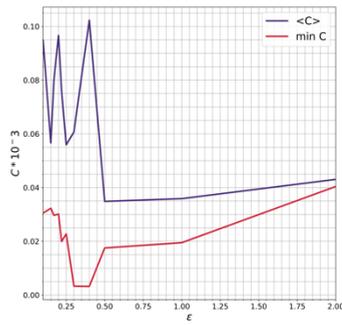


Рис. 2

На рис. 2 показана зависимость минимальной и средней глубины минимумов от скорости обучения. Из этого графика видно во-первых, что средняя глубина, которой сети удастся достичь, значительно отличается от минимальной, а во-вторых, существует оптимальное значение скорости обучения, при котором можно достичь наиболее глубоких минимумов.

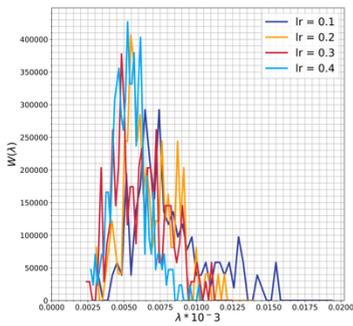


Рис. 3

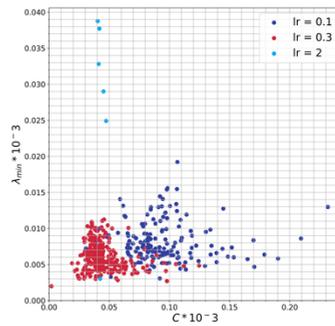


Рис. 4

На рис. 3 изображено распределение оценок минимальных собственных чисел λ , определяющих крутизну локальных минимумов. Видно, что на ландшафте функции потерь присутствуют минимумы с разной крутизной. Интересно также проверить наличие корреляции между глубиной и крутизной локальных минимумов. Соответствующие пары глубина-крутизна изображены на рис. 4. Из него следует, что маленькие скорости обучения позволяют достичь менее глубоких, но более крутых минимумов, в то время как при высоких скоростях возможно найти также глубокие минимумы с небольшой крутизной.

По итогам работы был предложен способ исследования ландшафта функции потерь нейронной сети, основанный на методах из теории динамических систем. Кривые обучения сети были аппроксимированы экспонентами, параметры которых позволили получить распределения крутизны и глубины локальных минимумов. Этот метод можно использовать для широкого спектра функций потерь и решаемых сетью задач, при этом для оценки глубин не нужно учить сеть до реального достижения минимума.

Полученные результаты свидетельствуют о высокой сложности ландшафта даже в простой задаче, причем при одной скорости обучения в зависимости от начальных условий сеть может достигать минимумов разной глубины и крутизны, что необходимо учитывать при обучении.

- [1] Szegedy C., Toshev A., Erhan D. // *Advances in neural information processing systems*. 2013. Vol. 26.
- [2] Socher R. et al. // *Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11)*. 2011. P. 129.
- [3] Toshev A., Szegedy C. // *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2014. P. 1653.
- [4] Graves A., Mohamed A., Hinton G. // *2013 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing*. 2013. P. 6645.
- [5] Kim S.H., Nam H., Park Y.H. // *ICASSP 2022-2022 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2022. P. 6742.
- [6] Collobert R., Weston J. // *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*. 2008. P. 160.
- [7] Devlin J. et al. // *arXiv preprint arXiv:1810.04805*. 2018.
- [8] Block H.D. // *Reviews of Modern Physics*. 1962. Vol. 34, No. 1. P. 123.
- [9] Rumelhart D.E., Hinton G. E., Williams R. J. // *Nature*. 1986. Vol. 323, No. 6088. P. 533.
- [10] Duchi J., Hazan E., Singer Y. // *Journal of machine learning research*. 2011. Vol. 12, No. 7.
- [11] Wilson D.R., Martinez T.R. // *Neural networks*. 2003. Vol. 16, No. 10. P. 1429.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В КОНКУРЕНТНОЙ ДИНАМИКЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ КОЛЛЕКТИВНОГО КЛАССИФИКАТОРА БЕЗ ВНЕШНЕГО СОРТИРОВЩИКА

А.А. Сутягин, О.И. Канаков

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современном мире наблюдается повышенный интерес к задачам машинного обучения, одной из которых является задача классификации, представляющая собой отображение пространства признаков исследуемого объекта на конечное множество решений классов, принимаемых на основании значений признаков. В основном, такие задачи рассматриваются для создания алгоритмов, используемых цифровыми вычислительными устройствами, но в мире существуют и биологические системы, работающие по схожим принципам (нервные и адаптивные иммунные системы).

Для создания обучаемого классификатора, который возвращает метку класса на основе набора признаков, используется коллективный классификатор, который реализуется на базе элемента с ограниченной сложностью. Идея заключается в том, что обучение производится путём изменения состава ансамбля. В работах [1], [2] и [3] было показано, что стратегия обучения, основанная на конкуренции с сосуществованием, может достичь вероятности правильной классификации, определяемой правилом Байеса, по мере увеличения количества обучающих примеров.

Модифицированная модель конкуренции с сосуществованием без учёта внешнего сортировщика

Одним из общих недостатков методов селекции при обучении коллективных классификаторов является необходимость использования внешнего сортирующего устройства, что, в свою очередь, означает, что обучение системы не происходит за счёт её собственной динамики. Поэтому возникла потребность модернизации прошлых моделей с целью решения возникшей проблемы, а именно: обучение коллективного классификатора без использования сортировщика, исключительно благодаря собственной популяционной динамике. Также требуется сохранить пропорции возникшего состава ансамбля после обучения, потому что в прошлых моделях после завершения обучения происходило возвращение системы в исходное состояние, что соответствовало «забыванию» системой результатов обучения.

Решение первой задачи, отказ от внешней селекции при обучении, требует реализации механизма конкурентной популяционной динамики внутри элементов ансамбля, а также настройки параметров конкурентоспособности в процессе обучения на основе предъявляемых примеров. Для решения второй задачи, сохранения структуры популяции после обучения, необходимо обеспечить, чтобы относительные пропорции клеток разных типов в составе ансамбля оставались неизменными вне процесса обучения или изменялись на временном масштабе, превышающем время сохранения состава популяции после обучения.

Рассмотрим модель, демонстрирующую динамику концентрации клеток i -го типа при $i = 1 \dots s$, где s – количество типов клеток:

$$\dot{n}_i = b_i n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_k n_k\right) - (1 - b_i) \frac{n_i^2}{N_c}, \quad (1)$$

где n_i – концентрация i -го типа клеток, b_i – коэффициент выживаемости для i -го типа клеток, N_c – общее количество клеток. Уравнение имеет решение, соответствующее устойчивому состоянию равновесия:

$$n_i = N_c \frac{b_i}{1 - b_i} a, \quad \text{где} \quad (2)$$

$$a = \frac{1}{\sum_k \left(\frac{1}{1 - b_k}\right) - (s - 1)}. \quad (3)$$

Сохранение ансамбля с использованием модели (1) невозможно, так как обучение управляется параметром b_i . Завершение обучения приводит к прекращению управления выживаемостью клеточных типов. Иными словами, параметры b_i должны вернуться к одинаковому значению для всех клеток, которое определяется реализацией базового элемента. После этого система перейдёт в устойчивое состояние равновесия, при котором численности всех клеточных типов также будут одинаковы, и система фактически забудет своё обучение. Чтобы реализовать такой сценарий, модифицируем систему (1) так, чтобы параметр b_i , управляющий конкуренцией, влиял только на внутривидовую конкуренцию, обусловленную квадратичным слагаемым концентрации. При этом конкурентоспособность клеток за общий ресурс должна оставаться одинаковой. При таком подходе прекращение обучения подразумевает завершение внутривидовой конкуренции одномоментно для всех типов клеток, что позволяет сохранить пропорциональную численность клеток каждого вида, пока полная численность не достигнет ёмкости среды – $\sum_i n_i = N_c$. Для того, чтобы осуществить переход к модели, соответствующей идеям, описанным выше, поделим правую часть каждого уравнения на b_i и введём переобозначение параметров:

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_k n_k\right) - k_i \frac{n_i^2}{N_c}, \quad \text{где} \quad (4)$$

$$k_i = \frac{1 - b_i}{b_i}. \quad (5)$$

Ограничение $b_i \in (0,1)$ переходит в $k_i \in (0, +\infty)$. Если параметры k_i постоянны во времени и удовлетворяют указанного ограничению, то выражение для состояния равновесия (2) сохраняет силу и с учётом преобразования принимает вид:

$$\dot{n}_i = \frac{N_c}{k_i} \left(1 + \sum_i^s k_i^{-1}\right)^{-1}. \quad (6)$$

Подсистема обучения и метод обучения коллективного классификатора

Сформулируем стратегию обучения, исходя из предположения, что динамика популяции ансамбля в процессе обучения описывается моделью (4), где параметры k_i теперь являются переменными во времени, а после окончания обучения все k_i обращаются в нуль.

Пусть x – вход классификатора. Пусть заданы функции отклика $f_i(x)$ на множестве значений признаков для всех типов клеток, описывающие отклик i -го типа клеток на входное значение x . Пусть также имеется последовательность обучающих примеров $\{\pi_\alpha\}_{\alpha=1}^{N_{learn}}$, где N_{learn} – общее количество обучающих примеров, каждый из которых представляет собой пару $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_{alpha})$, состоящую из значения признака x_α с известной меткой класс $c_\alpha \in +, -$, где «+» соответствует положительному отклику, а «-» – отрицательному. Предположим, что все обучающие примеры подаются последовательно и в случайном порядке, с фиксированной продолжительностью предъявления каждого примера, равной T_s , а временные промежутки между предъявлением примером отсутствуют:

$$\dot{k}_i = \begin{cases} -\tau_i^{-1}k_i, & \text{вне процесса обучения,} \\ -\tau_i^{-1}f_i(x_\alpha)(k^+ - k_i), & \text{если } c_\alpha = +, \\ -\tau_i^{-1}f_i(x_\alpha)(k^- - k_i), & \text{если } c_\alpha = -, \end{cases} \quad (7)$$

где α – номер предъявляемого в данный момент обучающего примера, τ_i – временной масштаб процесса обучения, k^+ и k^- – константы, которые соответствуют предельным значения для $k_i(t)$ в зависимости от принадлежности обучающих примеров к тому или иному классу. Как было показано в работе [4], пороговое значение коллективного классификатора соответствует выражению:

$$\theta = 2n_{min} = 2\min F(x)_i. \quad (8)$$

Оценка флуктуаций и заключение

В подсистеме обучения (7) выберем следующие значения параметров $k^- = 5, k^+ = 0.5$. Пусть длительность каждого обучающего примера будет равна $T_s = 0.01$, временной масштаб будет зависеть от количества подаваемых в систему обучающих примеров, подающих случайным образом, последовательно, с равной вероятностью; но даже при этих условиях масштаб обучения будет много меньше характерного масштаба времени популяционной динамики системы (4). Функции отклика типов клеток задаётся аналогично [3]. Функции условной вероятности задаются в виде гауссовского распределения, при этом для положительного класса выбирается бимодальное распределение, как указано на рис. 1. Визуализация

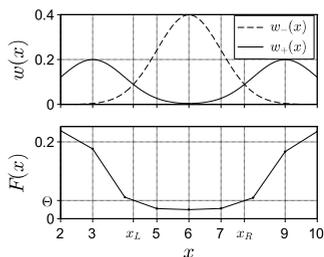


Рис. 1

распределений обучающих примеров и функция отклика обученного классификатора показывают, что решающее правило классификатора близко к правилу Байеса. Это видно из сравнения верхней и нижней панелей, где уровень пересечений распределений подтверждает эффективность предложенной методики обучения коллективного классификатора без внешнего сортировщика. На рис. 2 и рис. 3 показаны динамика параметра $k_i(t)$ и относительная концентрация n_i/N_c , на которых видно, что при «отключении» обучения происходит насыщение среды до заполнения. На рис. 4 и рис. 5 показаны зависимости относительных отклонений в зависимости от количества обучающих примеров, откуда можно сделать вывод, что при увеличении обучающих примеров, что соответствует, в свою очередь, увеличению длительности обучения, реализуется спадающая динамика значения относительного отклонения, что говорит о достаточной точности проведенных численных экспериментов.

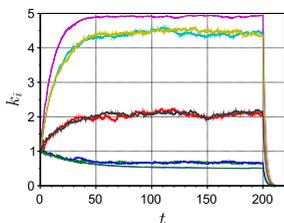


Рис. 2

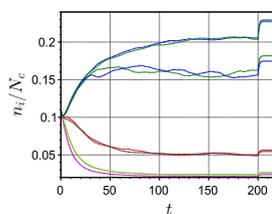


Рис. 3

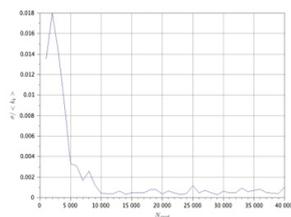


Рис. 4

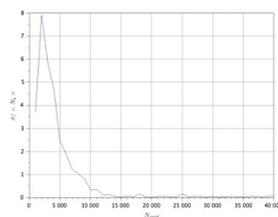


Рис. 5

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031).

- [1] Kanakov O. et al. // PLoS One. 2015. Vol 10, No. 5. P. e0125144.
- [2] Kanakov O.I., Ivanchenko M.V., Tsimring L.S. // Opera Medica & Physiologica. 2016. Vol. 2, S1. P. 53.
- [3] Сутягин А.А., Канаков О.И. // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, №. 2. С. 220.
- [4] Сутягин А.А., Канаков О.И. // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, №. 2. С. 160.

ВЛИЯНИЕ АСТРОЦИТОВ НА КРАТКОВРЕМЕННУЮ ПАМЯТЬ В БИОФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОН-АСТРОЦИТАРНЫХ СЕТЕЙ МОЗГА

Ю.А. Цыбина, С.Ю. Гордлеева, В.Б. Казанцев

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В основе традиционной концепции обработки и хранения информации в мозге лежит передача электрических импульсов по нейронным сетям. Однако экспериментальные исследования последних лет выявили также важную роль астроцитов, глиальных клеток мозга, в этих процессах. Астроциты генерируют импульсы химической активности, а именно кратковременное повышение внутриклеточной концентрации ионов кальция, в ответ на генерацию потенциалов действия нейронами. Эти астроцитарные кальциевые импульсы вызывают высвобождение глутрансмиттеров, которые связываются с рецепторами, расположенными на пре- и постсинаптических терминалях близлежащих синапсов, модулируя в них синаптическую передачу. Было показано, что нарушения кальциевой сигнализации астроцитов негативно влияют на реализацию функций кратковременной памяти, а увеличение плотности астроцитов, наоборот, улучшает ее эффективность. Длительность астроцитарной синаптической модуляции (от нескольких секунд до нескольких минут) соответствует масштабу времени функционирования кратковременной памяти (максимальная длительность составляет 120 секунд). Накопленные экспериментальные данные, а также соответствие между временными масштабами астроцитарной модуляции синаптической передачи и функционирования кратковременной памяти позволяет предположить, что астроциты могут играть ключевую роль в механизмах кратковременной памяти. Несмотря на существование достаточного количества экспериментальных данных, подтверждающих существование астроцитарной регуляции синаптической передачи, ее роль в механизмах обработки информации и формирования кратковременной памяти до сих пор неясна и остается предметом активных исследований. Поэтому, в данной работе была разработана математическая модель нейрон-астроцитарной сети для уточнения и объяснения биологических механизмов формирования кратковременной памяти.

Модель и результаты

Разработанная модель нейрон-астроцитарной сети состоит из синаптически связанных нейронов Ижикевича [1], двунаправленно взаимодействующих с астроцитами. Для описания динамики внутриклеточной концентрации кальция в астроците используется модель Уллаха [2]. Астроциты друг с другом связаны геп-контактами, проницаемыми для молекул инозитол - 1,4,5-трифосфата (ИТФ) и ионов кальция (Ca^{2+}). Все нейроны сети связаны друг с другом синаптическими связями возбуждающего типа. Топология синаптических связей в сети случайная, подчиняющаяся экспоненциальному распределению. Входной сигнал в виде цифрового изображения преобразовывается в электрический ток и подается в нейронную сеть таким образом, что один пиксель изображения соответствует одному нейрону. Выходной сигнал декодируется как средняя частота генерации потенциалов действия (ПД) нейронами.

Генерация ПД пресинаптическими нейронами индуцирует высвобождение нейромедиатора глутамата в синаптические щели. Связывание глутамата с рецепторами на мембране астроцита приводит к выработке молекул ИТФ. Повышение внутриклеточной концентрации ИТФ приводит к выходу Ca^{2+} из внутриклеточных хранилищ астроцита в его цитоплазму. Генерация Ca^{2+} импульса приводит к высвобождению из астроцита глиопередатчика, воздействие которого на пре- и постсинаптические терминалы близрасположенных синапсов приводит к изменению в них эффективности передачи сигналов. В работе рассматривается экспериментально подтвержденный глиопередатчик – глутамат, действие которого может приводить к усилению глутаматергических синапсов [3]. В модели воспроизводятся следующие эффекты астроцитарной модуляции синаптической передачи: потенцирование синапса посредством генерации медленных возбуждающих постсинаптических токов (SICs) [4]; и mGluR-зависимое гетеросинаптическое облегчение пресинаптического высвобождения нейромедиатора глутамата [5].

В результате проведенного исследования эффективности кратковременной памяти в разработанной модели нейрон-астроцитарной сети было обнаружено, что наибольшая эффективность кратковременной памяти достигается при небольшом размере нейронного ансамбля (16-25 нейронов), взаимодействующего с астроцитом. Выявлено, что блокирование астроцитарной модуляции синаптической передачи (неспособность астроцитов модулировать синаптическую передачу в некоторых синапсах) приводит к ухудшению реализации функций кратковременной памяти в модели нейрон-астроцитарной сети. Максимальная емкость кратковременной памяти сетевой модели составила 7 информационных сигналов, и она определяется длительностью астроцитарных кальциевых импульсов и астроцит-опосредованной модуляции синаптической передачи, и не зависит от числа астроцитов и нейронов в сети. Градуальность амплитуд астроцитарных кальциевых импульсов и астроцитарной модуляции синаптической передачи позволяет модели спайковой нейрон-астроцитарной сети обеспечивать успешное хранение не только бинарных изображений, но и 8-битных (в градациях серого) информационных сигналов.

Данная работа выполнена при поддержке Российского научного фонда грант № 22-12-00216.

- [1] Izhikevich E. // *Ieee transactions on neural networks*. 2003. Vol. 14. P. 1569.
- [2] Ullah G. // *Cell calcium*. 2006. Vol. 39, No. 3. P. 197.
- [3] Fellin T. // *Neuron*. 2004. Vol. 43, No. 5. P. 729.
- [4] Chen N. // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2012. Vol. 109, No. 41. P. E2832.
- [5] Navarrete M. // *Neuron*. 2010. Vol. 68, No. 1. P. 113.

Секция «Фундаментальные и прикладные задачи теории нелинейных колебаний»

Заседание секции проводилось 23 мая 2024 г.
Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.