

Труды XXIX научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»**

Председатель – И.С. Павлов, секретарь – Е.Ю. Линник.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНОГО МЕХАНИЗМА С КРИВОШИПНО-ШАТУННЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ РЕАКТИВНОЙ МАССОЙ

З.Г. Акопян, И.В. Никифорова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Виброударные механизмы с реактивной массой и кривошипно-шатунным возбудителем колебаний находят широкое применение в строительстве, дорожном строительстве и машиностроении [1, 2, 3]. Одной из важнейших задач при их проектировании является исследование динамики системы с учётом периодических ударных взаимодействий между элементами механизма. Вибрационное воздействие, генерируемое такими устройствами, используется для уплотнения грунтов, разрушения материалов и забивки конструктивных элементов. Повышение эффективности этих процессов требует детального численно-аналитического анализа колебательных режимов, включая переходные процессы и устойчивые состояния.

В настоящей работе рассматривается модель виброударного механизма (рис. 1). Крутящий момент от двигателя передается на кривошипный вал 2, при этом ползуны-ударники 5 и 10 совершают в противоположных направлениях возвратно-поступательные движения в направляющих 19 и 20 относительно корпуса 1, периодически вступая во взаимодействие с наковальнями 6 и 11. В результате этого начинают совершать друг относительно друга возвратно-поступательные перемещения в вертикальной плоскости корпус 1, уплотняющая плита 7 и масса 12.

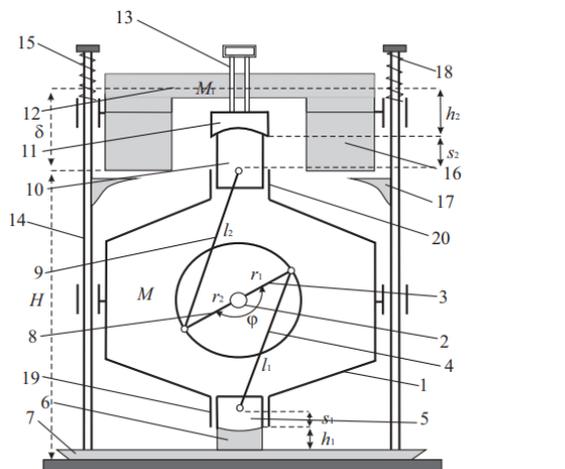


Рис. 1

Особенностью рассматриваемого механизма является наличие условий переключения между режимами движения [4]. В зависимости от соотношения между положением реактивной массы и поршня реализуются различные фазовые состояния системы:

свободное движение без ударов, контакт с ограничительной поверхностью с изменением направления скорости, или проскальзывание по ограничителю.

Уравнения движения механизма в безразмерных координатах и параметрах имеют вид

$$\begin{cases} x_1 > \Delta \\ \ddot{x}_1 = -\beta_1 x_1 - p \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 = \Delta, \dot{x}_1 < 0 \\ \dot{x}_1^+ = -R\dot{x}_1^- \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 > \Delta, x = x_1 - \eta_2 - \lambda - \gamma\mu \cos(\tau - \varphi) \\ \dot{x}_1^+ - \dot{x}^+ = -R(\dot{x}_1^- - \dot{x}^-) - (1 + R)\gamma\mu \sin(\tau - \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^+ + \mu_1 \dot{x}^+ = \dot{x}_1^- + \mu_1 \dot{x}^- \\ x = \varepsilon - \mu \cos \tau + \eta_1, \dot{x}_1^+ < 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}^+ = -R\dot{x}^- + (1 + R)\mu \sin \tau \\ x > \varepsilon - \mu \cos \tau + \eta_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x < x_1 - \lambda - \gamma\mu \cos(\tau - \varphi) - \eta_2, \\ \dot{x} = -p \end{cases}$$

где x_1 – безразмерная координата центра масс реактивной массы (12), x – безразмерная координата центра масс корпуса (1), \dot{x}^+, \dot{x}^- – скорости непосредственно после и до удара соответственно.

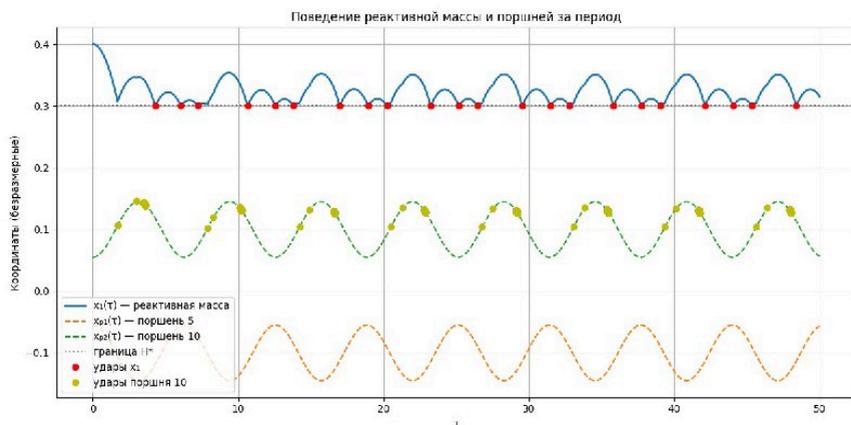
$$\tau = \omega t, x_1 = \frac{y_1}{l}, x = y, p = \frac{g}{l\omega^2}, \beta_1 = \frac{k}{m_1\omega^2}, \Delta = \frac{\delta}{l}, \mu = \frac{r_1}{l},$$

$$\lambda = \frac{m_1}{M + \sum_{i=1}^n m_i} \frac{s_i - s_2}{l}, \gamma = \frac{r_2}{r_1}, \eta_1 = \frac{\varepsilon_1}{l}, \eta_2 = \frac{\varepsilon_2}{l}.$$

Исследование динамики рассматриваемой математической модели для некоторых режимов проведено с помощью метода точечных отображений поверхности Пуанкаре в себя [5].

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования поведения реактивной массы и поршня за период.

На графике представлены безразмерные координаты элементов механизма в зависимости от времени τ . Синим цветом отображена траектория центра масс реактивной массы $x_1(\tau)$, красные точки соответствуют моментам ударов этой массы об ограничитель (элемент 17 на рис. 1). Зелёная пунктирная линия иллюстрирует динамику поршня $10 x_{p2}(\tau)$, а жёлтые точки обозначают удары поршня 10 о реактивную массу. Оранжевая пунктирная кривая соответствует колебаниям поршня 5 $x_{p1}(\tau)$. Горизонтальная пунктирная линия указывает положение ограничителя 17 относительно которого происходит ударное взаимодействие.



- [1] Nikiforova I.V., Metrikin V.S. Dynamics of a Multi-piston Vibropercussion Mechanism Equipped with a Reaction Weight // Communications in Computer and Information Science. 2024. Vol. 1900. P. 72.
- [2] Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. – М.: Физматгиз, 1971, 894 с.
- [3] Блехман И.И., Джанелидзе Ю.Г. Вибрационное перемещение. – М.: Наука, 1964, 410 с.
- [4] Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V., Fevralskikh L.N. // Advanced Structured Materials. 2020. Vol. 137. P. 173.
- [5] Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010, 472 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КОПУЛ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ ФОНДОВОГО РЫНКА

Т.С. Бородина, И.И. Лопатин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В настоящее время модели, основанные на копула-функциях, наиболее востребованы в финансовой сфере, где сформировалась самостоятельная область – количественные финансы как раздел финансовой науки, который использует математическое моделирование, статистический анализ и алгоритмические методы для количественной оценки финансовых рисков, ценообразования активов и разработки инвестиционных стратегий. Помимо экономической сферы, данный математический инструмент используется в физике, сельском хозяйстве, страховании, телекоммуникационных исследованиях и в других областях. В данной работе с использованием копул оцениваются взаимосвязи временных рядов курсов российских акций за 2021–2024 годы, проводится анализ динамики фондового рынка, что позволяет составить рекомендации по формированию портфеля акций на 2025 год.

С вероятностной точки зрения, копула – это функция распределения некоторого случайного вектора $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d)$, каждая компонента которого является равномерно распределенной случайной величиной на отрезке $[0, 1]$. Копула-функция позволяет при заданных законах отдельных компонент случайного вектора связать их некоторой связкой так, чтобы задать определенный уровень корреляции между ними, причем закон распределения отдельных компонент может быть любым. Теорема Склара [1] дает возможность с помощью копул перейти от одномерных распределений нескольких случайных величин к их совместному распределению. Наиболее подробно понятие копула-функции было рассмотрено в работах [2-4]. Приведем ниже определение копулы для случая $d = 2$.

Функция $C(u_1, u_2)$, принимающая значения на $[0, 1]$, называется копулой двух переменных u_1 и u_2 , где $u_1, u_2 \in [0, 1]$, то есть $C(u_1, u_2)$ действует из $[0, 1]^2$ в $[0, 1]$, если она удовлетворяет следующим условиям 1–3:

- 1) $C(u_1, 0) = 0, C(0, u_2) = 0$;
- 2) $C(u_1, 1) = u_1, C(1, u_2) = u_2$;
- 3) $C(a_1, a_2) + C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) \geq 0$ для всех $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in [0, 1]^2$ с $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$.

Для анализа характера зависимости курса акций рассматриваются три типа эталонных копул:

- 1) независимая копула: $C(u_1, u_2)^{ind} = u_1 \cdot u_2$ – соответствует случаю независимости акций;
- 2) комонотонная копула: $C(u_1, u_2)^{co} = \min\{u_1, u_2\}$ – рост одной акции сопровождается ростом другой;
- 3) контрмонотонная копула: $C(u_1, u_2)^{contr} = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ – рост одной акции сопровождается падением другой.

Методика исследования

Методика, реализующая анализ зависимостей цен акций с использованием копул, состоит из следующих последовательных этапов [5, 6].

- 1) Подготовка данных. Исключаются дни, когда биржа не работала (например, выходные и праздники). Нормировка: цены акций приведены к единому масштабу для исключения влияния разницы в абсолютных значениях. Для преобразования в логарифмические доходности используется формула $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, где P_t – цена акции на день t . Это позволяет стабилизировать дисперсию и получить стационарные временные ряды.
- 2) Расчет эмпирической копулы. Для каждой пары активов реализуется расчёт эмпирической копулы на решетке с шагом $\frac{1}{N}$. За оценку значения копула-функции $C(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$, которую будем обозначать как $\hat{C}(\frac{i}{N}, \frac{j}{N})$, принимаем величину $n(i, j)/n$, где n – число наблюдений ($n \gg N$), $n(i, j)$ – число пар выборки $\{x_k, y_k\}_{k=1}^n$, для которых $x_k \leq x_{(\lfloor in/N \rfloor)}$, $y_k \leq y_{(\lfloor jn/N \rfloor)}$, а $x_{(i)}$, $y_{(j)}$ – соответствующие порядковые статистики (вариационные ряды).
- 3) Сравнение с теоретическими копулами. Для каждой пары временных рядов курсов акций на множестве узлов решетки считалось отклонение d значений теоретических копул (независимости, комонотонности и контрмонотонности) до эмпирической копулы как расстояние в метрике L_1 : $d = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| \hat{C}(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) - C(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}) \right|$. В каждом случае среди этих отклонений выбиралось наименьшее.
- 4) Классификация зависимостей. Для каждой пары акций определяется тип зависимости: если минимальное расстояние d соответствует копуле независимости ($C(u_1, u_2)^{ind}$), то говорим о независимости акций; если копуле комонотонности ($C(u_1, u_2)^{co}$), то преобладает комонотонная зависимость; если копуле контрмонотонности ($C(u_1, u_2)^{contr}$) – контрмонотонная.

Для реализации анализа выбрана экосистема Python, обладающая широкими возможностями в обработке данных и статистическом анализе.

Результаты

Исследование основано на ежедневных ценах закрытия акций компаний ключевых секторов российской экономики:

банковский сектор: Т-Банк (Б1), Сбербанк (Б2), ВТБ (Б3);

нефтегазовый сектор: Газпром (Н1), Роснефть (Н2), Сургутнефтегаз (Н3);

телекоммуникации и информационные технологии: МТС (Т1), Ростелеком (Т2), Яндекс (Т3).

Данные получены с сайта финансовой группы «Финам». В табл. 1-4 представлены результаты анализа зависимостей между парами акций из различных секторов экономики за период с 2021 по 2024 годы соответственно с использованием описанной выше методики. В этих таблицах: «+» обозначает комонотонную зависимость; «-» соответствует контрмонотонной зависимости; «0» – независимости. Каждая таблица представляет собой матрицу, где строки и столбцы соответствуют активам, а ячейки содержат символы, указывающие на тип зависимости. Диагональные элементы пусты, так как актив не сравнивается сам с собой.

Табл. 1

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	+	+	0	0	-	+
Б2	+		+	+	+	0	0	-	+
Б3	+	+		+	+	0	0	-	0
Н1	+	+	+		+	0	0	-	+
Н2	+	+	+	+		0	-	-	0
Н3	0	0	0	0	0		0	0	0
Т1	0	0	0	0	-	0		0	0
Т2	-	-	-	-	-	0	0		-
Т3	+	+	0	+	0	0	0	-	

Табл. 2

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	0	0	0	0	0	+
Б2	+		+	0	+	+	0	+	+
Б3	+	+		+	+	+	0	+	0
Н1	0	0	+		+	+	+	+	0
Н2	0	+	+	+		+	+	+	0
Н3	0	+	+	+	+		+	+	0
Т1	0	0	0	+	+	+		+	0
Т2	0	+	+	+	+	+	+		0
Т3	+	+	0	0	0	0	0	0	

Табл. 2

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	0	+	+	+	+	+
Б2	+		+	0	+	+	0	+	+
Б3	+	+		+	+	+	+	+	+
Н1	0	0	+		0	0	+	0	0
Н2	+	+	+	0		+	0	+	+
Н3	+	+	+	0	+		0	+	+
Т1	+	0	+	+	0	0		+	+
Т2	+	+	+	0	+	+	+		+
Т3	+	+	+	0	+	+	+	+	

Табл. 3

	Б1	Б2	Б3	Н1	Н2	Н3	Т1	Т2	Т3
Б1		+	+	+	+	+	+	+	0
Б2	+		+	0	+	+	+	+	0
Б3	+	+		+	+	+	+	+	0
Н1	+	0	+		+	+	+	0	0
Н2	+	+	+	+		+	+	+	0
Н3	+	+	+	+	+		+	+	0
Т1	+	+	+	+	+	+		+	0
Т2	+	+	+	0	+	+	+		+
Т3	0	0	0	0	0	0	0	+	

Результаты анализа зависимостей, представленные в табл. 1-4, выявили динамику изменения взаимосвязей между акциями в период с 2021 по 2024 годы. В 2021 году наблюдалось значительное количество контрмонотонных пар, что указывает на разнонаправленные движения активов и потенциал для диверсификации, а также присутствует достаточное количество независимых пар. С 2022 года произошел заметный сдвиг в сторону комонотонности взаимозависимостей курсов акций на финансовом рынке России. Эти изменения согласуются с экономическими событиями, такими как восстановление рынков и геополитическая нестабильность, что подтверждает чувствительность метода к внешним факторам. Тем самым эффективность диверсификации как средства хеджирования риска при формировании портфеля ценных бумаг в кризисных условиях снижается. Следует отметить, что практически со всеми акциями независимость сохраняли в 2022 году акции Т-банка и Яндекса, в 2024 году – только акции Яндекса.

На основе проведенного анализа для формирования инвестиционного портфеля рекомендуется учитывать следующие моменты. Диверсификация рисков: включение контрмонотонных пар акций позволит снизить общий риск портфеля за счёт их разнонаправленного движения, особенно в условиях рыночного стресса. Осторожность с комонотонными парами: пары с сильной комонотонной зависимостью могут быть полезны для стратегий, ориентированных на синхронный рост, однако их использование увеличивает риски в кризисные периоды. Краткосрочные прогнозы: нецелесообразность прогнозирования динамики курсов акций на срок более одного месяца.

- [1] Sklar A. // Publ. Inst. Statis. Univ. Paris. 1959. No. 8. P. 229.
 [2] Пенिकास Г.И. // Журнал новой экономической ассоциации. 2010. Т. 7. С. 24.
 [3] Фантащини Д. // Прикладная эконометрика. 2011. № 2 (22). С. 98.
 [4] Фантащини Д. // Прикладная эконометрика. 2011. № 3 (23). С. 98.
 [5] Бронштейн Е.М. и др. // Прикладная эконометрика. 2011. № 22 (2). С. 22.
 [6] Бронштейн Е.М. Зинурова А.Р. // Прикладная эконометрика. 2012. № 3 (27). С. 109.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В НАТУРНЫХ УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

А.К. Бритенков^{1, 2)}, Р.В. Травин^{1, 2)}

¹⁾ ИИФ РАН

²⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Гидроакустика играет ключевую роль в изучении мирового Океана, подводной навигации, поисковых работах и решении специальных задач. Особое значение в подобных приложениях имеют низкочастотные гидроакустические излучатели (НЧИ), способные излучать сигналы, распространяющиеся на значительные расстояния с минимальными потерями энергии. В связи с принципом взаимности гидроакустические преобразователи могут работать как в качестве источников, так и приёмников звука. Излучатель находится в режиме приёма сигналов, когда используется в качестве гидрофона, преобразуя звуковое давление отражённых или рассеянных акустических волн в электрические сигналы тока и напряжения. Однако из-за влияния шумов, отражений, многолучевого распространения и нестационарности водной среды, даже при использовании коротких ЛЧМ-сигналов, снимаемые с преобразователя данные требуют обработки для извлечения полезной информации. Одним из распространённых методов обработки данных является аппроксимация. В данной работе рассматриваются варианты применения разложения данных электроакустических измерений отрезками рядов ортогональных функций непрерывного аргумента из числа классических для фильтрации шумов и снижения искажений сигнала 3Д НЧИ, работающего в режиме гидроакустического приёмника.

Гидроакустический излучатель в режиме приёмника

В связи с принципом взаимности и обратимостью пьезоэлектрического преобразования, на котором основана работа рассматриваемого преобразователя, можно установить некоторую связь электроакустических характеристик гидроакустического преобразователя, работающего на приём и на излучение. В качестве преобразователя использовался низкочастотный гидроакустический излучатель со сложной формой излучающей оболочки – 3Д НЧИ с цельнометаллическим корпусом [1]. Для получения частотной характеристики 3Д НЧИ как приёмного устройства [2], выполнялось сравнение развиваемого на выходе преобразователя напряжения при известном звуковом давлении в точке приёма, с напряжением на контрольном гидрофоне с известной чувствительностью:

$$\gamma_{3Д НЧИ} = \gamma_r(f) \frac{U_{3Д НЧИ} L_{3Д НЧИ}}{U_r L_r} \times \frac{U_{НЧИ}^r}{U_{НЧИ}^{3Д НЧИ}}, \quad (1)$$

где $L_{3Д НЧИ}$ – расстояние от приёмника (3Д НЧИ) до контрольного НЧИ, $U_{3Д НЧИ}$ – напряжение на 3Д НЧИ, $U_{НЧИ}^{3Д НЧИ}$ – напряжение сигнала возбуждения на контрольном излучателе при приёме сигналов при помощи 3Д НЧИ, L_r – расстояние от измерительного

гидрофона до контрольного НЧИ, U_r – напряжение на измерительном гидрофоне, $U_{\text{НЧИ}}^r$ – напряжение сигнала возбуждения на контрольном излучателе. Полученная таким образом кривая чувствительности по напряжению определяет эффективность работы преобразователя при работе в приёмном режиме и её связь с чувствительностью по напряжению в режиме излучения (1).

Полученный таким образом график зависимости напряжения на выходе 3D НЧИ от относительных единиц волнового размера kr (являющихся условными значениями частоты), где k – волновое число, r – эквивалентный радиус излучателя, определяемый как радиус сферы объёмом, равным объёму воды, вытесняемому излучателем, даже после некоторого усреднения по реализациям содержит значительное количество точек, существенно выходящих за пределы погрешности измерений (рис. 1).

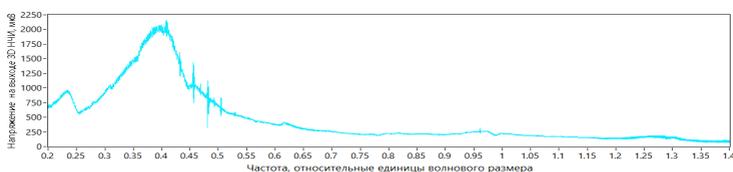


Рис. 1

Обработка данных электроакустических измерений

Как отмечалось выше, при проведении гидроакустических измерений возникают различные виды шумов и искажений, которые могут существенно сказываться на качестве данных. В первую очередь это связано с различными физическими свойствами водной среды, шумами оборудования, распространением низкочастотных звуковых сигналов от других источников и многими другими внешними факторами. В целях повышения качества данных и избавления сигнала от различных искажений для его дальнейшего анализа проведена аппроксимация данных при помощи таких ортогональных функций непрерывного аргумента, как функции Лежандра, Эрмита, Лагерра и Якоби, являющихся решением гипергеометрического дифференциального уравнения вида

$$A(x)y + B(x)y' + \lambda_n y = 0, \quad (2)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ не зависят от n , а λ_n не зависит от x .

Любопытно, что разложение в ортогональный ряд функциями Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (C_k^n) (x - 1)^{n-k} (x + 1)^k, \quad (3)$$

где x – нормированная величина, связывающая модель аппроксимации с физическими данными, n – степень полинома, оказалась эффективнее других вариантов аппроксимации для фильтрации помех и соответственно снижения различных искажений. Вывод представляется отчасти ожидаемым, поскольку полиномы Лежандра инфинитны и определены на отрезке $[-1, 1]$, то описание кривой, ограниченной по оси аргумента и спадающей по краям такого отрезка, вполне логично [3]. Ввиду ортогональности [4]

функций (2), коэффициенты разложения не зависят друг от друга, что снижает влияние случайных отклонений. Результаты аппроксимации напряжения на выходе 3D НЧИ как приёмника функциями Лежандра 40-порядка с помощью пакета программ ADAP, созданного для обработки текстовых последовательностей и массивов данных, приведены на рис. 2.

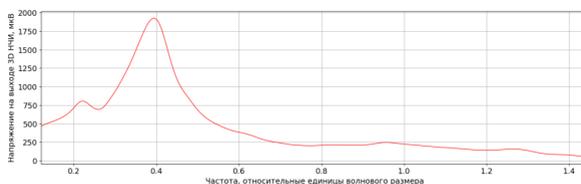


Рис. 2

Преимуществом функции Лежандра по сравнению с аналогичными функциями и методами аппроксимации является коэффициент формы базисной функции i -порядка

$$K_i(n) = \frac{\int_0^T z_i(t)(T-t)^n dt}{\int_0^T z_i(t)t^n dt}, \quad (4)$$

для $n \geq 1$, где n – параметр, определяющий "чувствительность" $K_i(n)$ к характеру $z(t)$ и учитывающей соответствие графика аппроксимируемой функции и первых членов ряда. Кроме того, разложение на различную глубину (длину ряда), позволяет анализировать низкочастотные компоненты, и даёт возможность предварительной оценки тренда кривой. Некоторые варианты аппроксимации данных электроакустических измерений чувствительности преобразователя на приём с применением пакета ADAP приведены на рис. 3, где черным цветом отмечены исходные данные, а красным – аппроксимация полиномами Бернштейна и на рис. 4 при аппроксимации функциями Якоби (до 100 порядка).

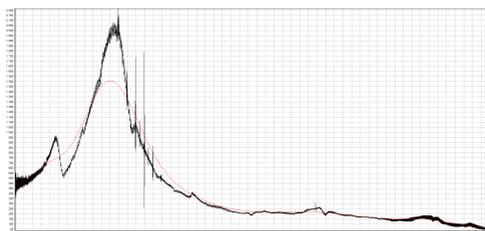


Рис. 3

Как видно из рис. 3, подобное представление данных не подходит для последующей обработки данных, хотя и довольно точно отражает общую тенденцию.

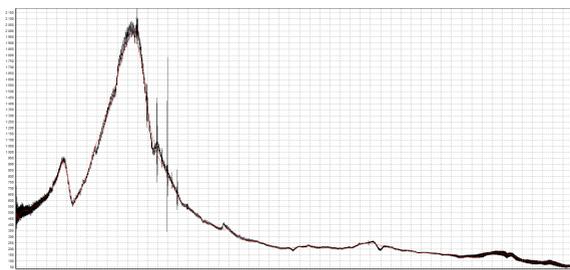


Рис. 4

Аппроксимация функциями Якоби имеет схожий результат с аппроксимацией функциями Лежандра и также может использоваться для обработки данных электроакустических измерений. Однако, в рамках поставленной задачи применение функций Лежандра является более предпочтительным решением из-за меньшей сложности расчёта функций Лежандра и лучшей фильтрацией искажений данных.

Заключение

При проведении электроакустических измерений параметров низкочастотных преобразователей в натуральных условиях неизбежны шумы и искажения, которые необходимо удалять на этапе обработки полученных данных. Несмотря на многообразие методов обработки, в рамках задачи измерения чувствительности 3D НЧИ как приёмника, аппроксимация данных функциями Лежандра показала эффективность для устранения разброса данных при разных реализациях и снижения влияния отражений, многолучёвости и нестационарности среды. Использование подобных методов обработки данных как составной части ОСАМ, может быть полезно и в других приложениях гидроакустики и радиотехники, например, сглаживании экспериментальных данных и решении задач оптимальной фильтрации.

- [1] Боголюбов Б. Н., Кирсанов А. В., Леонов И. И., Смирнов С. А., Фарфель В. А. // Гидроакустика. 2015. Т. 23, № 3. С. 20.
- [2] Костеев Д.А., Бритенков А.К., Земнюков Н.Е., Львов А.В., Салин М.Б. // Научное приборостроение. 2024. Т. 34, № 3. С. 54.
- [3] Дедус Ф.Ф., Куликова Л.И., Махортых С.А., Назипова Н.Н., Панкратов А.Н., Тетуев Р.К. // Доклады Академии наук. 2006. Т. 411, № 5. С. 599.
- [4] Панкратов А.Н. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2121.

ФОРМА ЯНУС-ЧАСТИЦ И ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАТО О ДВОЙНОМ ПУЗЫРЕ

В.Б. Федосеев

ИМХ РАН

Задача о двойном пузыре является вариантом трёхмерной изопериметрической проблемы поиска фигур с минимальной поверхностью. В 19 веке теорема Plateau [1] о двойном пузыре принята истинной без доказательств. Она стала популярной у математиков в конце 20 века. В 1991 ГОДУ доказан двумерный аналог теоремы и сформулирована гипотеза о трёхмерном двойном пузыре. Для случая двух равных объёмов доказательство опубликовано в 2000 году [2]. Позже были опубликованы доказательства общей гипотезы и обобщение на высшие размерности [3]. В общем виде похожие проблемы возникают при описании пространств, заполненных пеной, границами зёрен, магнитными доменами и пр. Решения и доказательства, предложенные математиками, пока ограничены случаем межфазных границ с одинаковыми свойствами.

В настоящем сообщении предложено простое решение, обобщающее задачу на оболочку с разными физическими (упругими) свойствами межфазных границ и переменным периметром линии контакта.

Гетерогенные частицы имеют весьма разнообразную морфологию. Янус конфигурация формируется под действием поверхностных сил и достаточно часто наблюдается при синтезе, или при моделировании методом молекулярной динамики. Как правило, при моделировании ограничиваются простыми конфигурациями. Это можно оправдать малостью вклада поверхностной энергии в полную энергию частиц. Однако допустимость такого упрощения требует обоснования. С этой целью рассмотрим равновесную форму янус-частиц, возникающую при механическом равновесии под действием сил поверхностного натяжения.

Янус конфигурацию можно представить в виде трёх шаровых сегментов, имеющих единое основание (рис. 1).

Фаза α заполняет шаровой сегмент А с радиусом r_A и углом φ_A , фаза β заполняет шаровые сегменты В и АВ с радиусами r_B , r_{AB} и углами φ_B , φ_{AB} соответственно. Шаровые сегменты А и В образуют внешние границы частицы, сегмент АВ – внутреннюю. Сегменты имеют общее основание (рис.), поэтому $r_A \sin \varphi_A = r_B \sin \varphi_B = r_{AB} \sin \varphi_{AB}$. Это позволяет исключить переменные r_B и r_{AB} . Радиус r_A определяется из условий сохранения

$$\begin{aligned} V &= n_1 V_1 + n_2 V_2 = V_A + V_B = V_\alpha + V_\beta, \\ V_f &= n_{1,f} V_1 + n_{2,f} V_2 = \begin{cases} V_A - V_{AB}, & f = \alpha \\ V_B + V_{AB}, & f = \beta \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь V_1, V_2, n_1, n_2 , – мольные объёмы и число молей компонентов, V_A, V_B, V_{AB} – объёмы

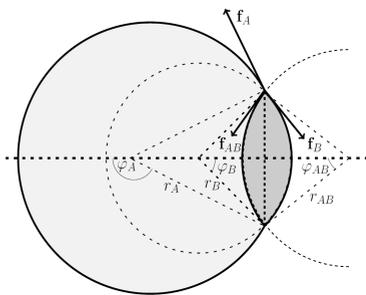


Рис.

шаровых сегментов, V_f – объём фаз, $f = \alpha, \beta$. Полный объём считается постоянным.

Подстановка объёма шаровых сегментов в (1) даёт

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{1}{3}\pi r_A^3((1 - \cos\varphi_A)^2(2 + \cos\varphi_A) + \\
 &\quad + \left(\frac{\sin\varphi_A}{\sin\varphi_B}\right)^3 (1 - \cos\varphi_B)^2(2 + \cos\varphi_B)), \\
 V_f &= \frac{1}{3}\pi r_A^3\left(\left(\frac{\sin\varphi_A}{\sin\varphi_B}\right)^3 (1 - \cos\varphi_B)^2(2 + \cos\varphi_B) \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm \left(\frac{\sin\varphi_A}{\sin\varphi_{AB}}\right)^3 (1 - \cos\varphi_{AB})^2(2 + \cos\varphi_{AB})\right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где r_0 – радиус эквивалентной по объёму сферы.

Отношение r_A/r_0 можно использовать в качестве критерия отклонения формы частиц от сферы. Объёмы фаз удобно выразить через степень расслаивания $\theta = V_\beta/V$, которая становится единственной независимой переменной в (1),(2). Таким образом, объём и форма сегментов зависят от степени расслаивания.

Запишем аналог уравнения Юнга, для условия компенсации сил поверхностного натяжения на стыке фаз (рис. 1)

$$\begin{aligned}
 \sigma_A \cos\varphi_A + \sigma_B \cos\varphi_B + \sigma_{AB} \cos\varphi_{AB} &= 0, \\
 \sigma_A \sin\varphi_A + \sigma_B \sin\varphi_B + \sigma_{AB} \sin\varphi_{AB} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \sin\varphi_{AB} &= -\frac{\sigma_A \sin\varphi_A + \sigma_B \sin\varphi_B}{\sigma_{AB}}, \\
 \cos(\varphi_A - \varphi_B) &= \frac{\sigma_{AB}^2 - \sigma_A^2 - \sigma_B^2}{2\sigma_A \sigma_B}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

или

$$\begin{aligned}
 \varphi_B &= \varphi_A \pm \arccos\left(-\frac{\sigma_{AB}^2 - \sigma_A^2 - \sigma_B^2}{2\sigma_A \sigma_B}\right) - k2\pi, \\
 \varphi_{AB} &= \varphi_A \mp \arccos\left(-\frac{\sigma_B^2 - \sigma_A^2 - \sigma_{AB}^2}{2\sigma_A \sigma_{AB}}\right) - k2\pi, \quad k = 0, 1.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Решение описывает параметры сегментов, соответствующие механическому равновесию. Арккосинусы в (5) можно отождествить с углами между поверхностями соответствующих сегментов. Внешние границы янус-частицы выпуклы, поэтому выбирается решение с противоположными знаками φ_A и φ_B . Решение имеет смысл при $|\sigma_A - \sigma_B| < \sigma_{AB} < \sigma_A + \sigma_B$. За пределами указанного интервала необходимо рассматривать иные конфигурации (ядро-оболочка (core-shell) и др.). Для сегментов, расположенных вершиной вправо (рис. 1), углы имеют отрицательное значение.

В таблице приведены наиболее характерные примеры равновесной конфигурации, соответствующие разным соотношениям поверхностного натяжения и степени расслаивания θ .

Параметрами, описывающими фазовые превращения в частице, являются состав (n_i), физико-химические характеристики компонентов (V_i , φ_f) и уравнения состояния

рассматриваемого раствора. Объёмы сосуществующих фаз выражаются через степень расслаивания θ и условия сохранения вещества (2) и механического равновесия (3).

Таблица

Параметры, форма	Параметры, форма	Параметры, форма
$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_{AB}$ $\varphi = \{170, -70, 50\}$ $\theta = 0.0025$ 	$\sigma_{AB} \cong \sigma_A - \sigma_B $ $\varphi = \{170, -13, 160\}$ $\theta = 0.13$ 	$\sigma_A : \sigma_B : \sigma_{AB} = 1.5 : 2 : 1$ $\varphi = \{170, -39, 95\}$ $\theta = 0.004$ 
$\varphi = \{150, -90, 30\}$ $\theta = 0.07$ 	$\varphi = \{150, -33, 140\}$ $\theta = 0.47$ 	$\varphi = \{150, -59, 75\}$ $\theta = 0.07$ 
$\varphi = \{120, -120, 0\}$ $\theta = 0.5$ 	$\varphi = \{120, -63, 110\}$ $\theta = 0.75$ 	$\varphi = \{120, -89, 44\}$ $\theta = 0.36$ 
$\varphi = \{90, -150, -30\}$ $\theta = 0.9$ 	$\varphi = \{90, -93, 80\}$ $\theta = 0.89$ 	$\varphi = \{90, -119, 15\}$ $\theta = 0.74$ 

Представленные в 1-м столбце таблицы состояния с $\sigma_{AB} = \sigma_A = \sigma_B$ возникают при контакте капель эмульсии или мыльных пузырей и соответствуют задачам, рассматриваемым в [2, 3]. В этом случае $\arccos\left(-\frac{\sigma_{AB}^2 - \sigma_A^2 - \sigma_B^2}{2\sigma_A\sigma_B}\right) = \frac{\pi}{3}$, и решения подтверждают гипотезу Plateau о том, что контактные углы для двойных пузырей равны 120° . Случаю равного объёма фаз соответствует $\varphi_A = \pi \frac{2}{3}$, при этом образуется симметричная частица с плоской межфазной границей.

В общем случае $\varphi_B \neq \varphi_A$ и янус-частицы имеют несферическую форму, параметры которой меняются при изменении соотношения объёмов фаз.

Более общая задача для $\sigma_{AB} \neq \sigma_A \neq \sigma_B$ математиками не рассматривались. В отличие от случая двойного пузыря такие янус-частицы могут иметь сферическую форму на пределе области существования янус конфигурации $\varphi_B = \varphi_A - \pi$. Фаза β может иметь вид симметричной линзы, когда $\varphi_B = -\varphi_{AB}$.

Решения системы уравнений (3) соответствуют минимуму поверхностной энергии при заданном θ . Этот результат не учитывает термодинамическое равновесие и влияния концентрации фаз на их поверхностное натяжение. Учёт концентрационных и размерных зависимостей требует анализа полной энергии частицы, включающей энергию

Гиббса сосуществующих фаз для частиц нанометровых размеров [4]. Это осложняет поиск равновесной конфигурации, но позволяет более адекватно моделировать поведение конкретных химических объектов. Механизмы, качественно объясняющие закономерности перераспределения компонентов между сосуществующими фазами, сформулированы в [5], они позволяют предсказать размерные эффекты при рассмотрении фазовых превращений.

Приведённые в таблице результаты демонстрируют, что кривизна межфазных границ существенно зависит от соотношения объёмов фаз θ . Это необходимо учитывать при моделировании наночастиц. Как правило, в большинстве работ по умолчанию ограничиваются выбором единственной конфигурации, а это может существенно исказить результаты моделирования. Конкуренция янус и core-shell конфигураций способна увеличить множество метастабильных состояний и путей формирования наночастиц в процессе синтеза. Для реальных расслаивающихся растворов проблема осложняется тем, что поверхностные натяжения межфазных границ зависят от состава фаз.

Следует отметить, что проблема двойных мыльных пузырей (как и задача Кельвина о разбиении объёма [6]) формально выходит за рамки изопериметрических задач, так как периметр стыков межфазных границ при минимизации энергии является переменной.

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием ИМХ РАН.

- [1] Plateau, J., *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. – Paris: Gauthier-Villars, 1873, p. 495.
- [2] Hutchings M. et al. // *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.* 2000. Vol. 6, no. 6. P. 45.
- [3] Morgan F. // *Rev. Mod. Phys.* 2007. Vol. 79, no. 3. P. 821.
- [4] Федосеев В.Б. // *ФТТ.* 2024. Т. 66, № 11. С. 1993.
- [5] Шишулин А.В., Федосеев В.Б. // *ЖТФ.* 2020. Т. 90, № 3. С. 358.
- [6] Thomson W. // *Acta Math.* 1887. Vol. 11, no. 2. P. 121.

К ОБСУЖДЕНИЮ ПРОБЛЕМ, СВЯЗАННЫХ С СИЛОЙ РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

А.Е. Китаев

АО «ННПО имени М.В. Фрунзе»

В докладе [1] автором было предложено альтернативное выражение для силы реакции излучения (силы радиационного трения). В случае одномерного движения заряда оно выглядит так:

$$f_0 = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2}{V}. \quad (1)$$

Это выражение заменяет стандартную формулу

$$f = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^2V}{dt^2}, \quad (2)$$

использование которой часто приводит к противоречиям (см. [2]). В качестве примера рассмотрим равноускоренное движение электрона. В этом случае мощность излучения, вычисленная по формуле

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{dV}{dt}\right)^2, \quad (3)$$

не равна нулю, так как не равно нулю ускорение, но радиационное трение нулевое (так как ускорение постоянно, и вторая производная скорости, входящая в выражение (2), равна нулю).

В этом же докладе [1] было найдено решение дифференциального уравнения

$$m \frac{dV}{dt} = F - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2}{V}. \quad (4)$$

Это уравнение представляет собой запись второго закона Ньютона для частицы, на которую действует сила реакции излучения (в предложенной форме) и внешняя сила F (внешняя сила считается постоянной). Уравнение (4) имеет следующее решение, выражающееся через специальную функцию Ламберта $W(x)$ (описание этой функции см. в [3]):

$$V = \frac{2e^2 F}{3c^3 m^2} \frac{\left(W\left(C_0 \exp\left(\frac{3c^3 m}{2e^2} t\right) - 1\right)\right)^2}{W\left(C_0 \exp\left(\frac{3c^3 m}{2e^2} t\right)\right)}. \quad (5)$$

В этой формуле параметр C_0 – константа, которая связана с начальной скоростью.

При движении частицы в ускоряющем поле мы имеем вполне разумные результаты, но в тормозящем поле перед моментом поворота скорость приобретает мнимую добавку. Присутствие такой добавки нуждается в какой-то интерпретации. Оказывается, что для появления подобной комплексификации скорости (и других связанных с ней величин) не обязательно вводить новое выражение (1) для силы реакции излучения.

Можно рассмотреть баланс мощностей для движущейся в тормозящем однородном поле частицы с учетом потерь на излучение:

$$m \frac{dV}{dt} V = -|F|V - \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{dV}{dt} \right)^2. \quad (6)$$

В левой части выражения (6) мы имеем отрицательное (в замедляющем поле до момента остановки) изменение кинетической энергии частицы за единицу времени. Первое слагаемое в правой части – работа силы за единицу времени, также отрицательная до момента остановки частицы (скорость мы считаем положительной). Второе слагаемое – это потеря энергии на излучение (в единицу времени).

Если перенести все слагаемые в одну часть и считать получившееся выражение квадратным уравнением относительно ускорения, можно записать следующее решение для ускорения:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{mV}{2\left(\frac{2e^2}{3c^3}\right)} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\left(\frac{2e^2}{3c^3}\right)|F|}{m^2V}} \right). \quad (7)$$

Видно – при уменьшении скорости (если считать ее действительной) аргумент квадратного корня становится отрицательным, что приводит к появлению мнимой части ускорения.

Выход из этой ситуации видится таким. Предположим, что электрон движется не как точечный объект, а как некое подобие твердого тела. Если из трех углов, определяющих его «внутренние» движения, два считать по какой-то причине «замороженными» (электрон мы будем считать вращающимся вдоль линии своего движения), то часть лагранжиана, связанную с внутренним движением, можно записать так:

$$L_i = \frac{mR^2\dot{\psi}^2}{2} + \frac{eR^2}{2c} H_z \dot{\psi} = \frac{mV_\psi^2}{2} + \frac{eR}{2c} H_z V_\psi. \quad (8)$$

Здесь R – радиус электрона (можно считать его, например, классическим радиусом электрона), H_z – компонента магнитного поля, сонаправленная с обычной скоростью электрона. $V_\psi = R d\psi/dt$ можно считать вращательной скоростью электрона (ψ – угол, изменяющийся при таком вращении электрона). Уравнение внутреннего движения получается следующим (если считать, что магнитное поле зависит лишь от времени):

$$m \frac{dV_\psi}{dt} = -\frac{eR}{2c} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (9)$$

Если это уравнение умножить на мнимую единицу и сложить с уравнением «внешнего» движения, мы получим:

$$m \frac{d(V + iV_\psi)}{dt} = eE_z - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{eR}{2c} \frac{\partial (iH_z)}{\partial t}. \quad (10)$$

Если перейти к потенциалам электромагнитного поля (обычному векторному потенциалу и магнитному векторному), можно записать:

$$m \frac{d(V + iV_\psi)}{dt} = -\frac{e}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{eR}{2c^2} \frac{\partial^2 (iA_{mz})}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Фактически мы используем в таком уравнении движения комплексную комбинацию величин, выражающихся через векторные потенциалы (отметим: можно обойтись и без привлечения векторного магнитного потенциала):

$$\mathbf{A} - i \frac{R}{2c} \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} = \mathbf{A} + i \frac{R}{2} \mathbf{H}. \quad (12)$$

При рассмотрении реакции излучения частицы эти поля будут зависеть от скорости и ускорения частицы (хотя, конечно, часть этих полей можно считать заданными внешними величинами).

Появление ненулевой мнимой части комплексной скорости при таком подходе равносильно появлению вращательной скорости (то есть «раскрутке» электрона).

Перейдем ко второй задаче, которую хотелось бы здесь обсудить - к одномерному трению излучения. Это более простая задача. Отметим, что схожая задача, относящаяся к одномерной теории упругости, рассматривалась в работе [4].

Мы рассмотрим теперь не точечную излучающую частицу, а излучающую бесконечно тонкую плоскость. Пусть имеется плоский дельтаобразный токовый слой, размеры которого по направлениям осей x и y очень велики (эффектами искажения поля на краях слоя мы будем пренебрегать). Вектор плотности тока направлен по одной из поперечных осей, вдоль токового слоя (по оси x). Система однородна в поперечных направлениях (все заряженные частицы имеют в данный момент времени одинаковую скорость). Очевидно, что переменная по времени плотность тока возбуждает электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси z вправо и влево от токовой плоскости (слоя).

Сразу запишем решение для векторного потенциала \mathbf{A} , используя при этом обобщенную функцию Хевисайда $h(x)$ (ступенчатую функцию):

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 2\pi\rho_s \left\{ h(z)x_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) + h(-z)x_0 \left(t + \frac{z}{c} \right) \right\}. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{e}_x – единичный орт, направленный вдоль оси x , $\rho_s = Q/S_0$ – поверхностная плотность заряда слоя (при этом Q – полный заряд слоя, S_0 – площадь слоя). Величина $x_0(t)$ – это не x -координата пространства, а отклонение от начального положения какой-либо из заряженных частиц слоя (при этом $dx_0/dt = V$ – скорость, одинаковая для всех частиц). Электрическое поле в точке $+0$ (направленное по x) следующее:

$$E = -\frac{2\pi Q}{cS_0} V. \quad (14)$$

Сила трения излучения, действующая на весь слой (и возникающая в результате воздействия только что вычисленного поля на заряды слоя), записывается так:

$$F_R = -\frac{2\pi Q^2}{cS_0} V. \quad (15)$$

Коэффициент трения ($-F_R/V$) выглядит так:

$$\gamma = \frac{2\pi Q^2}{cS_0}. \quad (16)$$

Можно записать функцию Лагранжа для всего заряженного слоя, движущегося как единое целое в поле собственного векторного потенциала и внешнего (заданного) скалярного потенциала $U(x_0)$, причем ее удобно записать через интеграл:

$$L_{tot} = \frac{MV^2}{2} - U(x_0) + \frac{V}{c}QA = \frac{MV^2}{2} - U(x_0) + V \frac{2\pi Q^2}{cS_0} \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Формально третье слагаемое (с интегралом) не зависит от «координаты» x_0 , и выражение для силы трения получается, как одно из слагаемых производной по времени от обобщенного импульса

$$P_{tot} = \frac{\partial L_{tot}}{\partial V} = MV + \frac{2\pi Q^2}{cS_0} \int_{t_0}^t V(\tau) d\tau. \quad (18)$$

В результате мы имеем пример описания диссипативной системы с помощью формализма Лагранжа.

- [1] Китаев А.Е. Некоторые модели физических явлений, в которых используется функция Ламберта // Труды XXV конференции по радиофизике. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2021.
- [2] Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. – М.: «Наука», 1987.
- [3] Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
- [4] Кулигин В.А., Кулигина Г.А., Корнева М.В. Взаимодействие с волной как диссипативный процесс URL: <http://314159.ru/kuligin/kuligin3.htm> (дата обращения: 21.05.2025).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОТИВОСТОЯНИЙ В СОВРЕМЕННЫХ СТРАТЕГИЧЕСКИХ ИГРАХ

И.Д. Ларюшин, Е.А. Лаврухина

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Современные стратегические компьютерные игры (СКИ) с их комплексным моделированием динамических конфликтов стали не только глобальным культурным явлением [1, 2], но и мощными виртуальными площадками для исследования сложных взаимодействий множества агентов [3–5]. Моделирование сражений в СКИ представляет значительный научный интерес, так как требует разработки и оптимизации алгоритмов, способных обрабатывать огромные объемы данных о юнитах, среде, ресурсах и решениях в режиме реального времени. Актуальность изучения этих моделей обусловлена их растущей сложностью и стремлением к реалистичности, что ставит перед исследователями фундаментальные задачи в области искусственного интеллекта, теории игр, распределенных систем и вычислительной эффективности [3–8]. Значимость исследования механизмов моделирования сражений в СКИ выходит за рамки индустрии развлечений, находя применение в областях анализа сложных конфликтных ситуаций, разработки систем поддержки принятия решений и создания симуляторов для обучения управлению ресурсами в условиях динамичных изменений и ограничений. Эти виртуальные среды предоставляют уникальную, контролируруемую и воспроизводимую платформу для изучения факторов, влияющих на динамику конфликтов и их разрешение (таких как координация агентов, распределение ресурсов, адаптивное поведение, влияние среды).

Для экспериментального изучения алгоритмов и моделей, лежащих в основе сражений в СКИ, существует ряд специализированных фреймворков. **MicroRTS** [5] представляет собой минималистичную, но функционально полную Java-библиотеку, идеально подходящую для быстрого прототипирования и сравнительного тестирования алгоритмов ИИ (включая планирование, обучение с подкреплением) в условиях строго контролируемой среды. **SMAC** [4] (**StarCraft Multi-Agent Challenge**), основанный на популярной игре StarCraft II, предлагает значительно более сложную и визуально богатую платформу с фокусом на координацию множества агентов, став стандартом для оценки мультиагентных алгоритмов обучения с подкреплением в реалистичных СКИ-условиях.

Для создания симуляционной среды в интересах нашего исследования мы вдохновлялись существующими примерами и взяли из них всё лучшее: минималистичность в духе microRTS позволяет проводить симуляции существенно быстрее, чем на базе Starcraft, а реализация на Python позволяет интегрироваться с современными библиотеками для глубокого обучения с подкреплением, такими как PettingZoo, кроме того, мы реализовали свой стохастизированный поиск пути и несколько других важных функций. Данную среду можно использовать как автобаттлер, в котором сталкиваются две противоборствующие армии, каждый юнит которых действует согласно автоматической политике, а также как среду обучения политики одной из армий против заданной (по умолчанию — автоматической) политики противника.

Сражение при автоматической политике происходит следующим образом: для каждого юнита, не имеющего текущей цели, выбирается цель в пределах радиуса атаки

с наибольшим отношением урона в секунду (УВС) к текущему здоровью. Если у юнита уже есть цель, она не меняется до уничтожения. После выбора целей каждый юнит одновременно наносит урон своей цели, и юниты, у которых закончилось здоровье, уничтожаются. После этого юниты, не атаковавшие в этом ходу из-за отсутствия целей внутри радиуса поражения, делают шаг в направлении центра масс армии противника (при этом конкретное направление шага определяется случайным образом если цель находится на диагонали). Перемещение на одну клетку занимает несколько игровых ходов.

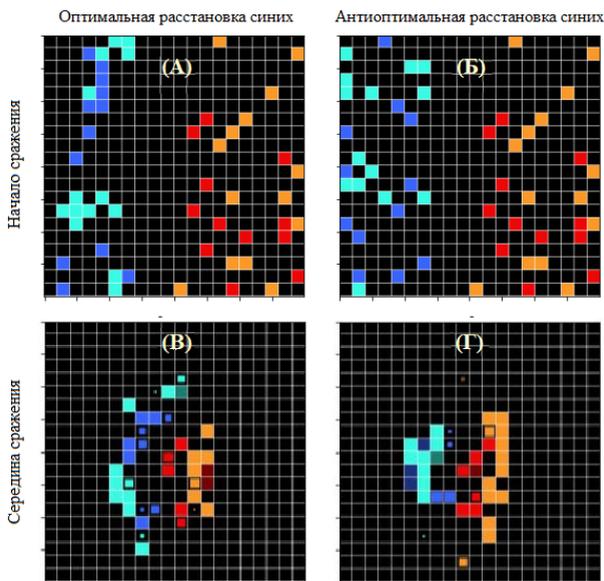


Рис.

На рис. показаны примеры результатов исследований оптимальных и антиоптимальных начальных расстановок синего игрока против заданной расстановки армии красного игрока с использованием генетического алгоритма. Управления обеими армиями автоматические. На рисунке закрашенные клетки соответствуют боевым единицам, более светлые цвета в каждой армии соответствуют более дальнобойному типу юнитов, при частичной потере здоровья размер маркера юнита уменьшается, а в состоянии передвижения цвет маркера слегка затемняется.

Общий принцип работы генетического алгоритма заключается в том, что в случайном множестве объектов, называемом популяцией, определяются элитные примеры. Эти элитные примеры дают потомков, которые должны обладать свойствами, похожими на свойства родителей, но при этом немного отличаться от них. Таким образом

генерируется новое поколение. Для увеличения покрытия множества значений объектов в каждом поколении к популяции дополнительно подмешиваются случайные объекты. После чего процесс отбора повторяется. Критерием качества в данном случае является боевой потенциал выживших, полученный из гамильтониана

$$H(h_1, h_{-1}) = \int_0^{h_1} D_1(h) dh - \int_0^{h_{-1}} D_{-1}(h) dh, \quad (1)$$

где h_i – суммарное здоровье армии, $D_i(h_i)$ – структура огневой мощи, определяемая для неоднородной армии по методике, изложенной в работе [6].

В данном случае генерация осуществлялась последовательным добавлением юнитов на свободные клетки участка поля, выделенного под данную армию (поле поделено пополам и добавлена нейтральная полоса, где размещение запрещено для обоих игроков). Выбор клетки осуществлялся из равномерного распределения. Таким образом генерировалась популяция из 100 расстановок. После этого проводилась симуляция и 10 лучших расстановок по значению финального гамильтониана отбирались для генерации потомков. Потомки генерировались путём случайных перестановок юнитов в пределах 1 клетки. Каждый раз перемещалось по 5 юнитов. Для каждой элитной расстановки генерировалось по 5 потомков. Сама элитная расстановка также попадала в следующее поколение. Оставшиеся 40 расстановок генерировались случайным образом.

Как видно из рисунка, оптимальные и антиоптимальные начальные расстановки не имеют каких-либо выраженных паттернов, однако паттерны могут формироваться ближе к середине сражения (в приведенном примере в оптимальном для синих случае формируется паттерн полуокружения красных синими и наоборот). Подобное свойство эмерджентности наблюдается также во множестве других примеров, которые не вошли в данную статью.

Для организации управления небольшой гетерогенной армией против автоматической политики противника был протестирован алгоритм QMIX [9] с интеграцией математических моделей среды (в соответствии с концепцией Model-Based Reinforcement Learning). В частности, каждый ход производилась оценка гамильтониана (1) и награды при обучении рассчитывались с учетом изменения гамильтониана за предыдущий фрейм. Таким образом, за короткие времена порядка 10 TFLOPs·s удавалось обучить ИИ побеждать с вероятностью 55% при случайных начальных генерациях в сражениях 3 на 3 (при этом при холодной инициализации статистика побед ИИ против автоматической стратегии обычно ниже 1%). Данные результаты могут быть в перспективе существенно улучшены за счет усложнения архитектуры ИИ, тюнинга параметров и использования более мощных вычислительных серверов с современными графическими процессорами.

В целом, в работе представлены результаты исследований оптимальных пространственных структур неоднородных армий в минималистичной клеточной стратегической игре при автоматическом управлении, а также результаты создания прототипа алгоритма для оптимального управления неоднородными группами юнитов в такой среде. Продемонстрирована возможность отсутствия очевидных паттернов в оптимальных и антиоптимальных примерах пространственных структур, полученных с использованием генетических алгоритмов, при этом более явные паттерны могут возникать в

середине сражения под действием автоматического управления. Необходимо отметить, что в компьютерных играх такого типа тактический, стратегический и экономический уровень взаимосвязаны [7], что делает спектр применения подобных оптимизационных моделей крайне обширным.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (грант № 25-21-20077).

- [1] Jossan K.S., Gauthier A., Jenkinson J. // *Computers & Education*. 2021. Vol. 174. P. 104305.
- [2] Riatti P., Thiel A. // *German Journal of Exercise and Sport Research*. 2021. Vol. 52. P. 433.
- [3] Vinyals O. et al // *Nature*. 2019. Vol. 575. P. 350.
- [4] Samvelyan, M. et. al. // *18th International Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems*. 2019. P. 2186.
- [5] Ontañón, S. et. al. // *AI Magazine*. 2018. Vol. 39. P. 75.
- [6] Laryshin I.D. // *IEEE Transactions on Games*. 2023. Vol. 15. P. 148.
- [7] Laryushin I.D., Pashin D.S., Koltchenko Y.A. Ereshko F.I. // *16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD)*. 2023. P. 1.
- [8] Ларюшин И.Д., Колточенко Я.А. // *Автоматика и телемеханика*. 2024. Т. 10. С. 144.
- [9] Rashid T. et. al. // *Journal of Machine Learning Research*. 2020. Vol. 21. P.1.

В марте (рис. 4 и 5) наряду с основными левыми пиками можно наблюдать правые дополнительные. Это изменение связано с повышением влажности вследствие наступления весеннего сезона. Если на протяжении всего исследуемого периода декабрь-февраль наблюдается исключительно инверсия, то в марте по правым пикам видно, что некоторую часть времени поглощение выше на длине волны 2 мм, чем на длине волны 3 мм.

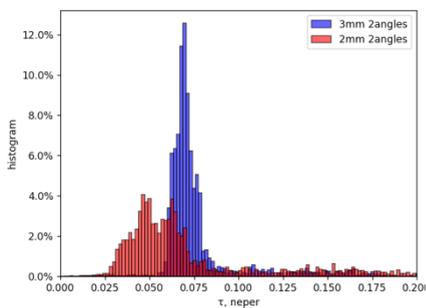


Рис. 2

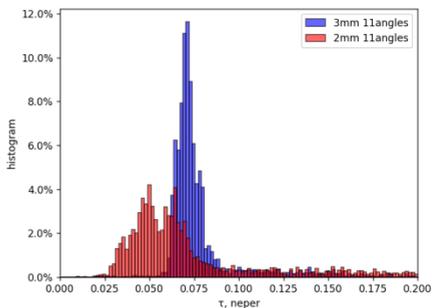


Рис. 3

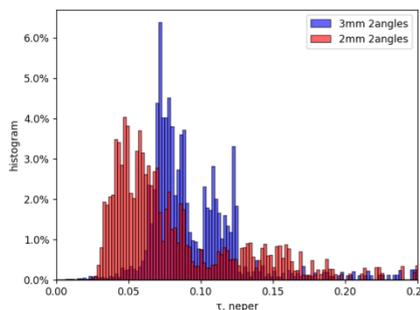


Рис. 4

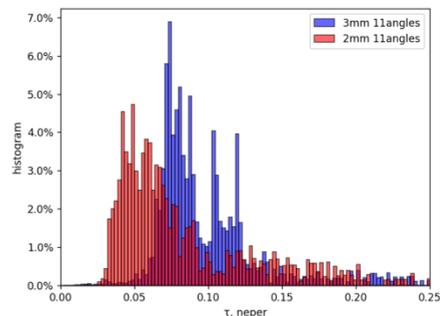


Рис. 5

В результате проведенного анализа показано, что при малых поглощениях метод 11 углов работает лучше, чем метод 2 углов.

Выводы

Поглощение на горе Хулугайше в Восточных Саянах имеет крайне низкий уровень, в зимний период в основном определяемый поглощением в кислороде. Значительную часть времени наблюдается инверсия, поглощение на 2мм меньше, чем на 3мм. При повышении значений осаждаемой воды (PWV) в атмосфере поглощение на 3мм становится больше, чем на 2мм. Данная высокогорная площадка является перспективной для размещения субмиллиметровых телескопов, но требуется дополнительный набор статистики при долговременных измерениях в другие сезоны.

Работа выполнена при поддержке РФФ в рамках гранта № 25-79-20019.

- [1] Хайкин В.Б., Шиховцев А.Ю., Шмагин В.Е., Лебедев М.К., Копылов Е.А., Лукин В.П., Ковадло П.Г. О проекте евразийских субмиллиметровых телескопов (ESMT) и возможности применения адаптивной оптики для улучшения качества субмм изображений // Журнал радиоэлектроники. 2022. № 7.
- [2] Бубукин И.Т., Ракуть И.В., Агафонов М.И., Яблоков А.А., Панкратов А.Л., Горбунова Т.Ю., Горбунов Р.В. Сравнительный анализ условий распространения миллиметровых радиоволн на радиоастрономических полигонах России и Узбекистана // Астрономический журнал. 2021. Т. 98, № 7. С. 581.
- [3] Бубукин И.Т., Агафонов М.И., Ракуть И.В., Панкратов А.Л., Яблоков А.А., Троцкий А.В., Приймак А.С., Горбунов Р.В. Прототип двухволновой радиометрической системы миллиметрового диапазона длин волн для дистанционного зондирования атмосферы и особенности атмосферного поглощения на станции "Кара-Даг" по данным натурных измерений // Известия вузов. Радиофизика. 2019. Т. 62, № 7-8. С. 630.

ФОРМИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ДИСЛОКАЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ ЯЧЕИСТОГО ТИПА С УЧЕТОМ КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕХАНИЗМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДИСЛОКАЦИЙ

Г.Ф. Сарафанов^{1,2)}

¹⁾ ИИФ РАН

²⁾ Институт проблем машиностроения РАН

Исследованы закономерности формирования неоднородных дислокационных структур в рамках модели, учитывающей корреляционное взаимодействие дислокаций. Установлено, что учет корреляционного взаимодействия приводит к развитию неустойчивости однородного состояния в системе. Показано, что при достижении в локальном объеме критических неравновесных условий, соответствующих этой неустойчивости, спонтанно образуется ячеистая дислокационная структура.

На основе сформулированной системы эволюционных уравнений для ансамбля винтовых и краевых дислокаций получены нелинейные уравнения с корреляционным потоком в форме Кана-Хильярда [1, 2]. В указанном приближении уравнения для суммарной плотности $\rho = \rho_+ + \rho_-$ имеют следующий вид [2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{r_d^2}{r_{rel}} \Delta \rho + \frac{nr_d^2}{4\pi\rho_0 r_{rel}} \nabla[\rho(1 + r_d^2 \Delta/2) \nabla \rho] = F(\rho), \quad (1)$$

где r_{rel} – время релаксации дислокационного ансамбля к стационарному состоянию ρ_0 , r_d – радиус экранирования упругого поля дислокаций, который при типичных значениях параметров деформируемого кристалла ($\rho = 10^{10} \text{ см}^{-2}$, $\sigma_e = 3 \cdot 10^{-3} G$, $b = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$), оказывается равным $r_d \approx 10^{-5} \text{ см}$ [2], функция $F(\rho)$ определяет кинетические процессы генерации, аннигиляции и стока дислокаций, $\eta = L^2/\rho_0 r_d$ – управляющий параметр ($L = Vr_{rel}$ — длина свободного пробега, V – дрейфовая скорость дислокаций).

Решение для избыточной плотности $l = \rho_+ - \rho_-$ находится по полученному решению для $\rho(r, t)$. На основе (1) исследована возможность неустойчивости однородного распределения дислокаций ($\rho_+ = \rho_- = \rho_0/2$). Проведенный анализ показал, что критерием неустойчивости однородного распределения дислокаций является выполнение условия

$$\rho_0 > \rho_c = \left(\frac{e}{\pi}\right) \left(\frac{\sigma_e}{Db}\right)^2,$$

где $D = G/2\pi$, G – модуль сдвига.

При превышении этой плотности происходит расслоение однородного распределения дислокаций и формирование ячеистой структуры. При типичных значениях параметров системы ($b = 3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, $\sigma_e/G = 3 \cdot 10^{-4}$, $\nu = 1/3$) критической плотности дислокаций соответствует величина для ансамбля краевых дислокаций, совпадающая по порядку величины с экспериментальным значением плотности дислокаций зарождения дислокационных структур ячеистого типа [3].

Критерий (2), несмотря на свою достаточно простую форму, содержит две структурные величины (плотность дислокаций ρ и напряжение течения σ_e), которые зависят

от совокупности других параметров деформируемого кристалла. При этом, однако, возникает необходимость установления связи ρ и σ_e с этими параметрами.

Например, хорошо известно [3], что возникновение ячеистой структуры коррелирует с величиной энергии дефекта упаковки γ дислокаций. При пластической деформации металлов и сплавов с низкой γ ячеистая структура формируется с трудом, или вообще не возникает. В металлах со средней энергией дефекта упаковки, например, в меди или алюминии, формируется отчетливая ячеистая структура. Как известно, γ является физическим параметром, в значительной степени определяющим строение ядра дислокации и возможность ее поперечного скольжения, а значит и ее подвижность. Зеегер для обоснования критического напряжения сдвига σ_e , связанного с эффектом поперечного скольжения, вывел следующую зависимость:

$$\sigma_e \approx (G - 8\pi/\sqrt{2}\gamma),$$

откуда видна зависимость напряжения течения σ_e от энергии дефекта упаковки γ .

С позиций настоящей работы для периода ячеистой структуры имеем:

$$L_c = 2 \left(\frac{2\pi}{e(e-1)} \right)^{1/2} \rho_0^{-1/2} \approx 8,1 \cdot \rho_0^{-1/2}, \quad (2)$$

что соответствует экспериментально наблюдаемым значениям размера ячеистой структуры для алюминия и никеля [4].

Рассмотрим теперь формирование структуры ячеек. Согласно проведенному исследованию при достижении в кристалле критической степени деформации $\varepsilon_c = \varepsilon(\rho_c)$ в его объеме начинают нарастать флуктуации плотности дислокаций с характерным пространственным масштабом $d = L_c$, формируется ячеистая структура. Рассмотрим наиболее простой тип ячеистой структуры — ромбический:

$$\rho = \rho_0 \{1 + \xi_0 [\sin(k_c x) + \sin k_c (x/2 + y\sqrt{3}/2)]\}, \quad (3)$$

$$I = I_{max} [\cos(k_c x) + \cos k_c (x/2 + y\sqrt{3}/2)], \quad (4)$$

где $\xi_0 \propto \sqrt{\rho - \rho_c}$ — амплитуда неоднородного решения, $I_{max} \propto \xi_0$.

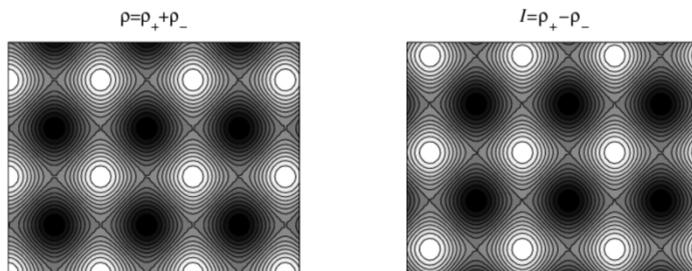


Рис. 1

Можно заметить смещение максимумов и минимумов в их пространственном распределении. Более отчетливо это видно, если графики искомого распределений построить вдоль некоторого направления, например, вдоль оси Ox (рис. 2) при фиксированном значении координаты y . (Заметим, что из-за симметрии получаемых решений выбор направления может быть любым).

Соответствующие зависимости показаны для двух случаев: в момент возникновения ромбической структуры (рис. 2а) при $\rho \approx \rho_c$ и после некоторой деформации (рис. 2б). В первом случае амплитуда модулированной структуры, пропорциональная $\sqrt{\rho - \rho_c}$, мала, а форма периодического решения близка к синусоидальной, поскольку в интервал неустойчивых мод попадает лишь одна гармоника.

По мере отдаления от точки неустойчивости (при увеличении деформации) в спектр неустойчивых мод попадает все большее их количество гармоник. Это приводит к искажению синусоидального профиля – возникает более контрастная структура. Получение такой структуры в рамках исследуемой модели возможно только численными методами, однако, тенденция изменения профиля уже видна на рис. 2б.

Рассмотрим теперь распределение дислокационных зарядов в ячеистой структуре. На основе анализа решений можно заметить, что независимо от степени отклонения от точки неустойчивости $\Delta\rho = \rho - \rho_c$ имеет место разделение дислокационных зарядов (положительных и отрицательных дислокаций) относительно максимума в распределении суммарной плотности дислокаций $\rho = \rho_+ + \rho_-$. Другими словами, можно сказать, что области повышенной плотности дислокаций (стенки ячеек) образованы поляризованными дислокациями разных знаков (рис. 2). Это согласуется с экспериментальными наблюдениями субструктуры в дислокационных ячейках [5].

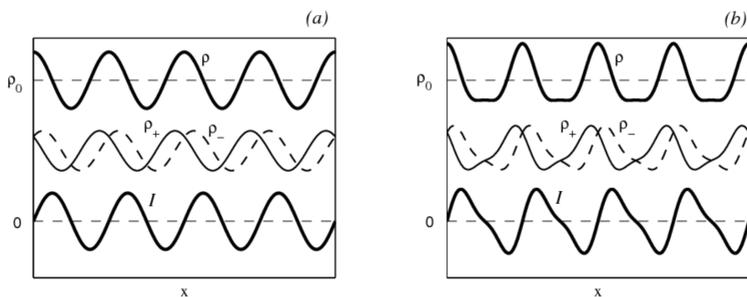


Рис. 2

Подчеркнем, что рассматриваемые здесь ячеистые неориентированные структуры являются сугубо динамическими образованиями и при снятии нагрузки должны релаксировать к однородному распределению. То обстоятельство, что в реальности этого не происходит, очевидно, связано с тем, что на определенном этапе эволюции динамической системы дислокации в областях своей повышенной плотности (в стенках ячеек) формируют равновесные образования (дипольные субграницы), которые при снятии нагрузки сохраняются, образуя субграницы. При этом разориентировка субграниц в ячеистой структуре постепенно увеличивается, что в итоге приводит к формированию мелкозернистой структуры.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20300).

- [1] Sarafanov G.F. // Physics of the solid state. 1997. Vol. 39. no. 9. P. 1403.
- [2] Сарафанов Г.Ф., Перевезенцев В.Н., Рыбин В.В. Коллективные процессы в ансамбле дислокаций и фрагментация металлов при пластической деформации. – Нижний Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2017.
- [3] Kuhlmann-Wilsdorf D. // Mater. Sci.Eng. 1982. Vol. 55, no.1. P.79.
- [4] Staker M.R., Holt D.L. // Acta metall. 1972. Vol. 20, no. 4. P. 569.
- [5] Козлов Э.В. // Вопросы материаловедения. 2002. № 1(29). С. 50.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ СУБГРАНИЦ В ЯЧЕИСТОЙ СТРУКТУРЕ

А.Г. Сарафанова¹⁾, Г.Ф. Сарафанов^{2,3)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

³⁾ Институт проблем машиностроения РАН

В рамках компьютерного моделирования исследован механизм формирования субгранц типа стенок в ячеистой структуре. Избыточная плотность дислокаций в ячейках рассматривается как дисклинационный диполь, что в континуальном приближении имеет одинаковое распределение дислокаций в плоскости их скольжения. Показано, что по мере увеличения мощности дисклинаций дислокации выстраиваются в устойчивую стенку, образуя субграницу на масштабе ячейки.

Теория изменения дефектной структуры металлов в условиях развитой пластической деформации (т.е. теория фрагментации) в настоящее время не является законченной и имеет много «белых» пятен. В частности, не исследованными являются механизмы образования межзеренных границ деформационного происхождения в монокристаллах. Поэтому теоретические исследования в указанном направлении являются весьма актуальными и имеют по сути фундаментальное значение.

В последнее время различают два типа такой неустойчивости [1]. Во-первых, это генерационно-рекомбинационная неустойчивость. Базовой моделью, здесь исторически послужила система реакционно-диффузионных уравнений [2]. Во-вторых, это корреляционная неустойчивость [6]. В рамках этих подходов были систематически описаны ячеистые дислокационные структуры различных видов без разориентировки (т.е. для суммарной плотности дислокаций $\rho = \rho_+ + \rho_-$), однако динамика избыточной плотности дислокаций $I = \rho_+ - \rho_-$ в этих моделях не учитывалась, что не позволяло рассмотреть возникновение разориентировок в ячеистой структуре. Между тем, в работе [6] теория возникновения ячеек позволяет избыточную плотность дислокаций $I(\mathbf{r})$ выразить через $\rho(\mathbf{r})$. В итоге, например, для ромбической структуры имеем также несколько смещенную относительно $\rho(\mathbf{r})$ аналогичную структуру для избыточной плотности

$$I = I_0 [\cos(k_c x) + \cos k_c (x/2 + y\sqrt{3}/2)], \quad (1)$$

где $I_0 \propto \sqrt{\rho - \rho_c}$ – амплитуда неоднородного решения, ρ_c – критическая плотность дислокаций, выше которой однородное распределение дислокаций теряет свою устойчивость, $k_c = 2\pi/d$, d – характерный размер ячеек.

Рассматриваемые здесь ячеистые неразориентированные структуры являются глубоко динамическими образованиями и при снятии нагрузки должны релаксировать к однородному распределению. То обстоятельство, что в реальности этого не происходит, очевидно, связано с тем, что на определенном этапе эволюции динамической системы дислокации в областях своей повышенной избыточной плотности формируют равновесные образования – субграницы, которые при снятии нагрузки сохраняются, образуя "скелет" из субгранц. По мере увеличения деформации разориентировка

субграниц в ячеистой структуре постепенно увеличивается, что в итоге приводит к формированию мелкозернистой структуры.

Для того, чтобы численно проследить эту эволюцию заметим, что возникшие дислокационные субграницы типа стенок можно рассматривать две дисклинации противоположных знаков (рис. 1)

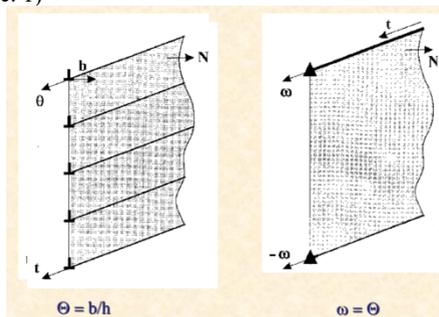


Рис. 1

Система двух дисклинаций противоположного знака аналитически записывается следующим образом [4]

$$I = I_{max} [((y + a)/r_d)K_0(r_+/r_d) - ((y - a)/r_d)K_0(r_-/r_d)], \quad (2)$$

где $I_{max} = \omega/(b\pi r_d)$, $a = d/2$, $r_+ = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}$, $r_- = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$, где ω – мощность дисклинации, r_d – радиус экранирования упругого поля, $K_0(r)$ – функция Макдональда нулевого порядка, ось Ox характеризует направление скольжения дислокаций, а Oy – направление их переползания, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Соответствующий график зависимости $I = I(x, y)$ показан на (рис. 2).

Континуальное рассмотрение, несмотря на строгость получаемых решений, не может дать ответ на ряд вопросов, касающихся структурных механизмов формирования дислокационных образований типа оборванных субграниц. Поэтому представляет интерес рассмотреть процессы образования дислокационных структур этого типа на основе метода компьютерного моделирования динамики дислокационного ансамбля [5].

Модель динамики дислокационного ансамбля строится для плоского кристалла. При ее построении учитываются те же физические процессы, что и при континуальном рассмотрении, проведенным выше. Таким образом, модель является самосогласованной и отражает кинетические процессы, происходящие при эволюции дислокационного ансамбля.

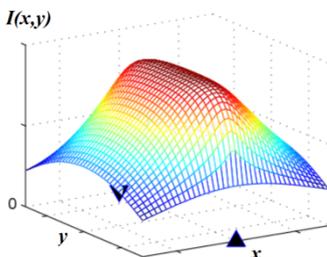


Рис. 2

Важным моментом построения модели является то обстоятельство, что, как было показано ранее, размер упруго-пластической области несущественно влияет на конечные результаты, так как имеет место эффект внутреннего экранирования упругого поля. Исследуемую область будем называть ячейкой.

Каждая дислокация характеризовалась вектором Бюргера $b^{(s)}$, параллельным направлению скольжения дислокаций, координатами $(x^{(s)}, y^{(s)})$ и скоростями $(v_x^{(s)}, v_y^{(s)})$, где $s = 1, \dots, N$, N – число дислокаций.

Вклад инерционных слагаемых в уравнение движения дислокации предполагался малым по сравнению со слагаемыми, обусловленными динамическим трением. При этом уравнение движения для k -компоненты скорости дислокации s в квазивязком приближении записывалось в виде

$$v_k^{(s)} = \frac{dx_k^{(s)}}{dt} = M_{ki} e_{ijm} l_j b_n^{(s)} (\sigma_{mn}^{ext} + \sigma_{mn}^{int}), \quad (3)$$

где σ_{mn}^{ext} – тензор напряжений, обусловленный внешним по отношению к рассматриваемой системе дефектов полем; σ_{mn}^{int} – тензор внутренних напряжений, определяемый как суммарное упругое поле, действующее на рассматриваемую дислокацию со стороны других дефектов; M_{ki} – тензор подвижности, имеющий отличные от нуля диагональные компоненты, которые определяют подвижность дислокации при ее скольжении и переползании; e_{ijm} – единичный антисимметричный тензор, l_j – единичный вектор, касательный к линии дислокации.

В модели предполагается, что пластическая деформация в зерне начинается при достижении в одной из выбранных систем скольжения критического сдвигового напряжения σ_c . Поскольку упругое поле напряжений $\hat{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$ в исследуемой области существенно неоднородно (определяется в каждый момент времени как сумма полей напряжений всех дефектов), то деформация зарождается локально, а затем распространяется на соседние области зерна.

Данный механизм возникновения очагов пластической деформации в модели реализован как процесс пороговой генерации дислокаций. Размножение дислокаций в объеме зерна характеризовалось некоторой скоростью \dot{N} зарождения в плоскостях скольжения пар дислокаций противоположного знака, находящихся друг от друга на

расстоянии $x_c = Db/\sigma_c$ (здесь σ_c – пороговое напряжение срабатывания источника типа Франка-Рида [3], ниже которого дислокации генерируемой пары аннигилируют). Координаты дислокационной пары генерировались в исследуемой области случайным образом по закону равномерного распределения.

При выбранных параметрах кинетики в отсутствие дисклинации и внешней нагрузки размножения дислокаций не происходит – дислокации, возникая, сразу же и аннигилируют вследствие взаимного притяжения. Таким образом, в модели предусмотрен самосогласованный порог генерации, зависящий от распределения упругого поля в теле зерна.

Исследование в рамках модели показало, что на начальном этапе в максимумах избыточной плотности дислокаций образуются зародыши стенок (рис. 3а), которые по мере увеличения дислокаций формируют устойчивую субграницу. Разориентировка этой субграницы монотонно возрастает (рис. 3б).

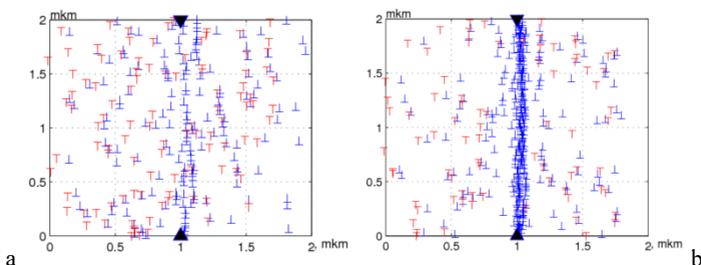


Рис. 3

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20300).

- [1] Малыгин Г.А. // УФН. 1999. Т. 169, вып. 9. С. 979.
- [2] Walgraef D., Aifantis E.C. // J.Appl.Phys. 1985. Vol. 58, no. 2. P 668.
- [3] Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. – М.: Атомиздат, 1972.
- [4] Sarafanov G.F. // Technical physics letters. 2005. Т. 31, № 11. С. 936.
- [5] Sarafanov G.F., Perevezentsev V.N. // Technical physics letters. 2007. Vol. 33, no. 5. P. 400.
- [6] Sarafanov G.F. // Physics of the solid state. 2008. Vol. 50, no. 10. P. 1868.

ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА МЕТАМАТЕРИАЛА, МОДЕЛИРУЕМОГО ЦЕПОЧКОЙ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ “МАССА-В-МАССЕ”

В.В. Зайцев¹⁾, И.С. Павлов^{1,2)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ Институт проблем машиностроения РАН

В настоящее время интенсивно развиваются технологии по созданию *метаматериалов* – веществ со сложно организованной внутренней структурой (микроструктурой) и обладающих уникальными физико-механическими свойствами, которые зачастую даже не встречаются в природе [1]. Периодические структуры, в которых длина акустических волн соизмерима с периодом решетки (шагом чередования включений) [2] называются *фононными кристаллами*. Если же в периодической структуре шаг чередования включений намного меньше длины звуковой волны, то такую среду называют *акустическим метаматериалом* [2]. В нем звуковая волна распространяется так, словно она не чувствует отдельные границы раздела, а вместо этого ощущает некую однородную «метасреду» с необычными упругими свойствами, которые можно настраивать.

Акустические метаматериалы применяются в строительстве [3] для создания звукоизолирующих перегородок, для улучшения качества звука в наушниках и смартфонах, для снижения шума в кабинах самолетов и автомобилях, а также в медицинских устройствах. Преимущество использования акустических метаматериалов в качестве акустических поглотителей объясняется тем, что они имеют более высокую эффективность снижения шума при меньшей массе и меньшей толщине по сравнению с традиционными материалами.

Для описания физико-механических свойств акустических метаматериалов необходимы математические модели, которые позволили бы установить аналитические зависимости между параметрами микромоделей и макрохарактеристиками среды. В частности, широко используются дискретные системы “масса–в массе”, состоящие из плоских частиц [4]. Цель данной работы – изучение дисперсионных свойств модели метаматериала в виде цепочки сферических частиц “масса–в–массе” (рис. 1).

В такой цепочке большая частица с номером $N(j)$ имеет массу M и диаметр d_1 , она обладает шестью степенями свободы: трансляционными $u_1^{(j)}$, $v_1^{(j)}$, $w_1^{(j)}$ и ротационными $\theta_1^{(j)}$, $\psi_1^{(j)}$ и $\varphi_1^{(j)}$. В исходном состоянии центры масс больших частиц расположены на расстоянии a друг от друга. Малые частицы имеют массу m , а все их остальные величины такие же, как и у больших частиц, но с индексом 2. Моменты инерции большой и малой частиц относительно каждой оси, проходящей через их центр масс, равны, соответственно $J_1 = 0,1Md_1^2$ и $J_2 = 0,1md_1^2$.

Взаимодействия больших соседних частиц моделируются упругими пружинами двух типов: горизонтальными с жесткостью K_1 (рис. 1, цепочка сферических частиц “масса–в–массе”, синие и зеленые пружины) и диагональными с жесткостью K_2 (рис. 1, коричневые пружины). Малая частица соединена с большой аналогичными пружинами с жесткостями, соответственно, K_3 и K_4 .

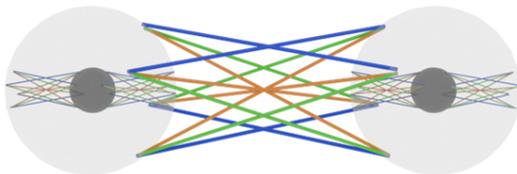


Рис. 1

Уравнения динамики рассматриваемой цепочки в длинноволновом приближении были получены в работе [5]:

$$u_{1tt} - c_1^2(4u_{1xx} - a^2u_{1xxxx}) - h_1^2(u_2 - u_1) = 0, \quad (1a)$$

$$u_{2tt} + 2h_2^2(u_2 - u_1) = 0, \quad (1б)$$

$$\theta_{1tt} - a^2\beta_7^2\left(\theta_{1xx} - \frac{a^2}{4}\theta_{1xxxx}\right) - \frac{1}{2}\beta_8^2(\theta_2 - \theta_1) = 0, \quad (1в)$$

$$\theta_{2tt} + 2\beta_9^2(\theta_2 - \theta_1) = 0.$$

$$v_{1tt} - c_2^2(4(v_{1xx} + \varphi_{1x}) - a^2v_{1xxxx}) - h_3^2(2(v_2 - v_1) + R(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0, \quad (1г)$$

$$v_{2tt} + h_4^2(2(v_2 - v_1) + R(\varphi_1 + \varphi_2)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1tt} - a^2\left(\beta_2^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\right)\varphi_{1xx} + \left(4\beta_1^2 + \frac{1}{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)\right)\varphi_1 + \frac{1}{2}(\beta_2^2 - \beta_3^2)\varphi_2 + \\ + \frac{a^4}{4}(\beta_1^2 + \beta_4^2)\varphi_{1xxxx} + 4\beta_1^2v_{1x} + \frac{\beta_2^2}{R}(v_2 - v_1) = 0, \end{aligned} \quad (1г)$$

$$\varphi_{2tt} + \frac{1}{2}(\beta_6^2 - \beta_5^2)\varphi_1 + \frac{1}{2}(\beta_5^2 + \beta_6^2)\varphi_2 + \frac{\beta_6^2}{R}(v_2 - v_1) = 0,$$

$$w_{1tt} - c_2^2(4(w_{1xx} - \psi_{1x}) - a^2w_{1xxxx}) - h_5^2(2(w_2 - w_1) - R(\psi_1 + \psi_2)) = 0, \quad (1д)$$

$$w_{2tt} + h_4^2(2(w_2 - w_1) - R(\psi_1 + \psi_2)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \psi_{1tt} - a^2\left(\beta_2^2 - \frac{1}{2}\beta_1^2\right)\psi_{1xx} + \left(4\beta_1^2 + \frac{1}{2}(\beta_2^2 + \beta_3^2)\right)\psi_1 + \frac{1}{2}(\beta_2^2 - \beta_3^2)\psi_2 + \\ + \frac{a^4}{4}(\beta_1^2 + \beta_4^2)\psi_{1xxxx} - 4\beta_1^2w_{1x} - \frac{\beta_2^2}{R}(w_2 - w_1) = 0, \end{aligned} \quad (1е)$$

$$\psi_{2tt} + \frac{1}{2}(\beta_6^2 - \beta_5^2)\psi_1 + \frac{1}{2}(\beta_5^2 + \beta_6^2)\psi_2 - \frac{\beta_6^2}{R}(w_2 - w_1) = 0,$$

коэффициенты уравнений (1) зависят от параметров микроструктуры рассматриваемой цепочки, к каковым относятся жесткости пружин и диаметры частиц [5].

С помощью уравнений (1) проведем исследование дисперсионных свойств такого метаматериала в длинноволновом приближении с целью нахождения запрещенных зон частот, размер которых зависит от значений параметров его микроструктуры. Заметим,

что из системы (1) можно выделить 4 связанные подсистемы уравнений: (1а), (1б), (1в,г) и (1д,е), причем подсистемы (1а) и (1б), а также (1в,г) и (1д,е) совпадают с точностью до коэффициентов, поэтому достаточно проанализировать дисперсионные свойства подсистем (1а) и (1б).

В безразмерном виде дисперсионное уравнение подсистемы (1а) имеет вид:

$$\tilde{\omega}^4 - (H_1 + 2H_2 + 4\tilde{k}^2 + C\tilde{k}^4)\tilde{\omega}^2 + 8H_2\tilde{k}^2 + 2CH_2\tilde{k}^4 = 0 \quad (2)$$

Здесь $\tilde{\omega} = \omega / \omega_0$ и $\tilde{k} = k / k_0$ – безразмерные частота и волновое число, где ω_0 – критическая частота, $k_0 = \omega_0 / c_1$ – критическое значение волнового числа,

$$C = \frac{a^2 \omega_0^2}{c_1^2}, \quad H_1 = \frac{h_1^2}{\omega_0^2}, \quad H_2 = \frac{h_2^2}{\omega_0^2} \quad (3)$$

Дисперсионные кривые для продольных волн при различных значениях параметров C, H_1, H_2 приведены на рисунке 2 (а) $H_1=1, H_2=4, C=0.0625$; б) $H_1=1, H_2=8, C=0.015625$).

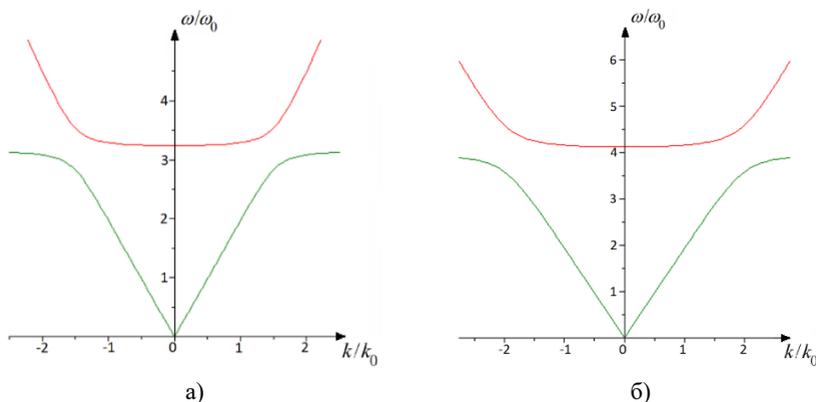


Рис. 2

Из рисунка 2 видно наличие запрещенных зон частот в системе при всех рассмотренных значениях параметров микроструктуры. При изменении коэффициентов дисперсионного уравнения (2) заметно меняется лишь критическая частота оптической ветви $\tilde{\omega} = \sqrt{H_1 + 2H_2}$. Соответственно, сдвигается и полоса непропускания частот.

Дисперсионное уравнение для подсистемы (1в,г) представляет собой определитель четвертого порядка, причем два его коэффициента являются комплексными с ненулевой мнимой частью. Для построения дисперсионных кривых, как и в случае подсистемы (1а), необходимо провести оценки безразмерных коэффициентов.

$$\frac{a^2 \omega_0^2}{c_1^2} = C_1, \quad \frac{c_2^2}{a^2 \omega_0^2} = C_2, \quad k_0 = \frac{\omega_0}{a\beta_1}, \quad A = \frac{a}{R}, \quad \frac{h_i^2}{\omega_0^2} = H_i, \quad \frac{\beta_j^2}{\omega_0^2} = B_j \quad (4)$$

($i=3, 4; j=2 \dots 6$)

Дисперсионные зависимости действительной частоты от волнового числа при двух наборах значений безразмерных параметров (4) представлены на рис. 3 (а) $C_1=1$, $C_2=0,75$, $A=4$, $H_3=0,5$, $H_4=2$, $B_1=0,5$, $B_2=0,5$, $B_3=1/32$, $B_4=1/16$, $B_5=1/4$, $B_6=2$; б) $C_1=1$, $C_2=0,5$, $A=3$, $H_3=1$, $H_4=4$, $B_1=0,5$, $B_2=0,5$, $B_3=1/32$, $B_4=1/16$, $B_5=1/4$, $B_6=2$).

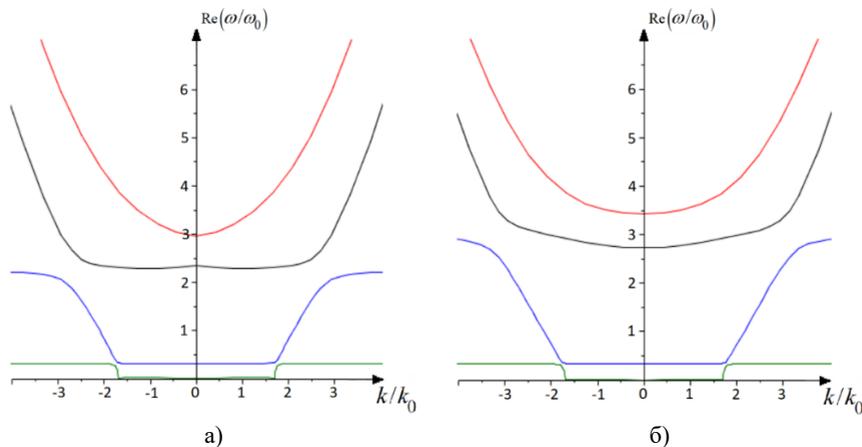


Рис. 3

Из рис. 3а следует, что в системе имеются две полосы непропускания частот: довольно узкая полоса в районе $\text{Re}(\omega / \omega_0) = 0,3$ и более широкая около $\text{Re}(\omega / \omega_0) = 2,1$. При уменьшении параметров C_2 и $A=a/R$ и увеличении параметра H_3 широкая полоса непропускания сохраняется в области длинных волн (рис. 3б). Например, если рассматривать лишь диапазон $|k / k_0| < 2$, то во втором случае полоса непропускания в районе $\text{Re}(\omega / \omega_0) = 2,1$ более широкая, чем в первом случае.

Работа выполнена при поддержке грантом Российского научного фонда (проект № 25-29-00675).

- [1] Ерофеев В.И., Павлов И.С. // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 4. С. 5.
- [2] Ming-Hui Lu and etc. // Materials Today. 2009. Vol. 12, no. 12. P. 34.
- [3] Erofeev V.I. and etc. // Magazine of Civil Engineering. 2023. Vol. 121(5). 12103.
- [4] Ерофеев В.И. и др. // Акустический журнал. 2022. Т. 68, № 5. С. 475.
- [5] Зайцев В.В., Павлов И.С. // Труды XXVIII научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2024. С. 453.

Секция «Математическое моделирование
процессов и систем»

Заседание секции проводилось 27 мая 2025 г.
Председатель – И.С. Павлов, секретарь – Е.Ю. Линник.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.