

**СЕКЦИЯ
«ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»**

Председатель – Ал.В. Калинин, секретарь – А.А. Тюхтина.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ОПТОЭЛЕКТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Р.С. Бирюков, Е.Ю. Кадина, А.П. Комарова

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Рассмотрим математическую модель процесса самовозбуждения оптоэлектронного генератора, вызванного различными шумами в элементах его схемы. Будем считать, что оптоэлектронный генератор приближенно можно описать схемой, изображенной на рис. 1.

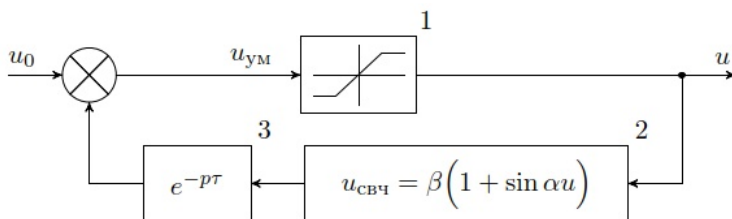


Рис. 1

Блок «1» соответствует усилению мощности и описывается функцией насыщения:

$$u = \text{sat } u_{\text{ym}}, \quad \text{sat } u_{\text{ym}} = \begin{cases} u_{\text{ym}}, & |u_{\text{ym}}| \leq 1, \\ \text{sign } u_{\text{ym}}, & |u_{\text{ym}}| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Блоки «2» и «3» описывают изменение сигнала при прохождении по оптоволоконному кабелю и, соответственно, возникающую при этом временную задержку, т.е. на выходе блока «3» будет сигнал $u_{\text{свч}}(t - \tau)$. Безразмерные параметры $\alpha = \pi U_0 / U_\pi$ и $\beta = \kappa K_p / 2$ отвечают за физические характеристики оптоволоконного кабеля.

Необходимо определить условия возникновения автоколебаний в рассматриваемом оптоэлектронном генераторе, а также установить соответствующие этим режимам значения параметров.

Положим $u_0 = 0$ и заменим блок запаздывания «3» его аппроксимацией Паде:

$$e^{-p\tau} = \frac{6 - 2p\tau}{6 + 4p\tau + \tau^2 p^2}, \quad (2)$$

что равносильно введению в систему фильтра низких частот. В результате получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{v} + 4\dot{v} + 6v = 6F(v) - 2\dot{v}F'(v), \quad F(v) = \beta(1 + \sin(\alpha \text{sat } v)), \quad (3)$$

здесь для краткости введено обозначение $v = u_{\text{ym}}(\tau t)$. Таким образом, наличие автоколебаний в оптоэлектронном генераторе соответствует существованию периодических решений уравнения (3). Для упрощения дальнейших вычислений будем использовать в качестве функции насыщения гладкую функцию $u = \text{th } v$.

В этом случае состояния равновесия системы (3) расположены на оси абсцисс, их координаты v^* находятся из решения уравнения $v^* = F(v^*)$. При изменении

параметров α и β число состояний равновесия меняется. Ограничимся рассмотрением только тех значений параметров, при которых в системе существует единственное состояние равновесие. Для этого найдем решение системы уравнений

$$v^* = F(v^*), \quad F'(v) = 1, \quad (4)$$

что равносильно тому, что график функции $F(v)$ имеет точку касания с биссектрисой первого квадранта. Соответствующая кривая на плоскости параметров показана на рис. 2 пунктиром. Для всех значений параметров, отвечающих точкам, расположенным ниже этой кривой, система (3) имеет единственное состояние равновесия, которое при $F'(v^*) < -(5 + \sqrt{27})$ есть устойчивый узел, при $-(5 + \sqrt{27}) < F'(v^*) < -2$ — устойчивый, а при $F'(v) > -2$ — неустойчивый фокус. Кривая Γ_0 , соответствующая условию $F'(v^*) = -2$, изображена на рис. 2 сплошной линией; она отвечает наличию в системе сложного фокуса. Участок этой кривой, начиная от точки A и ниже, обозначен через Γ_0^- и может быть параметризован следующим образом:

$$\Gamma_0^- = \left\{ \left(\alpha, \beta = \frac{x^-(\alpha)}{1 + \sin(\alpha \operatorname{th} x^-(\alpha))} \right) : \alpha \geq \alpha_{\min} \approx 4.073689 \right\}, \quad (5)$$

где

$$x^-(\alpha) = \operatorname{arth} \frac{1}{\alpha} \left(c_0 + \frac{4c_0^2}{3} \frac{1 + \sin c_0}{c_0 - \cos c_0} \frac{1}{\alpha^2} + o(\alpha^{-2}) \right), \quad (6)$$

$$c_0 \approx 2.8084.$$

Через Γ_0^+ обозначен участок кривой, начиная от точки A и выше, его параметризация имеет вид:

$$\Gamma_0^+ = \left\{ \left(\alpha, \beta = \frac{x^+(\alpha)}{1 + \sin(\alpha \operatorname{th} x^+(\alpha))} \right) : \alpha_{\min} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad (7)$$

здесь

$$x^+(\alpha) = y(\alpha) - \frac{1}{2} W_{-1} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\alpha \cos \alpha} e^{y(\alpha)} \right) + \dots, \quad (8)$$

$$y(\alpha) = \frac{(1 + \sin \alpha)(\alpha - \cos \alpha)}{\alpha \cos^2 \alpha},$$

и $W_{-1}(z)$ — дополнительная ветвь функции Ламберта.

На кривой $\Gamma_0 = \Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$ происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Для ее анализа вычислим ляпуновские величины L_1 и L_2 , приводя систему (3) к нормальной форме с точностью до членов 5-го порядка включительно:

$$L_1 = -\frac{1}{24}(f_2^2 + 3f_3), \quad (9)$$

$$L_2 = -\frac{1}{5184}(10f_2^4 + 43f_2^2 f_3 + 39f_2 f_3^2 + 9f_3^2 + 27f_5),$$

для краткости введено обозначение $f_k = F^{(k)}(v^*)$. На кривой Γ_0 параметр $L_2 \neq 0$, а L_1 меняет знак: на участке Γ_0^- параметр $L_1 < 0$, а на Γ_0^+ — $L_1 > 0$. В точке B величина

$L_1 = 0$, но смены знака не происходит. Таким образом, на кривой Γ_0^- происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, т.е. при пересечении кривой Γ_0^- из области I в область III состояние равновесия становится неустойчивым фокусом и из него рождается устойчивый предельный цикл. На кривой Γ_0^+ происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа: при пересечении кривой Γ_0^+ из области III в область II состояние равновесия становится устойчивым фокусом и из него рождается неустойчивый предельный цикл. Кривая γ , разделяющая области I и II, соответствует бифуркации слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов.

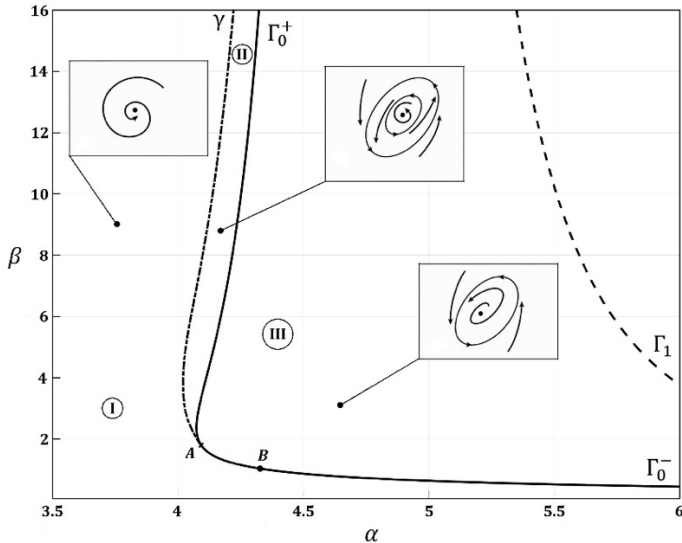


Рис. 2

Окончательно заключаем, что в оптоэлектронном генераторе, модель которого задаётся системой (3), автоколебательный режим реализуется для параметров, принадлежащих области III на бифуркационной диаграмме.

- [1] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. – М.: Изд-во МЦНМО, 2005, 415 с.
- [2] Talla Mbe J.H., Talla A.F., Goune Chengui G.R., Coillet A., Larger L., Wofo P. // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. P. 012902.
- [3] Grachev V.A., Biryukov V.V., Biryukov R.S. // Proc. SPIE 13738, Optical Technologies for Telecommunications 2024, 137380K (14 Aug 2025).
<https://doi.org/10.1117/12.3067504>

ЭФФЕКТ МАГНУСА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАКРУЧЕННОГО МЯЧА

В.Г. Кузьмин, В.Н. Филиппов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Вращение тела, движущегося в потоке газа или жидкости, может существенно влиять на силы, действующие на него со стороны газа (жидкости). В частности, на осесимметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии, действует сила, направленная перпендикулярно скорости тела. Воздействие такой силы на траекторию движения тела называется эффектом Магнуса. Открыт немецким ученым Г. Магнусом в 1852 г. как результат наблюдения значительного отклонения траектории пушечных ядер от баллистической. Математическое обоснование эффекта Магнуса проще всего вывести для цилиндра (достаточно длинного), вращающегося вокруг своей оси и помещенного в поток газа или жидкости, направленный перпендикулярно оси цилиндра. Вследствие вязкости среды (вязкость, или внутренне трение – свойство жидкостей и газов оказывать сопротивление перемещению одной части относительно другой) цилиндр увлекает ее в направлении своего вращения. Поэтому там, где направление скорости поверхности цилиндра совпадает с направлением набегающего потока, скорость потока оказывается больше, чем на противоположной стороне.

Для содержательного изложения обратимся к одному из основных уравнений гидродинамики – уравнению Бернулли (для краткости говорим только о жидкости, имея при этом в виду как жидкости, так и газы). Уравнение Бернулли установившегося движения несжимаемой идеальной жидкости в поле силы тяжести имеет вид

$$gh + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C,$$

где v – скорость жидкости, ρ – ее плотность, p – давление в ней, h – высота жидкой частицы над горизонтальной плоскостью, g – ускорение свободного падения, C – величина, постоянная на каждой линии тока, но в общем случае изменяющая свое значение при переходе от одной линии тока к другой. Установлено швейцарским математиком Д. Бернулли в 1738 г.; выражает закон сохранения механической энергии для движущейся жидкости и устанавливает зависимость между v , p , h . Из уравнения Бернулли следует, что давление среды будет меньше там, где больше скорость потока. В результате возникает сила (часто называется подъемной), действующая на цилиндр, направленная в сторону меньшего давления. Величина подъемной силы определяется теоремой Жуковского. Сформулирована российским ученым в области механики, основоположником аэродинамики Н.Е. Жуковским в 1904 г. Теорема утверждает: если установившийся плоскопараллельный потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает бесконечно длинный цилиндр заданного профиля перпендикулярно его образующей, на участок цилиндра, имеющий вдоль образующей длину равную единице, действует подъемная сила F , равная произведению плотности среды на скорость v потока на бесконечности и на циркуляцию Γ скорости по замкнутому контуру, охватывающему обтекаемый цилиндр, т.е.

$$F = \rho v \Gamma.$$

Направление подъемной силы получается из направления вектора скорости потока поворотом его на прямой угол против направления циркуляции. Циркуляция скорости является мерой завихренности течения и равна

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}_\tau ds = \oint (v_x dx + v_y dy + v_z dz),$$

где криволинейный интеграл берется по замкнутой кривой L , $\mathbf{v}_\tau$ – проекция скорости на касательную к этой кривой, ds – элемент длины кривой, v_x , v_y , v_z – проекции скорости на координатные оси.

Вихревое движение жидкости или газа – такое движение, при котором малые элементы перемещаются не только поступательно, но и вращаются около некоторой мгновенной оси. Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, проведенному внутри жидкости (контур будем рассматривать как составленный из находящихся на нем частиц жидкости), равна нулю, то течение жидкости будет безвихревым, потенциальным. В движущейся среде, лишенной вязкости (идеальная жидкость), вихри не могли бы самопроизвольно появиться. В средах с малой вязкостью (вода, воздух) вихревые движения возникают в слое вблизи обтекаемого тела, в т.н. пограничном слое. Аналогичный эффект возникает и при набегании потока на вращающийся шар. Но теорема Жуковского «не работает»: шар не имеет «длины». Справедлив закон Стокса, определяющий силу сопротивления, испытываемую твердым шаром при его поступательном движении в вязкой жидкости:

$$F = 6\pi r \eta v,$$

где η – коэффициент динамической вязкости жидкости, r – радиус шара, v – его скорость. Установлен британским физиком и математиком Дж. Г. Стоксом в 1851 г. Следует отметить, что закон Стокса справедлив лишь при малых значениях чисел Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta},$$

где ρ – плотность жидкости, l – характерный линейный размер тела. Число Рейнольдса является мерой отношения сил инерции, действующих в потоке, к силам вязкости. При малых числах Рейнольдса стационарное обтекание устойчиво. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при увеличении числа Рейнольдса, начиная с критического, стационарное обтекание твердых тел вообще невозможно. При числах Рейнольдса, значительно превышающих критическое значение, при обтекании твердого тела потоком жидкости позади тела образуется длинная область турбулентного движения (малые элементы объема совершают неустановившиеся движения по сложным траекториям). В этих течениях образуются многочисленные вихри, вследствие чего такие характеристики малых элементов, как скорость, температура, давление, плотность испытывают хаотичные, случайные изменения от точки к точке и во времени. Этим турбулентное течение отличается от ламинарного. Ламинарное течение – это упорядоченное течение, при котором жидкость перемещается как бы слоями, параллельно направлению течения. Такое движение наблюдается или у очень вязких жидкостей, или при течениях с малыми скоростями, а также при медленном обтекании жидкостью тел

малых размеров. С увеличением скорости движения (растет число Рейнольдса) в некоторый момент ламинарное течение переходит в турбулентное. Большинство течений жидкостей и газов турбулентно как в природе (движение воздуха в земной атмосфере, воды в реках и морях, газа в атмосфере Солнца и звезд и т.п.), так и в технических устройствах (в трубах, каналах, в следах за твердыми телами и т.п.). Обтекание вращающейся сферы потоком несжимаемой жидкости (газа) при малых числах Рейнольдса исследовано в [1–3]. Результаты [1] послужили основой для последующих теоретических и численных исследований аэродинамики вращающейся среды. Непосредственно к нашей теме относятся исследования [4–7]: аэродинамика мяча для игры в гольф [4], аэродинамика спортивных мячей [5], эффект от кручения на полете бейсбольного мяча [6]. Особняком стоит работа [7] о движении мяча по спирали. В ней проведен анализ работ [1, 2, 4, 5, 6] и проведенных авторами изящных и убедительных экспериментов. Ярко выраженную спиралевидность траектории вращающегося мяча можно ожидать (при соответствующей силе удара и начальной закрученности) в настольном теннисе, гольфе, большом теннисе. В футболе траектория мяча примет существенную спиралевидность тогда, когда мяч пролетает достаточно большое расстояние (порядка 30 м) при сильном ударе и значительной закрученности. Футбольные болельщики со стажем помнят невероятную траекторию мяча после штрафного удара (завершившегося голом) футболиста сборной Бразилии Роберто Карлоса по воротам сборной Франции 3 июня 1997 г. (видеозапись доступна). Кстати, зафиксированная максимальная скорость мяча после удара Роберто Карлоса равна 198 км/час.

- [1] Rubinow S.I., Keller J.B. // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 11. P. 3.
- [2] Barkla H.M., Auchterloniet L.J. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 47. P. 437.
- [3] Наумов В.А., Соломенко А.Д., Яценко В.П. // Инж.-физ. журн. 1993. Т. 65, № 3. С. 287.
- [4] Davies J.M. // J. Appl. Phys. 1949. Vol. 20. P. 821.
- [5] Metha D. // Annu. Rev. Fluid Mech. 1985. Vol. 17. P. 151.
- [6] Nathan A.M. // Am. J.Phys. 2008. Vol 76. P. 119.
- [7] Dupex G., Goff A.L., Quere D., Clanet C. // New J. Phys. 2010. Vol. 12. 093004.

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ

С.В. Гонченко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Как мы определяем, гомоклинический резонанс — это бифуркационное явление, при котором возникновение гомоклинического касания сопровождается образованием в окрестности U гомоклинической орбиты кластера из бесконечного множества устойчивых (эллиптических) траекторий всех последовательных периодов $k, k + 1, \dots$ начиная с некоторого натурального k .

Такое явление бифуркационной коразмерности 2 было открыто в наших работах [1, 2] в случае сохраняющих площадь отображений с квадратичными гомоклиническими касаниями. В этом докладе мы обсуждаем гомоклинический резонанс как явление коразмерности 1 в случае двумерных обратимых отображений с симметричными кубическими гомоклиническими касаниями. Среди новых результатов для теории динамических систем выделим следующие: 1) получены эффективно проверяемые условия, при которых двумерные обратимые отображения имеют бесконечно много КАМ-устойчивых эллиптических точек; с периодами $k, k + 1, \dots$; 2) все точки сосредоточены в одной области: они пробегают за период вдоль окрестности U гомоклинической орбиты; 3) это явление имеет бифуркационную коразмерность 1.

Следуя подходу Пуанкаре, который объединил гамильтонову динамику и небесную механику [3], мы можем предложить некоторый механизм, ответственный за возникновение кольцевых кластеров, удерживающих большое число малых космических тел.

Как нам кажется, рассматриваемая математическая задача имеет прямое отношение к классической задаче Пуанкаре — ограниченной плоской круговой задаче трех тел [3]. Применительно к этой задаче из небесной механики, эллиптическая точка может быть сопоставлена с каким-либо космическим, а окрестность U — с некоторой кольцевой областью пространства, вдоль которой эти тела двигаются. Так как таких тел много, и они имеют разные периоды обхода вдоль U , то они разбредаются по всему кольцу, делая его "телескопически видимым". Напомним, что Пуанкаре рассмотрел пример гамильтоновой системы с двумя степенями свободы с гамильтонианом следующего вида ([3], с.405) $H(x_1, x_2, y_1, y_2) = y_1 - y_2^2 - 2\mu \sin^2\left(\frac{x_2}{2}\right) - \mu \epsilon \cos x_1 \sin x_2$, x_i, y_i — координаты и импульсы, при этом координаты x_i являются угловыми переменными с периодом 2π . Соответствующая гамильтонова система в силу того, что y_1 — входит в гамильтониан линейно, легко записывается в форме такой двумерной неавтономной системы

$$\dot{x} = 2y, \dot{y} = \mu \sin x + \mu \epsilon \cos x \cos t. \quad (1)$$

При $\epsilon = 0$ система (1) становится двумерной автономной консервативной системой вида $\dot{x} = 2y, \dot{y} = 2\mu \sin x$, ее фазовый портрет на цилиндре показан на рис.1а. Заметим, что система (1) является еще и обратимой, т.е., инвариантной относительно обращения времени и инволюции — замены координат h , такой, что $h^2 = Id$. В частности, как легко убедиться, у системы (1) есть инволюция $R_y: x \rightarrow x, y \rightarrow -y$. Интересно, что если

в системе (1) сделать сдвиг по времени, заменить t на $t - \frac{\pi}{2}$, то она примет вид $\dot{x} = 2y, \dot{y} = \mu \sin x + \mu \varepsilon \cos x \sin t$ и проявится еще одна инволюция $R_x: x \rightarrow -x \pmod{2\pi}, y \rightarrow y$.

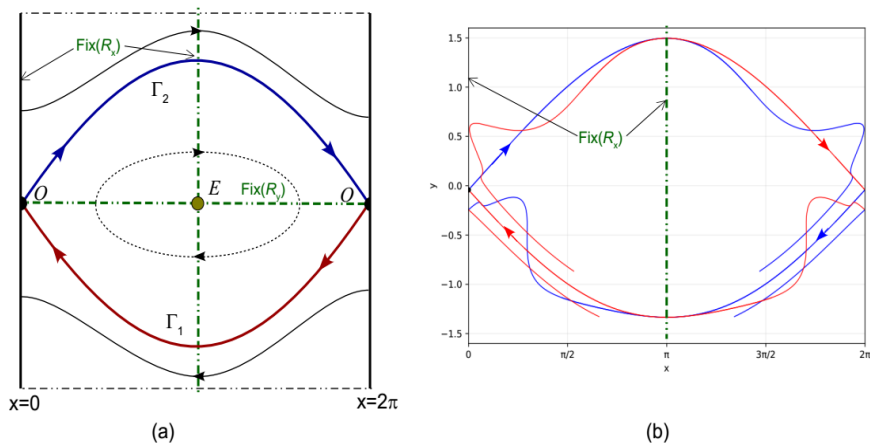


Рис. 1

На рис. 1 (a) Фазовый портрет системы (1) при $\varepsilon = 0$. (b) Иллюстрация кубических касаний в отображении Пуанкаре для систем $\dot{x} = 2y, \dot{y} = \mu \sin x + p \cos x \sin t + q \sin 2t$. Эти касания симметричны относительно инволюции R_x , но они разные (сравни с касаниями на рис. 2).

В свете настоящей работы система (1) интересна тем, что в ней могут появляться симметричные кубические гомоклинические касания, порождающие явление гомоклинического резонанса. Пример, когда одновременно возникают два разных таких касания, показан на рис. 1b. Ниже мы опишем основные бифуркации симметричных кубических касаний в случае аналитических обратимых двумерных отображений f_0 со следующими свойствами: А) f_0 имеет седловую неподвижную точку O с мультипликаторами λ и λ^{-1} , где $0 < \lambda < 1$. В) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O)$ седла O имеют кубическое касание в точках траектории Γ_0 . С) траектория Γ_0 симметрична, т.е. существует ее точка $M \in \Gamma_0$, принадлежащая линии $\text{Fix}(R)$ неподвижных точек инволюции R ; D) $W^s(O)$ и $W^u(O)$ пересекают трансверсально $\text{Fix}(R)$ в точке M . Эти условия выделяют кубические гомоклинические касания двух типов, см. рис. 2. В настоящей работе мы найдем условия гомоклинического резонанса в случае обратимых сохраняющих площадь аналитических отображений с кубическими гомоклиническими касаниями первого и второго типа.

В основе нашего рассмотрения лежит изучение бифуркаций однообходных периодических траекторий диффеоморфизмов f_0 , что эквивалентно изучению бифуркаций неподвижных точек отображений первого возвращения T_k вблизи гомоклинической

траектории Γ_0 Мы показываем, что в момент гомоклинического касания все отображения T_k асимптотически одинаковы.

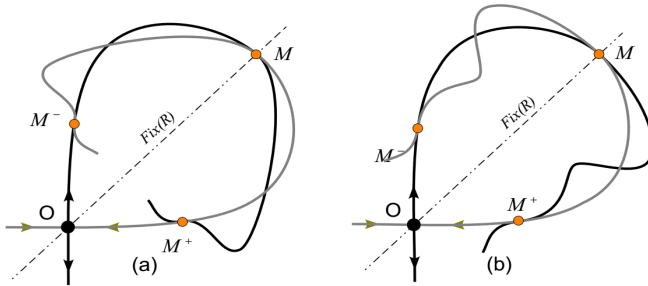


Рис. 2

Лемма. Пусть диффеоморфизм f_0 удовлетворяет условиям **A-D**. Тогда для каждого достаточно большого k отображение первого возвращения T_k может быть приведено с помощью линейной замены координат (рескейлинга) к виду

$$\bar{X} = Y + O\left(\lambda^{k/2}\right), \bar{Y} = MY - X + \nu Y^3 + O\left(\lambda^{k/2}\right), \quad (2)$$

где $\nu = +1$ и $\nu = -1$ в случае касаний первого типа Рис.2а и второго типа Рис.2б, соответственно, а X, Y и M могут принимать произвольные конечные значения, покрывающие в пределе $k \rightarrow \infty$ все R^3 .

Эта лемма показывает, что кубические отображения Эно вида $\bar{X} = Y, \bar{Y} = MY - X + \nu Y^3$ являются нормальными формами для отображений T_k в случае симметричных кубических гомоклинических касаний первого ($\nu = +1$) и второго ($\nu = -1$) типов. Таким образом, изучив бифуркации их неподвижных точек, мы сразу же получим описание бифуркаций однообходных периодических траекторий в семействе диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям A-D.

Основные бифуркации в случае симметричных кубических отображений Эно показаны на рис.3. При этом оба отображения имеют на интервале $-2 < M < 2$ эллиптическую неподвижную точку O , которая, как мы показываем, является КАМ-устойчивой. Тогда мы получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть диффеоморфизм f_0 имеет симметричное кубическое касание в силу условий A-D, и пусть $-2 < M < 2$, тогда в любой окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$ существует счетное множество КАМ-устойчивых эллиптических траекторий всех последовательных периодов начиная с некоторого натурального k .

Интересно отметить, что $M = 2$ в интегрируемом пределе - когда W^s и W^u совпадают. Это означает, что M будет близко к 2 в случае симметричного кубического касания, возникающего при малых периодических возмущениях интегрируемой системы.

Отметим, что отображение Эно с $\nu = -1$ имеет КАМ-устойчивые неподвижные точки при, $M \in (-2, 4)$.

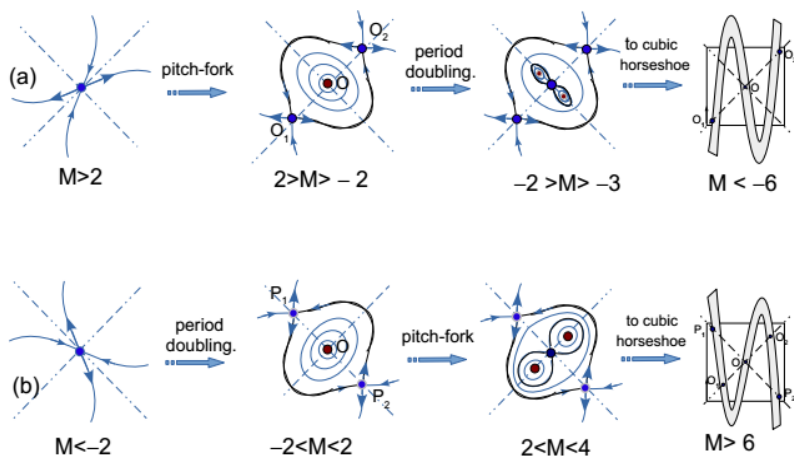


Рис. 3

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 24-11-00339

- [1] Гонченко С.В., Шильников С.В. // Доклады РАН . 2001. Т. 378, №. 6. С. 727.
- [2] Gonchenko S.V., Gonchenko M.S. // Reg. Chaotic Dyn. 2009. Vol. 14, no. 1. P. 116.
- [3] Пуанкаре А. Новые методы небесной динамики. // Избранные труды. – М.: Наука, 1971. Т. 1; 1972, Т. 2.

О ДИСКРЕТНЫХ АТТРАКТОРАХ ЛОРЕНЦА В ТРЕХМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

А.С. Гонченко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Одна из главных целей данной работы — построение трехмерных отображений, которые были бы одновременно максимально простыми и максимально похожими по динамике и бифуркациям на трехмерные системы типа системы Лоренца. Прежде всего, мы предполагаем, что такое отображение $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(x, y, z)$ обладает осевой симметрией $S: \{x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z\}$, такой же, как в модели Лоренца, а также имеет постоянный якобиан — аналог того, что модель Лоренца имеет постоянную дивергенцию.

Лемма. Трехмерное отображение вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + F_1(y, z), \quad \bar{z} = v_3 z + F_2(y), \quad (1)$$

где функции F_1 и F_2 удовлетворяют условиям $F_1(-y, z) = -F_1(y, z)$, $F_2(-y) = F_2(y)$, обладает осевой симметрией S и имеет постоянный якобиан $J = -v_1 v_3$.

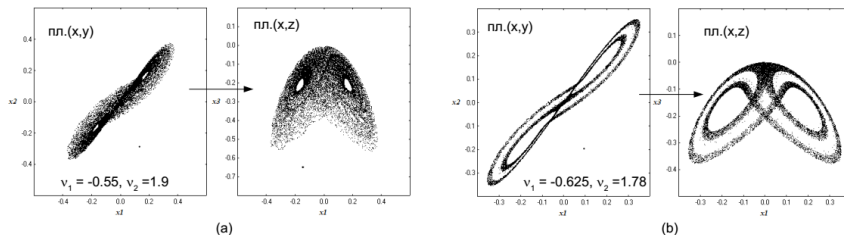


Рис. 1. Портреты аттракторов в отображении (1) при $n_3 = 0.8$, $\alpha = -1$, $a = 0.5$, $b = 0$ в проекции на плоскость (x, y) слева и (y, z) — справа

Мы показываем, что такие трехмерные отображения с постоянным якобианом образуют новый класс отображений, отличный от хорошо известных трехмерных отображений Эно вида $\bar{x} = y$, $\bar{y} = z$, $\bar{z} = Bx + G(y, z)$. Среди них мы выделяем, прежде всего, квадратичные отображения, нормальная форма которых имеет вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + \alpha y^2, \quad \bar{z} = v_3 z + \alpha y^2,$$

где $\alpha = \pm 1$. Означаем эти отображения как $T+$ при $\alpha = +1$ и $T-$ при $\alpha = -1$. Эти отображения разные, но их вторые итерации, $T-^2$ и $T+^2$, преобразуются друг в друга при замене $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$, $v_2 \rightarrow -v_2$ (дуальная симметрия) [1]. Однако, несмотря на это, бифуркационные сценарии, приводящие к появлению дискретных аттракторов Лоренца, и структура самих этих аттракторов A^+ и A^- существенно отличаются для отображений $T+$ и $T-$. Мы проводим сравнительный анализ аттракторов и исследуем

особенности их гомоклинических структур. Мы показываем, что аттракторы A^- могут быть удивительно похожи на дискретизацию классического аттрактора Лоренца, см. рис. 1, тогда как аттракторы A^+ могут быть вполне аналогичны дискретным аттракторам Лоренца в трехмерном отображении Эно $\bar{x} = y$, $\bar{y} = z$, $\bar{z} = M + Bx + Cy - z^2$ [2]. Однако, были также найдены новые типы дискретных аттракторов Лоренца, которые обладают "закрученной структурой", т.н. "twist Lorenz attractors" [1, 3].

В настоящей работе мы также исследовали кубические отображения из нашего класса, для которых нормальная форма имеет вид

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = v_1 x + v_2 y + yz + ay^3 + byz^2, \quad \bar{z} = v_3 z + \alpha y^2, \quad (2)$$

с двумя новыми параметрами a и b . Мы рассмотрели ряд бифуркационных сценариев, в которых проследили бифуркации с аттракторами A^+ и A^- , среди которых мы выделили бифуркации, связанные с изменением знака дискретного аналога сепаратрисной величины аттрактора в классической модели Лоренца, и соответственно, с изменением структуры аттракторов A^+ и A^- , см. рис. 2.

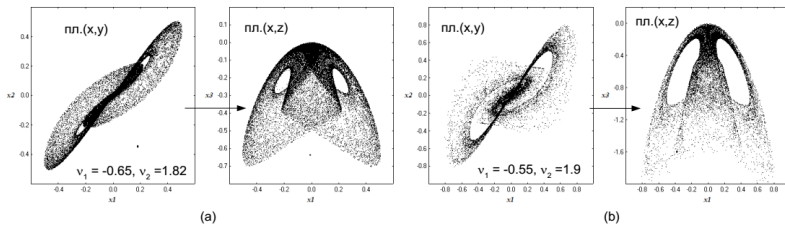


Рис. 2. Портреты аттракторов в отображении (2) при $n_3 = 0.8$, $\alpha = -1$, $a = 0.5$, $b = 0$ в проекции на плоскость (x, y) слева и (y, z) – справа

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 24-11-00339.

- [1] Gonchenko S.V., Gonchenko A.S. // Partial Diff. Equations in Appl. Math. 2024. Vol. 11. 100904.
- [2] Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo S., Turaev D. // Int. J. of Bifurcation and chaos. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3493.
- [3] Gonchenko S., Gonchenko A. // Chaos. 2023. Vol. 33(12). 123104.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГАВРИЛОВА-ШИЛЬНИКОВА НА СЛУЧАЙ НЕГРУБОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

О.В. Гордеева, С.В. Гонченко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Рассмотрим однопараметрическое семейство f_μ многомерных диффеоморфизмов, удовлетворяющее условиям **A)–D)** ниже.

A) f_0 имеет неподвижную точку O с мультипликаторами $v_1 = 1, v_i = \lambda_i$, где $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, m$.

Хорошо известно, что ограничение диффеоморфизма f_0 на локальное (одномерное) центральное многообразие, проходящее через точку O и касающееся собственного направления, отвечающего мультипликатору $v_1 = 1$, можно записать в виде $\bar{y} = y + L_n y^{n+1} + o(y^{n+1})$, где коэффициент $L_n \neq 0$ называется ляпуновской величиной. Такая точка O имеет вырождение порядка $n \geq 1$. Мы предполагаем, что

B) точка O имеет вырождение порядка $n \geq 1$ и $L_n > 0$.

В силу условий **A)–B)**, точка O является либо точкой типа “седло-узел” при n нечетном, либо типа “сложное седло” при n четном (она называется простым (невырожденным) седло-узлом при $n = 1$ и невырожденным сложным седлом при $n = 2$). Как известно, через точку O проходят два C^r -гладких локальных инвариантных многообразия: одномерное центрально неустойчивое W_{loc}^{cu} и n -мерное сильно устойчивое W_{loc}^{ss} . Мы предполагаем, что эти многообразия продолжаются до глобальных W^{cu} и W^{ss} и выполняется условие

C) Инвариантные многообразия W^{cu} и W^{ss} имеют квадратичное касание в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0 .

Вложим f_0 в однопараметрическое семейство f_μ диффеоморфизмов, удовлетворяющее условию

D) При изменении параметра μ исходное гомоклиническое касание расщепляется общим образом, но тип вырождения неподвижной точки O сохраняется.

В настоящей работе мы изучаем бифуркации в семействе f_μ . Такую задачу можно рассматривать как некоторую часть общей задачи изучения гомоклинических бифуркаций в классе многомерных диффеоморфизмов с негрубой неподвижной точкой. Основным результатом – это следующая теорема, в которой дано описание основные бифуркаций т.н. однообходных периодических траекторий в семействе f_μ , т.е. таких траекторий, которые имеют периоды k , где $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$, и проходят за период ровно один раз вдоль достаточно малой фиксированной окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$ исходной гомоклинической орбиты.

Теорема. Пусть f_0 – однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, удовлетворяющих условиям **A)–D)**. Тогда на интервале $(-\mu_0, \mu_0)$ для любого $\mu_0 > 0$ существует счетное множество непересекающихся интервалов δ_k значений параметра μ , $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$, которые накапливаются к $\mu = 0$ при $k \rightarrow \infty$, и таких, что диффеоморфизм f_μ при $\mu \in \delta_k$ имеет асимптотически устойчивую однообходную траекторию периода k . Границы интервалов δ_k – это точки μ_k^+ и μ_k^- , отвечающие невырожденным бифуркациям типа седло-узел и удвоения периода соответственно.

Основные моменты доказательства. Окрестность $U(O \cup \Gamma_0)$ состоит из малой окрестности U_0 точки O и конечного числа малых окрестностей тех точек траектории Γ_0 , которые не принадлежат U_0 . Введем в U_0 координаты (x, y) , в которых локальное отображение $T_0 = f_\mu|_{U_0}$ имеет вид [1]

$$\bar{x} = Ax + h(x, y)x, \quad \bar{y} = y + y^{n+1} + P(y), \quad (1)$$

где $A - (m \times m)$ -матрица, с собственными значениями λ_i , $i = 1, \dots, m$, $h(0, 0) = 0$ и $P(y) = O(y^{n+2})$. В этих координатах $W_{loc}^{ss}(O)$ и $W_{loc}^{cu}(O)$ имеют соответственно уравнения $y = 0$ и $x = 0$.

При $\mu = 0$ выберем в U_0 две точки траектории Γ_0 : точки $M^+(x^+, 0) = (x^+, 0) \in W_{loc}^{ss}(O)$ и $M^-(0, y^-) \in W_{loc}^{cu}(O)$, а также их малые окрестности Π^+ и Π^- соответственно. Пусть $M^+ = f_\mu^q(M^-)$, тогда, в силу **C)–D)**, глобальное отображение $T_1 = f_\mu^q: \Pi^- \rightarrow U_0$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} - x^+ &= ax + b(y - y^-) + O(\|x\|^2 + |y - y^-|^2), \\ \bar{y} &= \mu + cx + d(y - y^-)^2 + O(\|x\|^2 + \|x\| |y - y^-| + |y - y^-|^3). \end{aligned} \quad (2)$$

По построению, любая однообходная периодическая траектория из U должна иметь ровно одну точку пересечения с Π^+ . Соответственно, некоторая итерация этой точки под действием T_0 достигает Π^- и возвращается обратно под действием глобального отображения T_1 . Таким образом, точка пересечения с Π^+ такой траектории является неподвижной точкой отображения первого возвращения $T_k = T_1 T_0^k: \Pi^+ \rightarrow U_0$.

Для построения отображений T_k нам прежде всего нужно найти подходящую формулу для итераций локального отображения $T_0^k: \Pi^+ \rightarrow \Pi^-$ для всех достаточно больших целых k . Пусть точки $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$ в U_0 такие, что $p_i(x_{i+1}, y_{i+1} = T_0(x_i, y_i))$, $p_0 \in \Pi^+$ и $p_k \in \Pi^-$. Соответственно, $p_k = T_0^k(p_0)$.

Поскольку негиперболическая переменная y отделена в (1), то естественно сначала рассмотреть ее динамику отдельно, т.е. изучить итерации одномерного отображения $\tau: \bar{y} = y + y_{n+1} + O(y^{n+2})$, определенного на полуинтервале $I_0 = [0, \varepsilon)$ для достаточно малого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Лемма 1. Пусть y_0 и y_k – точки в I_0 такие, что $y_k = \tau^k(y_0)$. Тогда

$$y_0 = \frac{y_k}{\sqrt[n]{1 + n\gamma y_k^n k}} \quad (3)$$

где $\gamma = \gamma(k)$ – некоторый коэффициент такой, что $1 - \delta(\varepsilon) < \gamma < 1 + \delta(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, для фиксированного $y_k = v > 0$ имеют место следующие асимптотики при $k \rightarrow \infty$ $y_0 \sim \beta_1 \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$, $\frac{dy_0}{dy_k} \sim \beta_2 \frac{1}{k \sqrt[n]{k}}$, $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{n\gamma}}$, $\beta_2 = \frac{1}{v^{n+1} n \gamma \sqrt[n]{n\gamma}}$.

В силу леммы 1 из соотношения $(x_k, y_k) = T_0^k(x_0, y_0)$ получаем такие оценки для координаты x_k и ее производным по краевым условиям x_0, y_k до порядка $p \leq r - 2$

$$x_k = O(\hat{\lambda}^k) x_0, \quad \|x_k\|_{C^p} < C \hat{\lambda}^k, \quad (4)$$

где $\hat{\lambda}$ – некоторая константа такая, что $\max |\lambda_i| \leq \hat{\lambda} < 1$; C – положительная константа и r – порядок гладкости рассматриваемых диффеоморфизмов f_μ .

Теперь, используя соотношения (2), (3) и (4), мы можем представить отображение $T_k = T_1 T_0^k: \Pi^+ \rightarrow \Pi^- \rightarrow \Pi^+$ первого возвращения в следующем виде

$$\bar{x}_0 - x^+ = b(y_k - y^-) + O(\lambda^k \|x_0\| + (y_k - y^-)^2),$$

$$\frac{\bar{y}_k}{\sqrt[n]{1 + ny_k^n k}} = \mu + d(y_k - y^-)^2 + O(\lambda^k \|x_0\| + |y_k - y^-|^3).$$

Введем новые координаты $x = x_0 - x^+, y = y_k - y^-$. Тогда отображение T_k примет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= O(\lambda^k) + by + O(y^2), \\ \frac{\beta_1}{\sqrt[n]{k}} + \frac{\beta_2}{k^n \sqrt[n]{k}} \bar{y} + O\left(\frac{1}{k^n \sqrt[n]{k}} \bar{y}^2\right) &= \mu + dy^2 + O(\lambda^k + y^3). \end{aligned} \quad (5)$$

Введем новые координаты (X, Y) следующим образом $x = \alpha_k \beta_k X, y = \beta_k Y$, где $\beta = -\frac{\beta_2}{dk^n \sqrt[n]{k}}, \alpha_k = \sqrt[n]{k}$.

Тогда система (5) примет вид

$$\bar{X} = O(k^{-1/n}), \quad \bar{Y} = M - Y^2 + O(k^{-1/n}), \quad (6)$$

где

$$M = -\frac{d}{\beta_2^2} k^{\frac{2n+2}{n}} \left(\mu - \frac{\beta_1}{\sqrt[n]{k}} (1 + \dots) \right). \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает, что отображения первого возвращения $T_k(X, Y)$ асимптотически близкими при $k \rightarrow \infty$ к отображению параболы $\bar{Y} = M - Y^2$. Подставляя значения $M = -\frac{1}{4}$ и $M = \frac{3}{4}$, которые отвечают, соответственно, седло-узловой бифуркации и бифуркации удвоения периода, получаем, что искомые интервалы δ_k имеют длины порядка $k^{-2-2/n}$, убывающие по степенному закону при $k \rightarrow \infty$. Это дает следующие рядки: k^{-4} при $n = 1$ (простой седло-узел); k^{-3} при $n = 2$ (невыврожденное сложное седло); $k^{-8/3}$ при $n = 3$ и т. д., с пределом k^{-2} при $n \rightarrow \infty$.

Заметим также, что интервалы δ_k с разными k не пересекаются. Действительно, расстояние между центрами интервалов δ_k и δ_{k+1} есть величина порядка

$$k^{\frac{1}{n}} - (k+1)^{\frac{1}{n}} \sim k^{-1-\frac{1}{n}},$$

в то время как длина интервалов – это величина порядка $k^{-2-2/n}$.

Этот результат можно рассматривать как обобщение на случай негрубой неподвижной точки известной теоремы Гаврилова-Шильникова [2] (а также ее многомерного аналога [3]) о каскаде периодических стоков в случае квадратичного гомоклинического касания к грубой седловой неподвижной точке. Отметим, что в этом случае длины соответствующих интервалов δ_k убывают по экспоненциальному закону: $l(\delta_k) \sim \gamma^{-2k}$ – неустойчивый мультипликатор седла.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 24-11-00339.

- [1] Лукьянов В.И. О существовании гладких инвариантных слоений в окрестности некоторых негрубых неподвижных точек диффеоморфизма // Дифференциальные и интегральные уравнения, Н. Ф. Отроков (ред.). – Горький: ГГУ, 1979, с. 60.
- [2] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой // I. Матем. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 475; II. Матем. сб. 1973. Т. 90. № 1. С.139.
- [3] Гонченко С.В. Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // Мат. Заметки. 1983. Т. 33, вып. 5. С. 745.

СИНГУЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

А.В. Калинин^{1, 2)}, А.А. Тютютина¹⁾

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ НИИ ВШЭ

В работе рассматривается вопрос о характеристике локализованных в пространстве источников электромагнитных полей, порождающих локализованные в пространстве решения соответствующих систем дифференциальных уравнений. На примере стационарной системы уравнений Максвелла обсуждается возможность применения спектрального анализа для описания локализованных в пространстве электромагнитных полей и их источников.

Введение

Обратные задачи восстановления распределенных источников f дифференциальных уравнений $Au = f$ по результатам граничных измерений имеют, как правило, не единственное решение [1–8], что связано, в частности, с существованием источников таких, что решение u уравнения равно нулю вне некоторой ограниченной пространственной области. О таких источниках по результатам граничных наблюдений никакой информации получить нельзя.

Проблеме описания источников, порождающих локализованные в пространстве решения в задачах акустики и электродинамике посвящены многочисленные публикации в физических изданиях [9–13].

В работах [14–17] исследовалась проблема информативности граничных измерений для системы уравнений Максвелла в стационарном и различных квазистационарных приближениях. Для каждой рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и каждого варианта наблюдений электромагнитных полей на границе пространственной области было получено разбиение пространства источников на два ортогональных подпространства. Проекция источника на одно из них однозначно восстанавливается по данным граничным измерениям, а проекция источника на второе подпространство по данным граничным измерениям восстановлена быть не может. В настоящей работе обсуждается возможность описания локализованных в пространстве электромагнитных полей и их источников на основании спектрального анализа. В качестве примера рассматривается задача о сингулярном разложении [18] для стационарной системы уравнений Максвелла.

Локализованные электромагнитные поля и их источники

Стационарная система уравнений Максвелла может быть записана с учетом материальных соотношений в виде [19]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^{\text{ext}}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{J}^{\text{ext}}$ – плотность тока источников, σ – удельная проводимость среды.

Для произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определены пространства Лебега суммируемых с квадратом функций и вектор функций $L_2(\Omega)$ и $\{L_2(\Omega)\}^3$, скалярное произведение в которых обозначается $(\cdot, \cdot)_{2,\Omega}$. Через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначается пространство пробных функций, $H_0^1(\Omega)$ – замыкание $\mathcal{D}(\Omega)$ в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$. Стандартным образом определяются гильбертовы пространства $H(\text{rot}; \Omega)$, $H(\text{div}; \Omega)$ суммируемых с квадратом вектор-функций, ротор или дивергенция суммируема с квадратом, с соответствующими скалярными произведениями [20], $K(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \text{rot} \mathbf{u} = 0\}$, $K(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3: \text{div} \mathbf{u} = 0\}$. Пусть, далее, $H_0(\text{rot}; \Omega)$, $H_0(\text{div}; \Omega)$ – замыкание $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\text{rot}; \Omega)$ и $H(\text{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\text{rot}; \Omega) = H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{rot}; \Omega)$, $K_0(\text{div}; \Omega) = H_0(\text{div}; \Omega) \cap K(\text{div}; \Omega)$, $\text{rot} H(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{v}: \mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega)\}$.

Пусть $\mathbf{J}^{ext} \in \{L_2(\mathbb{R}^3)\}^3$, $\text{supp} \mathbf{J}^{ext} \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, Ω – ограниченная липшицевая односвязная область, $0 < \sigma_1 \leq \sigma(x) \leq \sigma_2$, $x \in \Omega$. Обобщенным решением системы (1), (2) называются удовлетворяющие равенству (1) функции $\mathbf{E} \in K(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{H} \in K(\text{div}; \mathbb{R}^3) \cap H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$.

Определим класс $NR(\Omega)$ функций $\mathbf{J}^{ext}$ таких, что существует обобщенное решение $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ системы (1), (2), равное нулю вне области Ω . Справедливо следующее утверждение [14].

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная липшицева область. Функция $\mathbf{J}^{ext}$, равная нулю вне области Ω , лежит в классе $NR(\Omega)$ для системы (1), (2) тогда и только тогда, когда $(\mathbf{J}^{ext}, \mathbf{v})_{2,\Omega} = 0$ для всех $\mathbf{v} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ таких, что $\text{rot} \mathbf{v} = \text{grad} \psi$, $\psi \in L_2(\Omega)$ и $\sigma \mathbf{v} \in \text{rot} H(\text{rot}; \Omega)$.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ гомеоморфна шару. Тогда $\text{rot} H(\text{rot}; \Omega) = K(\text{div}; \Omega)$, $K_0(\text{rot}; \Omega) = \{\mathbf{u} = \text{grad} \psi: \psi \in H_0^1(\Omega)\}$ [20].

Положим $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi$. Обобщенное решение $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ системы (1), (2) равно нулю вне области Ω тогда и только тогда, когда $\mathbf{H} \in K_0(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega) \subset \{H_0^1(\Omega)\}^3$, $\mathbf{E} \in K_0(\text{rot}; \Omega)$ (т.е. $\varphi \in H_0^1(\Omega)$).

Задача о сингулярном разложении

Введём оператор $A: K(\text{div}; \Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow \{L_2(\Omega)\}^3$ с областью определения $D(A) = K_0(\text{div}; \Omega) \cap H_0(\text{rot}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$A\mathbf{P} = \text{rot} \mathbf{u} + \frac{4\pi}{c} \sigma \text{grad} \psi, \quad \mathbf{P} = \{\mathbf{u}, \psi\}.$$

Сопряженный к нему оператор $A^*: \{L_2(\Omega)\}^3 \rightarrow K(\text{div}; \Omega) \times L_2(\Omega)$, определенный на множестве $D(A^*) = \{\mathbf{v} \in H(\text{rot}; \Omega): \text{div} \sigma \mathbf{v} \in L_2(\Omega)\}$, имеет вид

$$A^* \mathbf{v} = \left\{ \text{rot} \mathbf{v}, -\frac{4\pi}{c} \text{div} \sigma \mathbf{v} \right\}, \quad \mathbf{v} \in D(A^*).$$

Рассматривается задача поиска чисел λ , функций $\mathbf{P} = \{\mathbf{u}, \psi\} \in D(A)$, $\mathbf{v} \in D(A^*)$ таких, что

$$A\mathbf{P} = \lambda \mathbf{v}, \quad A^* \mathbf{v} = \lambda \mathbf{P}, \quad (3)$$

то есть

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{4\pi}{c} \sigma \operatorname{grad} \psi = \lambda \mathbf{v}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}, \quad -\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \sigma \mathbf{v} = \lambda \psi,$$

$\mathbf{u} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Задача (3) сводится к задаче на собственные значения для оператора A^*A :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \sigma \operatorname{grad} \psi = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \sigma \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \sigma \operatorname{grad} \psi = \lambda^2 \psi, \quad \mathbf{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3, \quad \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару. Существует счетный набор сингулярных значений $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ задачи (3) такой, что $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, причем $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, каждому значению λ_k соответствует ровно один набор функций $\Pi_k = \{\mathbf{u}_k, \psi_k\} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $\mathbf{v}_k = \lambda_k^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{u}_k + 4\pi \sigma \operatorname{grad} \psi_k / c)$, нормированных в $\{L_2(\Omega)\}^3 \times L_2(\Omega)$ и в $\{L_2(\Omega)\}^3$ соответственно. Система функций $\{\Pi_k\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $K(\operatorname{div}; \Omega) \times L_2(\Omega)$, система функций $\{\mathbf{v}_k\}$ является ортонормированным базисом в пространстве $NR(\Omega)$ для системы (1), (2).

Из теоремы 2 следует, что если $\mathbf{J}^{\text{ext}} \in NR(\Omega)$,

$$\mathbf{J}^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{J}^{\text{ext}}, \mathbf{v}_k)_{2,\Omega} \mathbf{v}_k.$$

Соответствующее решение системы (1), (2) представимо в виде

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\mathbf{J}^{\text{ext}}, \mathbf{v}_k)_{2,\Omega} \mathbf{u}_k,$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\mathbf{J}^{\text{ext}}, \mathbf{v}_k)_{2,\Omega} \psi_k,$$

$$\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\mathbf{J}^{\text{ext}}, \mathbf{v}_k)_{2,\Omega} \operatorname{grad} \psi_k.$$

Замечание. В случае однородной среды ($\sigma = \text{const}$) задача (4), (5) может быть сведена к задаче на собственные значения для оператора Лапласа:

$$-\Delta \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\Delta \psi = \lambda^2 \psi, \quad \mathbf{u} \in \{H_0^1(\Omega)\}^3, \quad \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-71-30008).

[1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979, 285 с.

- [2] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009, 457 с.
- [3] Isakov V. Inverse source problems. – Providence: AMS, 1990.
- [4] Новиков П.С. // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 3. С. 165.
- [5] Bleistein N., Cohen J.K. // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, no. 2. P. 194.
- [6] Marengo E.A., Devaney A.J., Ziolkowski R.W. // J. Opt. Soc. Am. A. 2000. Vol. 17, no. 1. P. 34.
- [7] Albanese R., Monk P.B. // Inverse Problems. 2006. Vol. 22, no. 3. P. 1023.
- [8] Rodriguez A.A., Camano J., Valli A. // Inverse problems. 2012. Vol. 28, no. 1. art. 015006.
- [9] Devaney A.J., Wolf E. // Phys. Rev. D. 1973. Vol. 8, no. 4. P. 1044.
- [10] Kim K., Wolf E. // Opt. Commun. 1986. Vol. 59, no. 1. P. 1.
- [11] Marengo E.A., Ziolkowski R.W. // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 2000. Vol. 48, no. 10. P. 1553.
- [12] Gbur G. // Progress in Optics, 2003. Vol. 45. P. 273.
- [13] Marengo E.A., Devaney A.J. // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70, no. 3. art. 037601.
- [14] Калинин А.В., Тюхтина А.А. // Математика и теоретические компьютерные науки. 2025. Т. 3, в. 4. С. 19.
- [15] Калинин А.В., Тюхтина А.А. // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2025. Т. 244. С. 55.
- [16] Kalinin A., Tyukhtina A. // MMST 2025. CCIS. Vol. 2815/ Balandin, D., Barkalov, K., Meyerov, I. (eds) – Springer, Cham. 2026. P. 284.
- [17] Калинин А.В., Тюхтина А.А. // Журнал выч. мат. и мат. физ. 2026. Т. 66, № 5. С. 750.
- [18] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965, 448 с.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2005, 656 с.
- [20] Girault V., Raviart P. Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. – New York: Springer-Verlag, 1986.

ИНВАРИАНТНЫЕ ТОРЫ И АТТРАКТОР СМЕЙЛА-ВИЛЬЯМСА ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ЮБКОЙ СЕДЛО-ФОКУСА

А.О. Казаков¹⁾, Н.Е. Кулагин²⁾, Л.М. Лерман¹⁾, К.С. Зайчиков¹⁾

¹⁾ НИУ ВШЭ

²⁾ ИФХЭ РАН

Введение

Рассматривается гладкая (аналитическая) гамильтонова система на гладком (аналитическом) четырёхмерном симплектическом многообразии (M, Ω) с симплектической 2-формой Ω и гамильтонианом H , порождающим гамильтонову систему X_H , которая является вполне интегрируемой по Лиувиллю.

Предполагается, что векторное поле X_H имеет положение равновесия p , являющееся седло-фокусом. Это означает, что линеаризация X_H в точке p имеет четверку комплексных собственных значений $\pm \alpha \pm i\omega$, где $\alpha\omega \neq 0$. Такое равновесие гиперболическое, оно имеет два локальных инвариантных многообразия — устойчивое $W^s(p)$ и неустойчивое $W^u(p)$, оба из которых лежат в критическом совместном уровне Σ двух интегралов $H = H(p)$, $K = K(p)$.

Ещё одно предположение о поведении интегрируемой системы состоит в существовании гомоклинической траектории Γ , которая асимптотична к p при $t \rightarrow \pm\infty$. Поскольку на W^u симплектически действует группа T^1 [1], все траектории $W^u(p)$ получают действием этой группы T^1 на точках Γ , и, следовательно, все они являются гомоклиническими орбитами точки p . Мы будем называть это множество объединённых W^u и W^s «гомоклинической юбкой» точки p .

Эта интегрируемая гамильтонова система будет возмущена диссипативным возмущением, и наша основная задача — в некоторой степени понять структуру возмущённой системы в этой окрестности.

Вывод уравнений

В окрестности точки p гамильтониан нашей системы принимает следующий вид [2]: $H = h(\xi, \eta) = \alpha \xi + \beta \eta + \dots$, где $\xi = x_1 y_1 + x_2 y_2$, $\eta = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Преимущество этих координат заключается в существовании двух локальных интегралов ξ, η , а значит — в локальной интегрируемости потока для векторного поля:

$$\begin{cases} \dot{x} = -H_\eta, \\ \dot{y} = H_\xi. \end{cases}$$

Решения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \exp[-t h_\xi^0] \left(x_1^0 \cos(t h_\eta^0) + x_2^0 \sin(t h_\eta^0) \right), \\
 x_2 &= \exp[-t h_\xi^0] \left(-x_1^0 \sin(t h_\eta^0) + x_2^0 \cos(t h_\eta^0) \right), \\
 y_1 &= \exp[t h_\xi^0] \left(y_1^0 \cos(t h_\eta^0) + y_2^0 \sin(t h_\eta^0) \right), \\
 y_2 &= \exp[t h_\xi^0] \left(-y_1^0 \sin(t h_\eta^0) + y_2^0 \cos(t h_\eta^0) \right), \\
 \xi^0 &= x_1^0 y_1^0 + x_2^0 y_2^0, \eta^0 = x_1^0 y_2^0 - x_2^0 y_1^0.
 \end{aligned}$$

Инструментом для исследования близких возмущённых векторных полей будет изучение соответствующего отображения Пуанкаре для траекторий, проходящих через окрестность гомоклинической юбки невозмущённой системы. В качестве секущей траекторий на $W^s(p)$ мы используем полноторий $N^s: D^2 \times S^1$, задаваемый в локальных координатах (x_1, x_2, y_1, y_2) уравнением:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = p_s^2, \\ y_1^2 + y_2^2 \leq \delta_s^2. \end{cases}$$

Для траекторий на $W^u(p)$ секущая N^u имеет вид:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 = p_u^2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq \delta_u^2. \end{cases}$$

Возмущение локального уравнения регулируется параметром ε , возмущенные уравнения задаются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\alpha + \varepsilon)x_1 - (\beta + \varepsilon)x_2, \dot{x}_2 = (\beta + \varepsilon)x_1 - (\alpha + \varepsilon)x_2, \\ \dot{y}_1 = (\alpha - \varepsilon)y_1 - (\beta - \varepsilon)y_2, \dot{y}_2 = (\beta - \varepsilon)y_1 + (\alpha - \varepsilon)y_2. \end{cases}$$

В полярных координатах решение принимает вид:

$$r = r_0 \exp[-(\alpha + \varepsilon)t], \theta = (\beta + \varepsilon)t + \theta_0, \rho = \rho_0 \exp[(\alpha - \varepsilon)t], \varphi = (\beta - \varepsilon)t + \varphi_0.$$

После построения локального отображения $T: N_s \rightarrow N_u$ и перехода к новым координатам на каждой из секущих получаем следующее трехмерное отображение:

$$\begin{cases} \xi_1 = (r_s \rho_u)^{\frac{-2\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}} \left(\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \right)^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}} \cos\left(\Phi_0 - \frac{2\varepsilon}{\alpha-\varepsilon} \ln \frac{r_s \rho_u}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}\right), \\ \eta_1 = (r_s \rho_u)^{\frac{-2\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}} \left(\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} \right)^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}} \sin\left(\Phi_0 - \frac{2\varepsilon}{\alpha-\varepsilon} \ln \frac{r_s \rho_u}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}\right), \\ \varphi_1 = \theta_0 + \frac{\beta - \varepsilon}{\alpha - \varepsilon} \ln \frac{r_s \rho_u}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}} + \Phi_0(\xi, \eta) \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

где $(\xi_0, \eta_0, \theta_0)$ координаты на N^s , а $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$ координаты на N^u , а угол Φ_0 определяется из уравнений:

$$\cos \Phi_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}, \quad \sin \Phi_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}.$$

В качестве глобального отображения мы рассматриваем три вариации отображения:

$$S_1: \left(\xi_1 + \varepsilon \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \varphi \right], \eta_1 + \frac{3}{4} \varepsilon \sin \varphi, \varphi + 1 + \xi_1 + \eta_1 + \varepsilon \sin \varphi \bmod 2\pi \right),$$

$$S_2: (\xi_1 + \varepsilon \cos \varphi, \eta_1 + \varepsilon \sin \varphi, \varphi + 1 + \xi_1 + \eta_1 + \varepsilon \sin \varphi \bmod 2\pi),$$

$$S_3: (\xi_1 + \varepsilon \cos(2\varphi), \eta_1 + \varepsilon \sin(2\varphi), \varphi + 1 + \xi_1 + \eta_1 + \varepsilon \sin \varphi \bmod 2\pi).$$

Численные результаты

Исследуемое отображение представляет собой композицию локального и глобального отображения.

Примеры аттракторов в случае глобального отображения S_1 приведены на рис. 1. На рис. 1a) устойчивая инвариантная кривая, старший показатель Ляпунова приблизительно равен нулю. При дальнейшем изменении параметра ε кривая претерпевает резонанс и аттрактором становится точка периода 5 (рис. 1b), которая затем претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода, в результате чего рождается хаотический аттрактор, состоящий из пяти компонент. Далее компоненты увеличиваются в размере и влипают в единый аттрактор, представленный на рисунке 1d.

В случае отображения S_1 были обнаружены только квазиаттракторы.

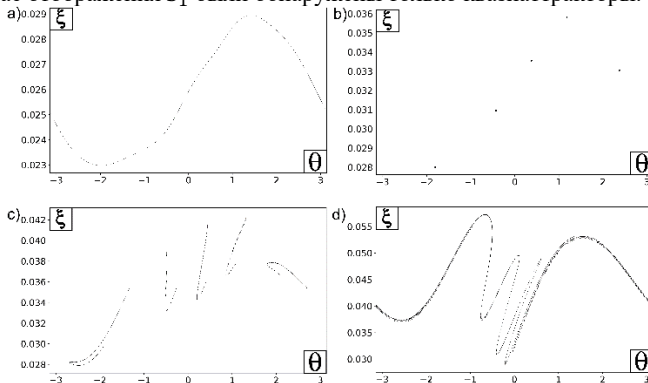


Рис. 1

При малых ε сценарии и аттракторы в случае отображений S_2 и S_3 схожи с тем, что мы наблюдаем в случае S_1 , однако при увеличении ε устойчивые периодические орбиты исчезают и возникает гиперболический аттрактор Смейла-Вильямса. Фазовые портреты с наложением минимального угла между подпространствами, в случае отображения S_2 представлены на рисунке 2. Красный соответствует большому углу, желтый – меньшему, синим обозначены точки, в которых подпространства касаются. На рисунках а-с представлены гиперболические аттракторы, старший показатель Ляпунова которых равен $\ln 2$, другие два показателя отрицательны.

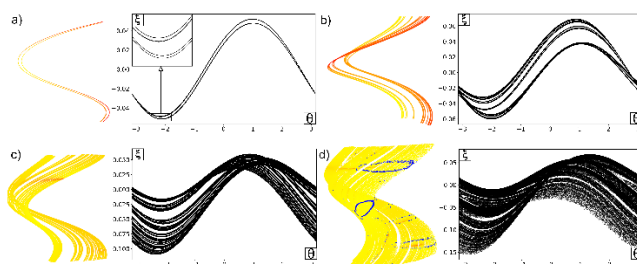


Рис. 2

В случае отображения S_3 аттрактор похож на случай S_2 , но обладает большим «числом оборотов» и его старший показатель Ляпунова равен $\ln 3$. Фазовые портреты приведены на рисунке 3.

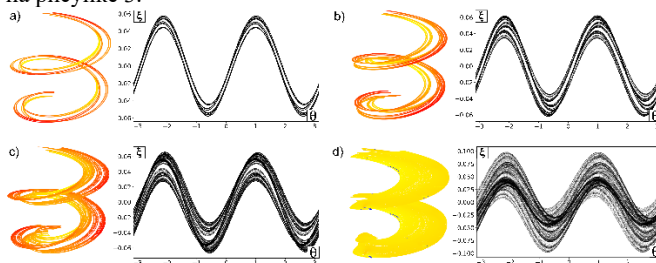


Рис. 3

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 22-11-00027 (вывод модели, аналитические исследования) и № 25-11-20069 (численные исследования, проверка гиперболичности).

- [1] Kudryavtseva E.A. Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems. // Eur. J. Math. 2022. Vol. 8 (4). P. 1487.
- [2] Moser J. On the generalization of a theorem of A. Liapounoff. // Commun. Pure Appl. Math. 1958. Vol. 11 (2). P. 257.

НЕИЗЛУЧАЮЩИЕ ИСТОЧНИКИ

В.А. Кузнецов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

В настоящей работе рассматриваются одномерные неизлучающие источники обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$Lu(x) = f(x), \quad (1)$$

где

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 \quad (2)$$

линейный дифференциальный оператор, в котором $a_n \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ — постоянные коэффициенты.

Функция $f(x)$ называется *неизлучающим источником* уравнения (1), если существует хотя бы одно решение $u(x)$, удовлетворяющее условию

$$u(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \Omega, \quad (3)$$

где Ω — открытое, связное подмножество $\mathbb{R}$.

Требуется формулировка необходимых и достаточных условий, накладываемых на функцию $f(x)$ при которых уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию (3).

Теория неизлучающих источников занимает важное место в современной теории обратных задач математической физики. Интерес к ней обусловлен как фундаментальными, так и прикладными аспектами.

По данной теме написано множество статей и проведён большой объём исследований. Обзор некоторых важных результатов этой теории, рассмотрение одномерных неизлучающих источников, исследование необычных эффектов когерентности, рассмотрение квазиоднородных приближений проводится в [1].

Сформулированная проблема в теории обратных задач обычно называется задачей о неизлучающих источниках. Задача о неизлучающих источниках играет важную роль в изучении обратных задач об определении источников полей по результатам граничных наблюдений. Наличие неизлучающих источников означает неединственность решения таких задач [2].

В работах [3–6] в основном рассматривается уравнение Гельмгольца, решения и источники которого раскладываются в ряды по сферическим функциям. Для коэффициентов разложения устанавливаются условия для неизлучающего источника.

В данной работе получены условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы являться неизлучающим источником обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть $\Omega = (a, b)$ — интервал множества вещественных чисел. Будем рассматривать уравнение (1), с дополнительным условием, накладываемым на источник:

$$\text{supp}[f] \subset \bar{\Omega}, \quad (4)$$

где $\text{supp}[f]$ — компактный носитель функции f .

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) + u_1(x) \int_{x_0}^x c'_1(x) dx + \dots + u_n(x) \int_{x_0}^x c'_n(x) dx. \quad (5)$$

Для описания неизлучающего источника уравнения (1) решение (5) было представлено в форме

$$u(x) = c_1 u_1(x) + \dots + c_n u_n(x) + u_1(x) \int_{x_0}^x f(x) z_1(x) dx + \dots + u_n(x) \int_{x_0}^x f(x) z_n(x) dx, \quad (6)$$

где $z_1(x), \dots, z_n(x)$ – решение системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i u_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n z_i u'_i(x) &= 0, \\ &\dots \\ \sum_{i=1}^n z_i u_i^{(n-2)}(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n z_i u_i^{(n-1)}(x) &= f(x) \end{aligned} \quad (7)$$

Основные теоремы

Теорема 1. Пусть $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1), а $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ – решение системы (7). Тогда система функций $z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L^* u(x) = f(x), \quad (8)$$

где

$$L^* = (-1)^n a_n \frac{d^n}{dx^n} + (-1)^{n-1} a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0 \quad (9)$$

линейный дифференциальный оператор, формально сопряженный к оператору (2).

Теорема 2. Пусть $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ – фундаментальная система решений уравнения (1). Тогда решение системы (7) образует фундаментальную систему решений уравнения (8).

Теорема 3. Функция $f(x)$ является функцией неизлучающих источников, если выполнены условия:

1. $\text{supp}[f] \subset \bar{\Omega}$, где $\Omega = (a, b)$;
2. Функция f ортогональна ядру дифференциального оператора (9) на Ω :

$$\int_a^b f(x) z_i(x) dx = 0 \text{ для любых } i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Далее в работе рассматривается возможность применения полученных критериев неизлучающего источника в ОДУ для уравнений математической физики. А именно рассматривается волновое уравнение

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (11)$$

с специальным видом правой части:

$$f(x, t) = F(x) \sin \omega t + G(x) \cos \omega t, \quad (12)$$

решение которого ищется в аналогичном виде

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t + V(x) \cos \omega t. \quad (13)$$

Установлены критерии для неизлучающего источника уравнения (11). Для того, чтобы функция (12) была неизлучающим источником для уравнения (11), необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $F(x)$ и $G(x)$ была ортогональна функциям

$$\sin \frac{\omega x}{a}, \quad \cos \frac{\omega x}{a}. \quad (14)$$

- [1] Gbur G. Nonradiating Sources and the Inverse Source Problem. – New York: Rochester, 2001.
- [2] Blestein N., Cohen J. // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, no. 2. P. 194.
- [3] Marengo E.A., Devaney A.J. // J Phys. Rev. 2004. Vol. 70, Art. no. 037601.
- [4] Alonso Rodriguez A., Camano J. // Inverse problems. 2012. Vol. 28.
- [5] Kim K., Wolf E. // Optics Communications. 1985. Vol. 56, no. 1. P. 1.
- [6] Gbur G., Wolf E. // Progress in Optics. 2003. Vol. 45.

БИФУРКАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ К СОСТОЯНИЮ РАВНОВЕСИЯ С ДВОЙНЫМ НУЛЕВЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

Л.М. Лерман, К.Н. Трифонов

НИИ ВШЭ

В 1969 году Л.П. Шильников [1] обнаружил новую полуглобальную бифуркацию, при которой система при критическом значении параметра имела состояние равновесия типа седло-седло и одну или более гомоклинических траекторий к нему. При этом было показано, что при изменении параметра в ту сторону, где состояние равновесия исчезает, в окрестности каждой гомоклинической траектории рождается седловая периодическая траектория. Если исходная система имеет единственную гомоклиническую траекторию, то рождающаяся периодическая траектория единственна в некоторой окрестности бывшей гомоклинической траектории, а если таких гомоклинических траекторий $k \geq 2$, то в окрестности их объединения рождается инвариантное гиперболическое подмножество, топологически эквивалентное надстройке над схемой Бернулли из k символов. Таким образом, при $k \geq 2$ был впервые обнаружен переход через бифуркационную поверхность коразмерности 1 в пространстве гладких векторных полей от систем с простой динамикой к системам со сложной хаотической динамикой. Позже такие переходы были названы гомоклиническим взрывом.

В данной работе мы хотим представить аналог этой бифуркации для случая гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. На гладком симплектическом четырехмерном многообразии (M, Ω) с симплектической 2-формой Ω рассмотрим гамильтонову систему с двумя степенями свободы с гладким гамильтонианом H , имеющую вырожденное состояние равновесие $p \in M$ с двумя вещественными собственными значениями $\pm \lambda \neq 0$ и не полупростым двойным собственным значением, равным нулю. Мы будем называть такое состояние равновесия гиперголо-параболическим.

Согласно теореме о центральном многообразии, вблизи состояния равновесия p существует локальное двумерное гладкое инвариантное симплектическое центральное многообразие W^c , соответствующее двойному нулевому собственному значению. Ограничение системы на W^c является гамильтоновой системой с одной степенью свободы, имеющей вырожденное состояние равновесие p параболического типа. Вблизи такого состояния гладкий гамильтониан H имеет вид $H = \frac{y^2}{2} + h(x)$, $h(x) = ax^3 + \dots$, $a \neq 0$.

Подмногообразие $W^c(p)$ является нормально гиперболическим на всем многообразии M , поскольку два других собственных значения p отличны от нуля. Это означает, что p имеет сильно устойчивую $W^{ss}(p)$ и сильно неустойчивую $W^{uu}(p)$ гладкие одномерные кривые. Таким образом, устойчивое множество p (т.е. совокупность всех локальных полутраекторий X_H , которые стремятся к p при $t \rightarrow \infty$) описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Локальное устойчивое множество $W^s(p)$ такого состояния равновесия диффеоморфно полудиску $x^2 + y^2 \leq \rho$, $x \geq 0$, в R^2 . Граничный отрезок $x = 0$ соответствует сильно устойчивой гладкой кривой, все остальные траектории асимптотически стремятся к p , имея одну и ту же касательную, являющуюся собственной*

прямой с нулевым собственным значением. Аналогичное описание имеет неустойчивое множество $W^u(p)$. Множества $W^s(p)$, $W^u(p)$ пересекаются в единственной точке p (см. рис. 1).

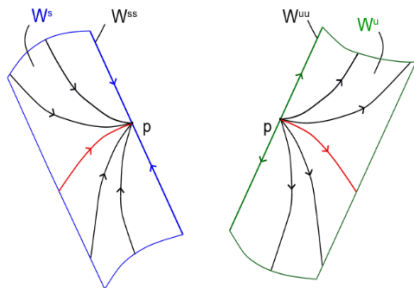


Рис. 1

Многообразия $W^s(p)$, $W^u(p)$ принадлежат одному трехмерному уровню $H = H(p)$ гамильтониана. Мы предполагаем, что многообразия $W^s(p)$, $W^u(p)$ при продолжении вдоль потока пересекаются трансверсально в уровне $H = H(p)$ по $k \geq 1$ гомоклиническим траекториям. Эти гомоклинические траектории не лежат на краях соответствующих многообразий $W^s(p)$, $W^u(p)$, т.е. на сильно устойчивом $W^{ss}(p)$ и сильно неустойчивом $W^{uu}(p)$ многообразиях состояния равновесия p .

Далее рассматривается общее однопараметрическое семейство гамильтоновых векторных полей H_μ критического гамильтониана и предполагается, что состояние равновесие p исчезает при $\mu < 0$ и распадается на седло и центр при $\mu > 0$ на $W^c(p)$ (см. рис. 2).

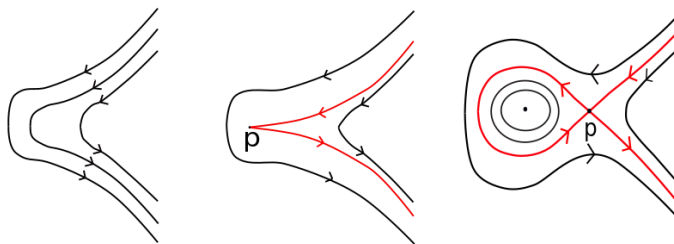


Рис. 2

Основным результатом работы являются следующие две теоремы.

Теорема 2. При $\mu > 0$ система имеет гладкое нормально гиперболическое инвариантное симплектическое двумерное центральное многообразие $W_\mu^c(p)$. Это многообразие содержит состояние равновесия p_h , являющееся седлом в M с $k+1$

трансверсальными гомоклиническими траекториями, одна из которых принадлежит W_μ^c . Гомоклиническая траектория на W_μ^c охватывает диск, заполненный периодическими траекториями, окружающими другое состояние равновесия p_c , являющееся в M седло-центром. Каждый уровень гамильтониана H_μ , близкий к $H_\mu = H_\mu(p_h)$, содержит гиперболическое множество, образованное на базисных $k + 1$ седловых периодических траекториях, динамика на котором описывается надстройкой над схемой Бернулли из $k + 1$ символов.

При $\mu < 0$ система имеет k гиперболических периодических траекторий, близких к букету $\cup_i^k \Gamma_i$. Эти k базисных седловых периодических траекторий порождают гиперболическое базисное множество G_μ , динамика на котором описывается надстройкой над схемой Бернулли из k символов.

Для формулировки результата при значении параметра $\mu = 0$, используем следующую конструкцию. Рассмотрим схему Бернулли из k символов и построим для нее поток надстройки. Этот поток содержит k базисных периодических траекторий, соответствующих k последовательностям, содержащих один символ. На полученном пространстве надстройки зададим неотрицательную непрерывную функцию, которая всюду положительна кроме k точек, выбранных по одной на каждой базисной периодической траектории, в этих точках функция равна 0. Во всех остальных точках функция строго положительна. Рассмотрим векторное поле на пространстве надстройки, полученное умножением векторов потока надстройки на заданную выше функцию и затем склеим все отмеченные точки в одну. Поток на полученном пространстве будем называть *сингулярной надстройкой из k символов*.

Теорема 3. При $\mu = 0$ система имеет инвариантное множество, топологически эквивалентное сингулярной надстройке из k символов.

Построен пример системы, имеющей указанную структуру. Для этого рассматривается интегрируемая гамильтонова система, гамильтониан которой является суммой двух частичных гамильтонианов, соответствующих уравнениям типа Дюффинга, один из которых имеет седло с двумя петлями сепаратрис, а другой имеет вырожденную параболическую особую точку с петлей сепаратрисы и остальными замкнутыми траекториями. Такой гамильтониан в R^4 имеет состояние равновесия указанного выше типа, у которого устойчивое и неустойчивое многообразия сливаются, образуя множество, гомеоморфное произведению восьмерки и окружности. Метод типа Мельникова в реализации [2] позволяет, при добавлении возмущения, расщепить устойчивое и неустойчивое многообразия и получить две трансверсальные гомоклинические траектории.

Исследование выполнено в рамках гранта Российского научного фонда, грант № 22-11-00027.

[1] Шильников Л.П. // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 59.

[2] Лерман Л.М., Уманский Я.Л. // ПММ. 1983. Т. 47, № 3. С. 395.

ДВОЙНАЯ ГАМИЛЬТОНОВА БИФУРКАЦИЯ ХОПФА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ПОЛУЧЕНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ БРИЗЕРОВ В УРАВНЕНИИ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА

Л.М. Лерман^{1, 2)}, Н.Е. Кулагин³⁾

¹⁾ НИУ ВШЭ

²⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

³⁾ ИФХЭ РАН

Бифуркация, название которой указано в заголовке, впервые встретила, насколько нам известно, при поиске стационарных периодически модулированных стенок в уравнении Свифта-Хоенберга [1], но там она не была изучена. Здесь мы хотим обсудить основные особенности этой бифуркации более детально. Отметим, что в однопараметрических семействах гамильтоновых систем с двумя степенями свободы подобная бифуркация встречается во многих задачах и она была детально изучена в [2]. Мы рассматриваем системы с четырьмя степенями свободы и вырождение коразмерности два. Понятно, что такая бифуркация может встречаться и в системах с большим числом степеней свободы.

Рассматривается стандартное линейное симплектическое пространство (R^8, Ω) с симплектической формой Ω и гладкой функцией Гамильтона H , определенной в окрестности U начала координат O , которое является ее критической точкой $dH(O) = 0$, а поэтому состоянием равновесия гамильтонова векторного поля X_H . Предполагается, что матрица линеаризации $JR = D^2H(O)JR$, линеаризованной системы в состоянии равновесия имеет две пары двойных собственных значений $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$, каждое из которых является не полупростым, т.е. соответствующий им жорданов блок двумерный.

Линейной симплектической заменой переменных квадратичную часть H_2 гамильтониана можно привести к следующему виду $H_2 = \omega_1(p_2q_1 - p_1q_2) \pm (q_1^2 + q_2^2)/2 + \omega_2(p_4q_3 - p_3q_4) \pm (q_3^2 + q_4^2)/2 + \varepsilon_1(p_1^2 + p_2^2)/2 + \varepsilon_2(p_3^2 + p_4^2)/2$, где коэффициенты $\omega_k, k = 1, 2$ – гладкие функции параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. В классе гладких гамильтонианов такое состояние равновесия является вырожденным коразмерности два, поэтому для исследования рассматривается двухпараметрическое семейство гамильтоновых систем. Инфинитезимально симплектический оператор JR является разложимым: симплектическое пространство R^8 разлагается в прямую сумму двух инвариантных четырехмерных симплектических подпространств, в которых ограничение оператора порождает неразложимый инфинитезимально симплектический оператор с двумя не полупростыми чисто мнимыми собственными значениями.

Предполагая гамильтониан аналитическим, а отношение ω_1/ω_2 иррациональным, и используя метод нормальной формы, гамильтониан можно привести формальным симплектическим преобразованием к нормальной форме вида $H = \omega_1S_1 + \omega_2S_2 + N_1 + N_2 + \sum_{i,j,k,l \geq 0, i+j+k+l=2} A_{ijkl} S_1^i S_2^j M_1^k M_2^l$, где $S_1, S_2, S_1 = p_2q_1 - p_1q_2, S_2 = p_4q_3 - p_3q_4$, а нильпотентная часть состоит из двух функций $N_1, N_2, N_1 = (q_1^2 + q_2^2)/2, N_2 = (q_3^2 + q_4^2)/2$, и скобки Пуассона равны нулю $\{S_i, N_j\} = 0, i, j = 1, 2$. Заметим, что квадратичные функции S_1, S_2 – первые интегралы нормализованной гамильтоновой системы и каждый из них порождает гамильтоново действие группы S^1 , так что совместно они

порождают действие тора T^2 в R^8 . Состояние равновесия в начале координат меняет свой тип при изменении параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при этом основных типов три, один из которых чисто гиперболический (двойной седло-фокус), один эллиптический и один эллипτικο-гиперболический.

В качестве первого шага исследования ограничимся изучением системы с гамильтонианом, являющимся нормальной формой четвертого порядка $H_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 + N_1 + N_2 + \varepsilon_1 M_1 + \varepsilon_2 M_2 + AM_1^2 + BM_1 M_2 + CM_2^2$. Такая же нормальная форма будет и при отсутствии сильных резонансов между ω_1, ω_2 .

Используя редукцию (Marsden-Weinstein) относительно действия группы T^2 , мы приходим к изучению гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, определенной на четырехмерном фазовом пространстве. Первый естественный вопрос здесь – является ли эта система интегрируемой и какова ее структура?

Введем, следуя Сокольскому, симплектические полярные координаты

$$\begin{aligned} p_1 &= r_1 \cos \varphi_1, q_1 = P_1 \cos \varphi_1 + (k_1/r_1) \sin \varphi_1, p_2 = r_1 \sin \varphi_1, \\ q_2 &= P_1 \sin \varphi_1 - (k_1/r_1) \cos \varphi_1, p_3 = r_2 \cos \varphi_2, q_3 = P_2 \cos \varphi_2 + (k_2/r_2) \sin \varphi_2, \\ p_4 &= r_2 \sin \varphi_2, q_4 = P_2 \sin \varphi_2 - (k_2/r_2). \end{aligned}$$

Хотя функции, определяющие замену переменных, имеют особенности на плоскостях $p_1 = p_2 = 0$ и $p_3 = p_4 = 0$, эти переменные очень удобны при исследовании. Гамильтониан H в этих переменных имеет вид $H = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + (P_1^2 + k_1^2/r_1^2)/2 + (P_2^2 + k_2^2/r_2^2)/2 + \varepsilon_1 r_1^2 + \varepsilon_2 r_2^2 + [Ar_1^4 + 2Br_1^2 r_2^2 + Cr_2^4]/4$.

Следовательно, k_1, k_2 становятся новыми параметрами, поскольку они являются интегралами в этих переменных, а переменные φ_1, φ_2 являются циклическими переменными. Поэтому гамильтонова система по переменным (P_1, P_2, r_1, r_2) становится системой с двумя степенями свободы, зависящей от параметров $k_1, k_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Нужно изучить эту систему и ее зависимость от параметров. Наиболее простой система является при нулевых значениях параметров k_1, k_2 , тогда ее фазовым пространством является R^4 и она не имеет особенностей. При ненулевых значениях k_1, k_2 фазовым пространством становится многообразие с конической особенностью и изучение становится более сложным. Следует отметить, что эта система в R^4 при некоторых изолированных значениях коэффициентов A, B, C является интегрируемой, см., например, [3], однако для почти всех значений коэффициентов она неинтегрируема.

Полученная система имеет две инвариантные плоскости, на которых ограничение системы дает одну из возможных систем Дюффинга. В частности, когда одна из подсистем имеет седло с двумя гомоклиническими петлями, а вторая имеет нелинейный центр, то эта система неинтегрируема, согласно теоремам из [4], [5].

Теорема. При всех значениях отношения B/A , кроме целых чисел $l(l-1)/2, l \in N$, система неинтегрируема.

В случае, когда состояние равновесия в начале координат седло, на обеих инвариантных плоскостях имеем системы Дюффинга с двумя петлями сепаратрис. Для доказательства неинтегрируемости в этом случае применяется метод Зиглина и его развитие в работах Симо, Моралеса-Руиса, Рамиса и др.. Он основан на исследовании линеаризованного уравнения на частном решении системы, например, периодическом на инвариантной плоскости $P_1 = r_1 = 0$. Как известно, такое решение выражается через эллиптические функции Якоби $r_2 = g(t, h) = m(h)dh(s(h)t, k)$ с положительными

гладкими функциями $m(h)$, $s(h)$, зависящими от значения уровня энергии h , в котором лежит периодическая траектория. Поскольку плоскость инвариантна, линейная система расщепляется и ее соответствующее нормальное вариационное уравнение (НВУ) имеет вид

$$d^2 r_1 / dt^2 + [\varepsilon_1 + Bm^2(h) - Bm^2(t, h)k^2(h)sn^2(s(h)t, k)]r_1 = 0,$$

где $sn(u, k)$ означает эллиптический синус Якоби, k – ее модуль. Таким образом, нормальное вариационное уравнение имеет тип Ламе. В этом случае справедлива следующая теорема

Теорема. *Если НВУ вдоль периодического решения является уравнением типа Ламе и не попадает в один из случаев (i), (ii), (iii), то гамильтонова система не имеет мероморфного интеграла независимого с гамильтонианом в окрестности периодического решения. Случаи (i), (ii), (iii) выделяют дискретное множество уравнений.*

Таким образом, можно утверждать, что гамильтонова система, задаваемая нормальной формой четвертого порядка для исходного гамильтониана, определяет при почти всех значениях коэффициентов неинтегрируемую гамильтонову систему. То, что ее динамика весьма сложна, показывают также проведенные численные эксперименты.

Опишем теперь кратко как появилось система с двойной бифуркацией Хопфа при изучении структур в уравнении Свифта-Хоенберга. Напомним, что это уравнение является одной из базовых уравнений в теории структурообразования. Также оно используется при описании поперечной структуры лазерных пучков, в гидродинамике, теории химических реакторов и т.д. В стационарном варианте, т.е. при описании стационарных структур оно имеет вид $\alpha u + \beta u^2 - u^3 - (1 + \Delta)^2 u = 0$,

где $u(x, y)$ – функция переменных (x, y) , изменяющихся на плоскости R^2 , Δ – лапласиан. При поиске решений в виде стенки, локализованной по переменной x и периодически модулированной по переменной y ее можно искать приближенно методом Бубнова-Галеркина, разлагая в ряд Фурье по y , коэффициентами которого являются функции от x , спадающие к нулю на бесконечности. Оставляя конечное число мод, мы приходим к системе уравнений второго порядка типа Лагранжа-Эйлера, число которых зависит от числа мод. В простейшем варианте после перехода к гамильтоновой системе получается система из 8 уравнений. Эта система зависит от двух параметров α, β и при $\alpha = 0$ она имеет состояние равновесия указанного выше типа в начале координат. При отрицательных значениях α состояние равновесия становится двойным седло-фокусом и его гомоклинические траектории, если они существуют, соответствуют нужным решениям. В работе [1] такие решения были найдены численно при различных значениях параметров.

Л.М.Л. благодарит за поддержку РФФ, грант 24-11-00339.

- [1] Kulagin N.E., Lerman L.M. // Physica D 454. 2023. 133845.
- [2] Van der Meer C. Hamiltonian Hopf Bifurcation. – Lect. Notes in Math. Vol. 1160. Springer-Verlag, 1985.
- [3] Lakshmanan M., Sahadevan R. // Phys. Reports. Vol. 224. Nos. 1 & 2. 1993. 1.
- [4] Grotta Ragazzo C. // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 166. P. 255.
- [5] Lerman L.M. // Selecta Math. Sov. 1991. Vol. 10, no. 3. P. 297.

ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ С РЕГУЛЯРНЫМ И ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ АРНЕОДО КОЛЛЕ-ТРЕССЕ

М.И. Малкин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Дискретная динамическая система Арнеодо-Колле-Трессе – это семейство отображений трехмерного пространства вида

$$F(x, y, z) = (ax - b(y - z); bx + a(y - z); cx - dx^k + ez), \quad (1)$$

где параметры a, b, c, d, e вещественные (b и d отличны от нуля), a, k – натуральное число, большее единицы. Эта система возникла как дискретная модель потоков, у которых есть гомоклинические точки шильниковского типа. При изменении параметров данная система может испытывать бифуркации различных типов: бифуркации удвоения, бифуркацию вилки, бифуркацию Андронова-Хопфа и др. Мы показываем, что существуют сценарии в пространстве параметров, при которых некоторые параметры стремятся к бесконечности, а поведение системы становится хаотическим, причем система ведет себя как отображение Бернулли с двумя или тремя состояниями (в зависимости от четности натурального (фиксированного) k).

Отметим, что в случае, когда параметр e отличен от нуля, отображение Арнеодо-Колле-Трессе – это диффеоморфизм трехмерного пространства с постоянным якобианом, равным $(a^2 + b^2)e$, а обратное отображение имеет вид

$$F^{-1}(x, y, z) = (x', \frac{-bx' + ay}{a^2 + b^2} + z', z'), \quad (2)$$

где $x' = (ax + by) / (a^2 + b^2)$, $z' = (z - cx' + dx^k) / e$.

Результаты

Мы показываем, что кроме областей с хаотическим поведением в пространстве параметров выделяются области регулярного поведения, это области устойчивости тривиального и нетривиального состояний равновесия, а также область устойчивости периодической орбиты периода 2. Границами данных областей устойчивости являются указанные (классические) бифуркации.

Оказывается, что при любых параметрах (соответствующих как регулярному, так и хаотическому поведению системы), неблуждающее множество отображения Арнеодо-Колле-Трессе компактно. Этот результат следует из [1], [2], т.к. данное отображение можно записать в виде разностного уравнения третьего порядка, у которого имеется ведущий член от одной переменной. Мы вычисляем границы параллелепипеда, содержащего неблуждающее множество (в терминах исходных параметров).

Компактность неблуждающего множества данной системы (на некомпактном фазовом пространстве) позволяет оценить топологическую энтропию.

Действительно, любой гомеоморфизм $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ может быть продолжен до отображения на одноточечной компактификации $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ и тем самым, может быть определена топологическая энтропия $h(f)$ как энтропия на этом компактном расширении.

Однако в случае, когда неблуждающие орбиты отображения неограничены, такое расширение может неадекватно соответствовать пониманию энтропии, поскольку может (априори) добавить к реальной сложности динамического поведения орбит сложность неограниченных орбит, уходящих на бесконечно большие расстояния и возвращающихся в конечную часть пространства. Мы показываем, что в случае отображений Арнеодо-Колле-Трессе такая ситуация невозможна, т.к. для таких отображений $\{\infty\}$ является тривиальным аттрактором и поэтому $h(f) = h(f|_{NW(f)})$, где $NW(f)$ – неблуждающее множество отображения f . Тем самым, два указанных определения топологической энтропии на некомпактном фазовом пространстве в случае отображений Арнеодо-Колле-Трессе эквивалентны.

Известны сценарии хаотического поведения отображений Арнеодо-Колле-Трессе для областей в пространстве параметров при рассмотрении двухпараметрических семейств с параметрами c и d , стремящихся к бесконечности так, что их отношение остается ограниченным. При этом для достаточно больших c и d в данной динамической системе содержится подсистема, топологически сопряженная со схемой Бернулли их двух или трех символов (в зависимости от четности k). Похожие сценарии хаотического поведения наблюдаются в некоторых трёхпараметрических семействах при уходе пары параметров на бесконечность, в то время как третий стремится к нулю.

Для указанных сценариев в фазовом пространстве возникают динамические структуры топологических подков. Мы показываем, что существуют другие сценарии хаотического поведения в конечной части пространства параметров, но при этом хаос получается не за счет существования топологических подков, а в результате сопряженности подсистемы с кусочно-монотонным одномерным отображением, имеющим положительную топологическую энтропию. В частности, для малых (ненулевых) параметров a и e отображение Арнеодо-Колле-Трессе является диффеоморфизмом, а при нулевых значениях этих параметров якобиан отображения становится равным 0. Это позволяет при возмущениях параметров связать динамику отображения Арнеодо-Колле-Трессе с поведением одномерного отображения

$$g(x) = (bc - b^2)x - bdx^k \quad (3)$$

Вычисление топологической энтропии данного одномерного отображения (с помощью эффективных алгоритмов с использованием нидинг-рядов [3], [4]) показывает положительность топологической энтропии для определенных параметров и тем самым указывает наличие областей в пространстве параметров с хаотическим поведением. Например, хаос отображения Арнеодо-Колле-Трессе имеет место при $k = 4, b = 2, d = 1, c = tb$, когда коэффициент t принимает значения в промежутке (1.47; 1.54).

Регулярное поведение отображения Арнеодо-Колле-Трессе связано с областями устойчивости тривиальной неподвижной точки (начала координат), одной или двух симметричных неподвижных точек, существующих в определенных областях параметров), и симметричной орбиты периода 2. Аналитическое исследование областей устойчивости показывает, какие бифуркации определяют границы данных областей. Такими бифуркациями являются транскритическая бифуркация, бифуркация вилки, бифуркация удвоения и бифуркация Андронова-Хопфа.

Работа выполнена при поддержке фонда РНФ (проект 23-71-30008).

- [1] Malkin M.I., Li M-C. // Journal of Dynamical and Control Systems. 2004. Vol. 10, no. 3. P. 377.
- [2] Rand D. // The topological classification of Lorenz attractors. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1978. Vol. 83, no. 3. P. 451.
- [3] Malkin M.I., Ming-Chia Li // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, no. 11. P. 3353.
- [4] Malkin M.I. // Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings. Selecta Math Sovietica. 1991. Vol. 10. P. 265.

КОМБИНАТОРНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ ХАОСА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА

М.И. Малкин, Р.Н. Решетилов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Одномерные отображения отрезка $[0; 1]$ с двумя интервалами монотонности (лоренцевские отображения) моделируют отображения Пуанкаре систем с аттрактором типа Лоренца [1], а также унимодальные отображения интервала [2]. Для лоренцевского отображения f можно определить множество чисел вращения, рассматривая f как разрывное отображение окружности, получаемое из $[0; 1]$ отождествлением концов. Эквивалентное определение числа вращения можно получить как статистическое среднее асимптотического поведения траектории. Описанный подход к исследованию лоренцевских отображений используется, например, в работах [3] и [4]. В частности, в [4] доказано, что множество вращения лоренцевского отображения либо одноточечно, либо является отрезком, и более того, невырожденный отрезок вращения влечет сильные хаотические свойства (положительность топологической энтропии и наличие периодических орбит всех достаточно больших периодов).

Дж. Милнор и У. Терстон для исследования динамики непрерывных отображений отрезка предложили символическое представление в виде нидинг-техники ([5]), эти идеи были развиты в работах [6] и [7] для разрывных отображений лоренцевского типа. Авторы [5], [6] и [7] ввели и использовали нидинг-ряды – формальные степенные ряды, коэффициенты которых есть нидинг-инварианты отображения. Функциональные свойства нидинг-рядов позволяют получить важную информацию о динамике лоренцевских отображений. В рамках текущей работы используется определение нидинг-последовательности, производящая функция которой является нидинг-рядом.

Сформулированный в [8] критерий допустимости (реализуемости) нидинг-ряда, а также свойства отображения, сопоставляющего точке её нидинг-ряд, и базовые соображения комбинаторики слов позволяют в символических терминах обнаружить хаос в смысле нетривиального отрезка вращения.

Нидинг-последовательности лоренцевских отображений

Обозначим L_ω множество всех ω -слов (бесконечных вправо последовательностей) над двухбуквенным алфавитом $\{a; b\}$. Для обозначения i -ой буквы слова $A \in L_\omega$ будем использовать символ $A^{[i]}$. Введем на L лексикографический порядок, индуцированный неравенством $a < b$, и топологию тихоновского произведения. Будем рассматривать следующую метрику, согласованную с тихоновской топологией:

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \delta(A^{[i]}, B^{[i]})}{2^i}. \quad (1)$$

Здесь $\delta(x, y)$ – символ Кронекера. Обозначим через σ отображение одностороннего сдвига на L_ω (забывания первой буквы ω -слова).

Дадим определение лоренцевского отображения. Отображение $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ с единственной точкой разрыва c называется лоренцевским, если f возрастает и непрерывно на полуинтервалах $[0; c)$ и $(c; 1]$, причем $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 0$.

Каждой точке, траектория которой не проходит через c , сопоставим символическую последовательность $K = K_x(f)$ посещения интервалов непрерывности:

$$K_x^{[i]}(f) = \begin{cases} a, & \text{если } f^{i-1}(x) \in [0; c) \\ b, & \text{если } f^{i-1}(x) \in (c; 1] \end{cases} \quad (2)$$

Если $f^n(x) = c$, определим последовательности K_{x^+} и K_{x^-} следующим образом:

$$K_{x^+} = \lim_{x \rightarrow c^+} K_x; K_{x^-} = \lim_{x \rightarrow c^-} K_x. \quad (3)$$

Пределы здесь понимаются в тихоновской топологии ([6]). Так, для каждой точки x определена пара последовательностей $(K_{x^+}$ и $K_{x^-})$, которые мы будем называть нидинг-последовательностями. В [6] показано, что функция, сопоставляющая точке её нидинг-последовательность, не убывает в следующем смысле (в лексикографическом порядке): для $x < y$:

$$K_{x^-} \leq K_x \leq K_{x^+} \leq K_{y^-} \leq K_y \leq K_{y^+}. \quad (4)$$

Кроме этого, в [6] показано, что пара нидинг-последовательностей $K_{c^-}(f); K_{c^+}(f)$ является полным символическим описанием отображения f . Из K_{c^-} и K_{c^+} , (забывая несущественную первую букву), получаем последовательности K_1 и K_0 , которые мы будем называть нидинг-инвариантами. Мы сосредоточим внимание на случае, когда K_0 и K_1 являются периодическими ω -словами. Периодическое ω -слово A с периодической частью B будем обозначать $A = B^\omega$.

По данным нидинг-инвариантам $K_0; K_1$ отображения f можно построить словарь ω -слов, достижимых по траекториям. ω -слово K будем называть f -допустимым, если найдется такая точка $x \in [0; 1]$, что $K_x = K$, или $K_{x^+} = K$, или $K_{x^-} = K$. Словарь всех допустимых нидинг-последовательностей данного отображения f будем обозначать A_f . Критерий допустимости, доказанный в [8], в терминах концевых инвариантов будет сформулирован так. ω -слово K является f -допустимым в том и только в том случае, когда для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$K_0(f) \leq \sigma^n(K) \leq K_1(f). \quad (5)$$

Условия (4) и (5) позволяют судить о сосуществовании некоторых символических последовательностей в словаре f -допустимых. Пусть, например, про отображение f известно, что $X = (a^3b^4)^\omega \in A_f$. Тогда по (5), $K_0(f) \leq W$, а $K_1(f) \geq \sigma^3(W) = (b^4a^3)^\omega$. Возьмем теперь слово $Y = (ab)^\omega$. Ясно, что слово Y имеет всего две различных перестановки: $\{Y, \sigma(Y)\}$, каждая из которых больше (лексикографически), чем X (а значит, и чем K_0) и меньше, чем $\sigma^3(W)$ (а значит, меньше, чем K_1). Таким образом, $X \in A_f$ влечет $Y \in A_f$.

Для всякого ω -слова K над $\{a; b\}$ введем функцию ρ и определим число вращения, а также определим множество вращения лоренцевского отображения f :

$$\rho(K) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(K^{[i]}, b) \quad (6)$$

$$R(f) = \{\rho = \rho(K) \mid K \in A_f\} \quad (7)$$

Как было сказано во Введении, множество вращения лоренцевского отображения – отрезок или точка [4]. Значит, наличие в словаре A_f хотя бы двух нидинг-последовательностей X, Y с разными числами вращения $\rho_X \neq \rho_Y$ уже влечет хаос в смысле невырожденного множества вращения. ω -слова X и Y , приведенные выше в качестве примера, удовлетворяют этому условию, и всякое лоренцевское отображение, словарь которого содержит ω -слово X , является хаотичным в смысле невырожденного отрезка вращения. Далее мы приведем ограничения на периодическое ω -слово, гарантирующие возникновение невырожденного отрезка вращения. Дадим некоторые необходимые определения, связанные с комбинаторикой конечных слов.

Слова Линдона и невырожденность отрезка вращения

Обозначим L моноид (с операцией конкатенации) всех конечных слов над алфавитом $\{a; b\}$. Зададим на нем лексикографический порядок с дополнительным условием $AB \geq A$. Прimitивным называется слово, не являющееся степенью (в смысле конкатенации) никакого другого слова. Периодическое ω -слово наименьшего периода n определяется собственным конечным примитивным префиксом длины n .

На L введем циклическую перестановку σ . Для пустого слова $\sigma(\lambda) = \lambda$. Непустое слово $A \in L$ представимо в виде $A = xB$ (x – первая буква слова A ; B – некоторое, возможно, пустое слово). Тогда $\sigma(A) = \sigma(xB) = Bx$.

Слова $A, B \in L$ такие, что $B = \sigma^n(A)$, при некотором натуральном n , называются сопряженными. Сопряженность – это отношение эквивалентности на множестве L . Среди всех различных циклических перестановок конечного примитивного слова A можно выбрать наименьшую в лексикографическом смысле. Примитивное слово, являющееся наименьшим словом своего класса сопряженности, называется словом Линдона [9]. В силу (4) инвариант K_0 в случае периодичности имеет вид A^ω , где A слово Линдона.

Для всякого слова $A \in L \cup L_\omega$ обозначим $I(A)$ слово, полученное заменой всех букв на противоположные и $I_1(A)$ – слово, в котором обращена только первая буква. Из (4) следует, что $K_1 = I(A^\omega)$ в случае периодичности K_1 .

Среди слов Линдона выделим слово A длины больше 1, для которого найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sigma^n(A) > I_1(A). \quad (8)$$

Слово, удовлетворяющее условию (8), будем называть особым. Ясно, что неравенство (8) для особого слова A может выполняться при разных натуральных n (например, a^3b^4). Наименьшее натуральное n , при котором неравенство (8) имеет место, назовем

порядком особого слова. Рассмотрим слово $B = \sigma^n(A)$, где n – порядок особого слова A . Поскольку $B^{[1]} \geq I_1(A)^{[1]} = b$, то $B^{[1]} = b$. Таким образом, любое особое слово A можно представить в виде $A = aVbW$, где $|V| + 1 = n$ – порядок особого слова. Будем обозначать особое слово $E_{V,W}$. Выделенное подслово V (как и W) особого слова не может быть пустым: предположение, что V (или W) пусто, приводит к невозможному неравенству $Wa > bW$ (или $aV > Vb$).

Как мы выяснили ранее, некоторые ω -слова, будучи допустимыми в системе, провоцируют допустимость другого ω -слова. Основным результатом настоящего исследования является следующий достаточный признак.

Пусть $E_{V,W} = aVbW$ особое слово и Vb слово Линдона. Тогда из $(aVbW)^\omega \in A_f$ следует $(Vb)^\omega \in A_f$.

Итак, если $\rho((E_{V,W})^\omega) \neq \rho((Vb)^\omega)$ и Vb слово Линдона, то нидинг-последовательность $(E_{V,W})^\omega$ нетривиальна: всякое f такое, что $(E_{V,W})^\omega \in A_f$, имеет невырожденный отрезок вращения. Таким образом, для выполнения неравенства достаточно, чтобы

$$|W|_b(|V| + 1) \neq (|V|_b + 1)(|W| + 1). \quad (9)$$

(Здесь $|V|$ и $|W|$ – длины слов V и W , $|V|_b$ и $|W|_b$ – количество букв b в словах V и W).

- [1] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. // О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Издательство Московского университета. 1982. Тр. ММО. С. 44.
- [2] Malkin M.I., Ming-Chia Li // Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13.11. P. 3353.
- [3] Keener J.P. // Transactions of the American Mathematical Society. 1980. Vol. 261, no. 2. P. 589.
- [4] Malkin M.I. // Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings. Selecta Math Sovietica. 1991. Vol. 10. P. 265.
- [5] Milnor J.W., Thurston W.P. On Iterated Maps of the Interval. – Preprint. 1977.
- [6] Malkin M.I. // Ukr Math J. 1980. Vol. 32. P. 398.
- [7] Malkin M.I. // On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval. Selecta Mathematica Sovietica. 1989. Vol. 8:12. P. 131.
- [8] Rand D. // The topological classification of Lorenz attractors. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1978. Vol. 83. 3. P. 451.
- [9] Шур А.М. Комбинаторика слов. – Издательство Уральского университета. 2004, 96 с.

О СМЕШАННОЙ ДИНАМИКЕ В УРАВНЕНИИ ДУФФИНГА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЦЕНТРОМ ПРИ ОБРАТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

К.Е. Морозов, К.В. Чижов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Мы изучаем бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в системе:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 + p_1 xy + p_2 \sin vt, \quad (1)$$

которую можно рассматривать как периодическое во времени неконсервативное возмущение классической системы Дуффинга с нелинейным центром в начале координат:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3. \quad (2)$$

Возмущение выбирается таким образом, чтобы система (1) была обратимой, то есть инвариантной относительно инволюции $R_x : (x, y) \mapsto (-x, y)$ и обращения времени $t \mapsto -t$.

В автономном случае ($p_2 = 0$), при $0 < |p_1| < 2\sqrt{2}$, система (1) является неконсервативной (дивергенция $\sigma = p_1 x \neq 0$), однако в любой области фазового пространства она топологически эквивалентна невозмущенной системе. В дальнейшем мы фиксируем $p_1 = 1 < 2\sqrt{2}$, $v = 3$ и изменяем p_2 в $[0, 6]$.

Для $p_2 \neq 0$ мы показываем, что смешанная динамика, как явление пересечения аттрактора и репеллера [1], возникает в соответствующем отображении Пуанкаре T за период $2\pi/v$. Отметим, что отображение T является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом, обратимым относительно той же инволюции R_x . При малых значениях параметра p_2 в численных экспериментах динамика T неотличима от консервативной: наблюдаются замкнутые инвариантные кривые, окружающие начало координат, а также четко видимые резонансные гирлянды эллиптических островов. Анализ резонансных зон показывает, что в первом порядке только главный резонанс является расщепляемым. Однако, поскольку в данном случае среднее значение дивергенции $\sigma = p_1 x$ по замкнутым фазовым кривым зануляется, возникают резонансы более высоких порядков, связанные с наложением гармоник. Общее число расщепляемых резонансов стремится к бесконечности при $p_2 \rightarrow 0$, однако ширина соответствующих резонансных зон резко убывает с ростом порядка резонанса. В резонансных зонах мы обнаружили гомоклинические касания инвариантных многообразий симметричных седловых орбит, развёртки которых, как известно (см., например, [1]), приводят к появлению бесконечно большого числа стоков и источников, замыкания множеств которых имеют непустое пересечение. Таким образом, смешанная динамика в системе (1) образуется уже при малых значениях p_2 , однако, она проявляется лишь на сверхмалых масштабах, которые иннеразличимы для используемых нами численных методов.

Совершенно другая ситуация наблюдается при увеличении p_2 , когда смешанная динамика становится доминирующей, см. рис. На рис. показан фазовый портрет отображения Пуанкаре для $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, где аттрактор и репеллер показаны красным и синим цветами, соответственно. Они занимают почти одну и ту же область фазового пространства, но при этом сильно различаются и их различия остаются отчетливо

заметными даже при увеличении числа итераций. Это связано с тем, что прямые и обратные итерации отображения порождают взаимно сингулярные инвариантные меры на хаотическом множестве.

В докладе мы описываем бифуркационный сценарий, который приводит к постепенному проявлению смешанной динамики, наблюдаемой в численных экспериментах, на фоне консервативной динамики. Ключевую роль здесь играют бифуркации потери симметрии для R_x -симметричных периодических орбит, которые мы отслеживаем для периодов вплоть до 6. Для орбит всех изученных периодов, за исключением фиксированных точек, мы находим обратимую pitchfork-бифуркацию, при которой симметричная эллиптическая орбита превращается в консервативное седло, порождая R_x -симметричную пару «сток-источник» с одинаковым периодом. Для орбит периодов выше 2, эти пары подвергаются каскаду бифуркаций удвоения периода, что в конечном итоге приводит к появлению аттракторов и репеллеров типа Эно. Затем эти аттракторы и репеллеры вовлекаются в общую хаотическую структуру через гетероклинические бифуркации. Как только все периодические орбиты низких периодов становятся седловыми, мы наблюдаем хаотический режим, соответствующий смешанной динамике, см. рис.

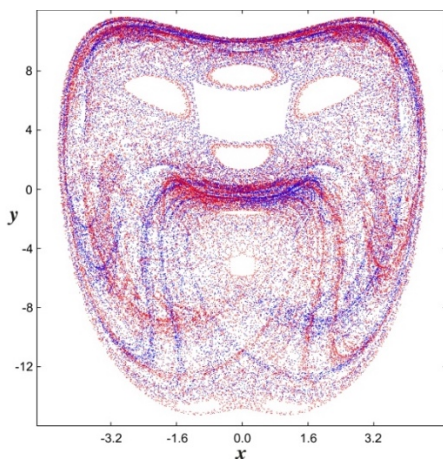


Рис.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 24-11-00339.

- [1] Gonchenko S.V. and Turaev D.V. On three types of dynamics and the notion of attractor, Proc. Steklov Inst. Math. 2017. Vol. 297. P. 116.

ОТСУТСТВИЕ C1-ОМЕГА ВЗРЫВА В ГЛАДКИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ С ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Д.А. Новожилов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Отображения, заданные формулой (1), с фазовым пространством $I^n = \prod_{i=1}^n I_i$, где I_i – отрезок вещественной прямой для каждого $1 \leq i \leq n$, будем называть косым произведением отображений интервала.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)). \quad (1)$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat{f}_j = (f_1, f_2, \dots, f_j), \hat{x}_j = (x_1, x_2, \dots, x_j), 2 \leq j \leq n. \quad (2)$$

Явление Ω -взрыва для гладких косых произведений в плоскости изучалось в [1]–[2]. В [3] были получены необходимые и достаточные условия и описан механизм возникновения C^0 - Ω -взрыва для косых произведений на клетках произвольной размерности.

Мы будем рассматривать пространства $SP^0(I^n)(SP^1(I^n))$ всех непрерывных (C^1 -гладких) косых произведений (1), наделенные $C^0(C^1)$ -нормой, индуцированной стандартной $C^0(C^1)$ -нормой пространства $C^0(I^n)(C^1(I^n))$ всех непрерывных (C^1 -гладких) отображений -мерной клетки I^n в себя.

Обозначим $SP_1^0(I^n)$ подпространство всех C^1 -гладких косых произведений отображений интервала, наделенное C^0 -нормой пространства $SP^0(I^n)$.

Приведем основные определения, используемые в работе.

Определение 1. Множество $\Omega(F)$ отображения $F \in SP_1^0(I^n)(SP^1(I^n))$ назовем неблуждающим, если оно содержит все точки фазового пространства, для каждой из которых выполнено следующее условие:

для любой окрестности $U^n(x)$ точки x в I^n найдется натуральное число k , для которого справедливо

$$U^n(x) \cap F^k(U^n(x)) \neq \emptyset. \quad (3)$$

Определение 2. Будем говорить, что отображение $F \in SP_1^0(I^n)(SP^1(I^n))$ допускает Ω -взрыв в пространстве $SP_1^0(I^n)(SP^1(I^n))$, если существует $\delta > 0$ такое, что в любой ε -окрестности $B_{n,\varepsilon}^{01}(F)(B_{n,\varepsilon}^1(F))$ отображения F в пространстве $SP_1^0(I^n)$ (в пространстве $SP^1(I^n)$) найдется отображение Φ , для которого выполнено $\Omega(\Phi) \not\subset$

$U_\delta(\Omega(F))$, где $U_\delta(\Omega(F))$ есть δ -окрестность в I^n неблуждающего множества $\Omega(F)$ отображения F .

Косые произведения с ограниченным множеством (наименьших) периодов периодических точек будем называть простейшими.

Определение 3. ε -цепью относительно отображения F , соединяющей точки x' и x'' , называется конечное множество точек $\{u^j\}_{j=0}^m$ ($m \geq 1$) таких, что $u^0 = x'$, $u^m = x''$, причем для всех $j=1, \dots, m$ выполнено:

$$d^n(F(u^{j-1}), u^j) < \varepsilon, \quad (4)$$

здесь d^n — метрика, согласованная с топологией произведения в I^n .

Определение 4. Пусть $F \in SP_1^0(I^n)$ и множество $Per(F)$ замкнуто, K_1^{j+1}, K_2^{j+1} различные подмножества множества $Per(f_{j+1}^\wedge)$. Будем говорить, что K_2^{j+1} достижимо из множества K_1^{j+1} ($K_1^{j+1} \rightarrow^a K_2^{j+1}$), если найдутся точки $z^1(x_j, x_{j+1}^1) \in K_1^{j+1}$ и $z^2(x_j, x_{j+1}^2) \in K_2^{j+1}$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -цепь относительно сужения $F|_E$,

соединяющая z^1 с z^2 , где $E = Orb_{f_j}(x_j) \times I_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$, $x_1 \equiv x_1$, $f_1 = f_1$.

Теорема 1.

Пусть $F \in SP_1^0(I^n)$ — простейшее косое произведение ($n \geq 2$), для которого $F^{-1}(Per(F)) = Per(F)(F^{-1}(\cdot))$ — полный прообраз множества. Отображение F допускает Ω -взрыв в $SP_1^0(I^n)$ тогда и только тогда, когда для него выполнено одно из следующих условий:

1) найдется натуральное число j , $1 \leq j \leq n-1$, и связная компонента $K^{\wedge^{j+1}}$ множества $Per(f_{j+1}^\wedge)$ такие, что для некоторой точки $x_j \in Per(f_j)$ срез $(K^{\wedge^{j+1}})(x_j)$ не является связным множеством;

2) либо, в противном случае, для любого $\delta > 0$ найдется конечный набор связных компонент $\{K_i\}_{i=1}^q$ ($q=q(\delta)$, $q > 1$) множества $Per(F)$ такой, что $K_q \rightarrow^a K_1$, и для любого $1 \leq i \leq q-1$ выполнено одно из следующих условий: $K_i \rightarrow^a K_{i+1}$ или $d^n(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Здесь срез множества $K^{\wedge^{j+1}}$ слоем над точкой x_j определяется по следующей формуле: $(K^{\wedge^{j+1}})(x_j) = \{x_{j+1} \in I_{j+1} \mid (x_j, x_{j+1}) \in K^{\wedge^{j+1}}\}$.

Механизм Ω -взрыва в простейших косых произведениях, принадлежащих пространству $SP_1^0(I^n)$, связан с возможностью аппроксимировать любое C^1 -гладкое косое произведение (даже с ограниченным множеством (наименьших) периодов периодических точек) с произвольной степенью точности в C^0 -норме с помощью C^1 -гладких косых произведений, имеющего периодические орбиты сколь угодно больших периодов.

В C^1 -гладкой топологии простейшие C^1 -гладкие косые произведения не могут допускать -взрыв ни при каких условиях.

Теорема 2.

Пусть $F \in SP^1(I^n)$ имеет замкнутое множество $Per(F)$. Тогда F не допускает -взрыв в пространстве $SP^1(I^n)$. Более того, существует окрестность $B_{n,\varepsilon}^1(F)$ отображения F в пространстве $SP^1(I^n)$ такая, что множество (наименьших) периодов периодических точек равномерно ограничено (по отображению) в этой окрестности.

Более того, справедливо следующее универсальное свойство (не зависящее от размерности фазового пространства).

Теорема 3.

Пусть отображение $F \in SP^1(I^n)$ не содержит периодических точек периода 2^i , тогда найдется окрестность $B_{n,\varepsilon}^1(F)$ отображения F в пространстве $SP^1(I^n)$ такая, что любое отображение $\Phi \in B_{n,\varepsilon}^1(F)$ не содержит периодических точек периода 2^{i+1} .

Работа выполнена совместно с Л.С. Ефремовой.

- [1] Ефремова Л.С. // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 3(1). С.130.
- [2] Ефремова Л. С. // СМФН. 2013. Т. 48. С. 36.
- [3] Efremova L., Novozhilov D. // Regular and Chaotic Dynamics. 2025. Vol. 30 (1). P. 120.

ОБ ОДНОМЕРНОМ НЕХАОТИЧЕСКОМ АТТРАКТОРЕ ПРОСТЕЙШЕГО КОСОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА МНОГОМЕРНОЙ КЛЕТКЕ

М.А. Шалагин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \quad (1)$$

с фазовым пространством $I^n = \prod_{i=1}^n I_i$, где I_i - отрезок вещественной прямой для каждого $1 \leq i \leq n$.

Обозначим через $SP^0(I^n)$ пространство всех непрерывных косых произведений вида (1), наделенное C^0 -нормой, индуцированной стандартной C^0 -нормой пространства $C^0(I^n)$ всех непрерывных отображений n -мерной клетки I^n в себя.

Для всех $2 \leq i \leq n$ будем использовать следующие обозначения

$$x^{i-1} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}), f_i(x_1, \dots, x_i) = f_{i, x^{i-1}}(x_i).$$

Топологическая структура омега-предельных множеств простейших (то есть имеющих ограниченное множество периодов периодических точек) косых произведений отображения интервала на клетке произвольной конечной размерности подробно изучалась в статьях [1]-[2]. В этих же работах были найдены необходимые условия существования одномерных омега-предельных множеств. В [3] был описан пример дифференцируемого отображения, имеющего одномерное омега-предельное множество. В этой работе приведен новый пример отображения с указанными свойствами.

В контексте данной работы естественно рассматривать омега-предельные множества как нехаотические аттракторы непрерывных косых произведений. Приведем строгое определение этого понятия.

Определение (см. [1]). Нехаотическим аттрактором косого произведения $F \in SP^0(I^n)$ называют замкнутое множество $A \subset I^n$, обладающее поглощающей окрестностью, то есть окрестностью $U(A)$ со следующими свойствами:

$$F(\overline{U(A)}) \subset U(A), A = F(\overline{U(A)}) \cap \dots \cap F^n(\overline{U(A)}) \cap \dots,$$

и такое, что сужение F на множество A имеет нулевую топологическую энтропию.

Ключевым результатом, используемым в работе, является теорема о структуре омега-предельного множества простейших косых произведений на клетке произвольной конечной размерности. Обозначим через M - наибольший элемент множества (наименьших) периодов периодических точек у простейшего отображения.

Теорема 1 (см. [4]). Пусть $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$ - простейшее косое произведение отображений интервала. Тогда для любой точки $x = (x^{n-1}, x_n) \in I^n$ существуют неподвижная точка x_1^0 отображения f_1^M и отрезки $I'_2 \subseteq I_2, \dots, I'_n \subseteq I_n$ (возможно, вырожденные) такие, что ω -предельное множество $\omega_{FM}(x)$ траектории точки x относительно F^M имеет вид

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{i=2}^n I'_i, \quad (2)$$

кроме того, $\omega_{FM}(x)$ состоит из неподвижных точек F^M .

Для исследования структуры омега-предельных множеств в работе используется метод расходящихся рядов, построенных по исследуемой траектории и содержащих информацию о её асимптотическом поведении.

Теорема 2. Пусть отображение $F \in SP^0(I^n)$, $n \geq 2$ – простейшее. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(2.1) Существует точка $x = (x^{n-1}, x_n) \in I^n$ такая, что ω -предельное множество

$$\omega_{FM}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{i=2}^n I'_i, \quad (3)$$

содержит невырожденный отрезок I'_j , где $2 \leq j \leq n$;

(2.2) для $2 \leq j \leq n$ ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \phi_{j, x^{j-1}, Mp}(x_j) \quad (4)$$

– расходящийся (знакопеременный), где

$$\phi_{j, x^{j-1}, Mp}(x_j) = f_{j, x^{j-1}, M(p+1)}(x_j) - f_{j, x^{j-1}, Mp}(x_j), p \geq 1. \quad (5)$$

В данной работе построен новый пример дифференцируемого отображения, заданного на n -мерной клетке, с омега-предельным множеством, которое также является нехаотическим аттрактором, размерности 1.

Приведем явный вид построенного отображения. Рассмотрим косое произведение $F: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ вида (1) с координатными функциями, представленными ниже:

$$f_1(x_1) = x_1 - \frac{x_1^2}{2};$$

для всех $2 \leq j \leq n$

$$f_{j, x^{j-1}}(x_j) = x_j - \frac{j \cdot x_j^2}{2 \cdot j + x_1 + \dots + x_{j-1}};$$

$$f_{n, x^{n-1}}(x_n) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \psi(x^{n-1}, x_n).$$

Построенное косое произведение является дифференцируемым на всей клетке, при этом условие непрерывной дифференцируемости отображения нарушается только на

одномерном аттракторе, который представляет собой отрезок $[0,1]$, лежащий на n -ой координатной оси и состоящий из неподвижных точек отображения F .

Работа выполнена совместно с Л. С. Ефремовой.

Исследование поддержано РФФИ, грант № 24-21-00242, ссылка <https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/>

- [1] Ефремова Л. С. Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейших косых произведений отображений интервала // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 6. С. 93.
- [2] Ефремова Л. С., Шалагин М. А. О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 796.
- [3] Ефремова Л. С., Шалагин М. А. Об асимптотическом поведении траекторий косых произведений с замкнутым множеством периодических точек // Математика и теоретические компьютерные науки. 2025. Т. 3, № 3. С. 4.
- [4] Efremova L.S. Simplest skew products on n -dimensional ($n \geq 2$) cells, cylinders and tori, Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43(7). P. 1598.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО СМЕШАННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Э.Б. Велилаев, А.Э. Рассадин

НИИ ВШЭ

Рассмотрим задачу Коши для эволюционного уравнения на прямой

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{u(x + a, t) - u(x - a, t)}{2}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$. По терминологии А.Д. Мышкиса такое уравнение относится к смешанным функционально-дифференциальным уравнениям [1], поскольку в правой части одновременно участвуют значения искомой функции в точках $x + a$ и $x - a$. Цель настоящей работы состоит в численном сравнении точного решения задачи (1) с решениями двух дифференциальных приближений, возникающих при малом параметре a .

Точное решение исходной задачи

Применение преобразования Фурье по пространственной переменной приводит к скалярному уравнению для образа решения. Используя формулу Ангера, получаем представление точного решения через функции Бесселя первого рода:

$$u_{mix}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t) u_0(x - na). \quad (2)$$

Для вычислений ряд (2) заменяется конечной суммой. В дальнейшем используется фиксированное усечение $N = 30$:

$$u_{mix,30}(x, t) = \sum_{n=-30}^{30} J_n(t) u_0(x - na). \quad (3)$$

При рассматриваемых временах сумма модулей отброшенных коэффициентов мала: для $t = 1$ она порядка 10^{-43} , для $t = 5$ порядка 10^{-22} , а для $t = 10$ порядка 10^{-12} . Поэтому в дальнейших сравнениях ошибка усечения существенно меньше ошибка аппроксимации дифференциальными уравнениями.

Дифференциальные приближения

Разложение правой части задачи (1) по степеням малого параметра a имеет вид

$$\frac{u(x + a, t) - u(x - a, t)}{2} = au_x(x, t) + \frac{a^3}{6} u_{xxx}(x, t) + O(a^5). \quad (4)$$

Сохранение первого члена разложения даёт уравнение переноса

$$u_t + au_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (5)$$

решение которого равно

$$u_{tr}(x, t) = u_0(x - at). \quad (6)$$

Сохранение двух первых членов разложения даёт линеаризованное уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + au_x + \frac{a^3}{6}u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (7)$$

Для начального условия $u_0(x) = \text{Ai}(x)$, где Ai – действительная функция Эйри, решение задачи (7) можно записать явно:

$$u_{KdV}(x, t) = \beta(t)^{-1/3} \text{Ai}\left(\frac{x - at}{\beta(t)^{1/3}}\right), \quad \beta(t) = 1 + \frac{a^3 t}{2}. \quad (8)$$

Формула (8) проверяется непосредственной подстановкой в (7) с использованием тождества $\text{Ai}''(x) = x\text{Ai}(x)$. Таким образом, для начального условия $\text{Ai}(x)$ все три сравниваемых решения вычисляются без решения систем линейных алгебраических уравнений и без численного интегрирования по времени.

Численное сравнение

В численном эксперименте рассматривается начальное условие $u_0(x) = \text{Ai}(x)$, действительные x , времена $t = 1, 5, 10$ и параметры $a = 0,05; 0,10; 0,25$. Сравнение проводится в равномерной норме на сетке по отрезку $[-8, 4]$. В таблице приведены максимальные отклонения решений уравнения переноса и линеаризованного уравнения КдВ от усечённого точного решения (3).

Табл.

t	a	Ошибка переноса	Ошибка КдВ
1	0,05	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-7}$
1	0,10	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$5,14 \cdot 10^{-6}$
1	0,25	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$4,90 \cdot 10^{-4}$
5	0,05	$7,86 \cdot 10^{-4}$	$8,05 \cdot 10^{-7}$
5	0,10	$6,26 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-5}$
5	0,25	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$3,04 \cdot 10^{-3}$
10	0,05	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{-6}$
10	0,10	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$6,35 \cdot 10^{-5}$
10	0,25	$2,37 \cdot 10^{-1}$	$7,14 \cdot 10^{-3}$

Из таблицы видно, что при всех рассмотренных значениях t и a линеаризованное уравнение КдВ даёт существенно более точное приближение, чем уравнение переноса. Это согласуется с формулой (4): уравнение переноса учитывает только член первого порядка по a , тогда как линеаризованное уравнение КдВ учитывает также дисперсионный член третьего порядка.

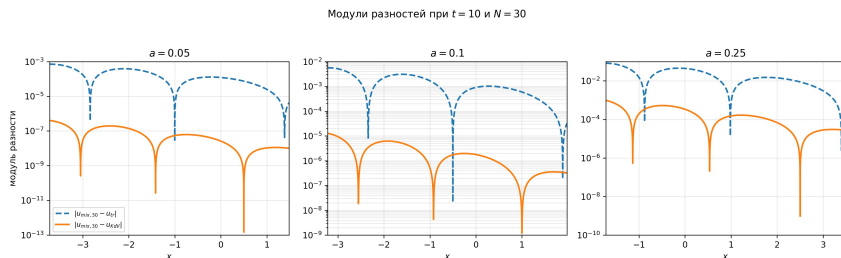


Рис.

На рисунке изображены модули разностей при $t = 10$. Волнообразный вид кривых связан с осцилляциями функции Эйри при отрицательных x . При положительных x функция $Ai(x)$ убывает экспоненциально, поэтому убывают и разности решений. Для $a = 0,25$ отличие уравнения переноса от исходного смешанного уравнения становится наиболее заметным; при этом приближение линейризованным уравнением КдВ остаётся на несколько порядков точнее.

Выводы

Получено точное представление решения смешанного функционально-дифференциального уравнения через ряд по функциям Бесселя. Для начального условия в виде функции Эйри проведено сравнение исходной задачи с двумя дифференциальными приближениями. Численные результаты показывают, что линейризованное уравнение КдВ значительно точнее описывает исходную динамику, чем уравнение переноса. Ошибки возрастают при увеличении времени и параметра a , что отражает накопление вклада отброшенных членов разложения по a .

Полученные результаты показывают, что при малых a уравнение переноса может использоваться как первое приближение, однако его точность быстро ухудшается при увеличении параметра или времени. Учёт третьей производной в линейризованном уравнении КдВ существенно снижает ошибку и сохраняет правильный дисперсионный характер решения.

Таким образом, для выбранного смешанного функционально-дифференциального уравнения линейризованное уравнение КдВ является более содержательной аппроксимацией, чем уравнение переноса. Отдельный интерес представляет дальнейшее исследование того, как качество таких приближений зависит от класса начальных данных.

- [1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972, 352 с.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

В.А. Воробьева

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Задача численного дифференцирования функции, заданной в дискретные моменты времени, является классической задачей вычислительной математики и для её решения разработаны многочисленные подходы [1], [2], [3]. В случае, когда значения функции указываются приближенно, эта задача превращается в неустойчивую задачу, встречающуюся при решении целого класса обратных задач.

Для решения неустойчивых обратных задач используются различные методы, в том числе метод динамической регуляризации, разработанные Ю.С. Осиповым, А.В. Кряжским, В.И. Максимовым и другими авторами [4], [5], [6], [7]. В свою очередь этот метод основывается на подходах теории позиционных дифференциальных игр развитой Н.Н. Красовским и его школой [8], и подходах теории некорректных задач в школах А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева.

В настоящей работе рассматривается некоторая функция $y = y(t), t \in [0; T]$, $y \in C^1([0; T])$ известна приближенно с погрешностью $\delta > 0$. То есть, вместо функции $y = y(t)$ мы знаем функцию $y_\delta = y_\delta(t), t \in [0; T]$ причем

$$|y_\delta(t) - y(t)| \leq \delta \text{ при всех } t \in [0; T]. \quad (1)$$

Ставится задача: имея результаты измерения $y_\delta(t), t \in [0; T]$ приближенно восстановить производную $y'(t)$ во всех точках $t \in (0; T]$.

Пусть задана дифференцируемая функция $y \in C^1([0; T])$, и положительные постоянные $\alpha_0 > 0, \delta_0 > 0, R > 0$,

$$\max_{[0, T]} |y'(t)| = R \quad (2)$$

и для каждого $\delta \in (0, \delta_0)$ определена измеримая функция $y_\delta: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяющая условию:

$$|y_\delta(t) - y(t)| \leq \delta \text{ при всех } t \in [0; T]. \quad (3)$$

Определим для каждого $\alpha \in (0; \alpha_0), \delta \in (0, \delta_0)$ семейство функций $z_{\delta, \alpha}(t), t \in [0, T]$, являющихся решением следующей задачи

$$\begin{cases} z'_{\delta, \alpha}(t) + \frac{1}{\alpha} z_{\delta, \alpha}(t) = \frac{1}{\alpha} y_\delta(t). \\ z_{\delta, \alpha}(0) = y_\delta(0) \end{cases} \quad (4)$$

Построенная таким образом $z'_{\delta, \alpha}(t)$ будет являться динамически регуляризированной производной для $y_\delta(t), t \in [0; T]$, и сходится к истинной $y'(t)$.

В данной работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. При всех $t \in [0, T], \alpha \in (0; \alpha_0), \delta \in (0, \delta_0)$ выполнено:

$$|z_{\delta,\alpha}(t) - y(t)| \leq \delta + \alpha R. \quad (5)$$

Следствие 1.

$$\|z_{\delta,\alpha} - y\|_C \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0, \quad (6)$$

причем

$$\|z_{\delta,\alpha} - y\|_C \leq \delta + \alpha R. \quad (7)$$

Следствие 2.

$$\|z_{\delta,\alpha} - y\|_{L_p} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0, \quad (8)$$

причем

$$\|z_{\delta,\alpha} - y\|_{L_p} \leq (\delta + \alpha R)T^{\frac{1}{p}}. \quad (9)$$

Теорема 2. При всех $t \in [0, T]$, $a \in (0; a_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$ выполнено:

$$|z'_{\delta,\alpha}(t)| \leq \frac{2\delta}{\alpha} + R. \quad (10)$$

Теорема 3. При всех $t \in [0, T]$, $\alpha \in (0; \alpha_0)$, $\delta \in (0, \delta_0)$, $\varepsilon \in (0; T)$ выполнено:

$$|z'_{\delta,\alpha}(t) - y'(t)| \leq \frac{2\delta}{\alpha} + 3R^{-\frac{\varepsilon}{\alpha}} + \omega(y'; \varepsilon) + Re^{-\frac{t}{\alpha}}, \quad (11)$$

где $\omega(y'; \varepsilon)$ – модуль непрерывности функции $y' \in C([0; T])$.

Теорема 4. (о поточечной сходимости). Пусть $y \in C^1([0; T])$. Тогда для любого $t \in (0; T]$ справедливо:

$$|z'_{\delta,\alpha}(t) - y'(t)| \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0. \quad (12)$$

Теорема 5. Пусть $y \in C^1([0; T])$. Тогда для любого $p \in [1; \infty)$

$$|z'_{\delta,\alpha}(t) - y'(t)|_{L_p(0;T)} \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Теорема 6. (о равномерной сходимости). Пусть $y \in C^1([0; T])$, $t_0 \in (0; T]$. Тогда

$$|z'_{\delta,\alpha}(t) - y'(t)|_{C([t_0; T])} \rightarrow 0, \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Результаты получены совместно с научным руководителем - доктором физико-математических наук, Калининым Алексеем Вячеславовичем.

- [1] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987, 432с.
- [2] Вержбицкий В.М. Основы численного анализа. – М.: Высшая школа, 2001, 840 с.
- [3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
- [4] Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. // В кн.: Задачи позиционного моделирования. – Свердловск, 1986, с. 41.
- [5] Максимов В.И. // Изв. РАН. Сер. Техн. Киберн. 1994. № 3. С.127.
- [6] Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. – Екатеринбург: УрО РАН, 2011, 291 с.
- [7] Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. – М.: Изд-во МГУ, 1999, 237 с.
- [8] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974, 456 с.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ

А.А. Золотнищин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Для доказательства коэрцитивности дифференциальных операторов векторного анализа, используемых в электромагнитной теории в случае неоднородных сред, требуются специальные неравенства, связывающие L_p -нормы векторных полей с L_p -нормами операций векторного анализа, примененных к данным векторным полям. В работах – с использованием специальных представлений векторных полей во внутренних ограниченных областях и в пространстве $\mathbb{R}^3$ были получены соответствующие интегральные оценки скалярных произведений векторных полей, удобные при изучении задач электромагнитной теории в неоднородных средах. В настоящей работе приводятся представления векторных полей во внешних областях, связывающие значения полей на границе со значениями полей во внешней области и примененных к этим полям операциями векторного анализа. На основании этих представлений получен новый класс интегральных неравенств для скалярных произведений векторных полей.

Элементы пространства $\mathbb{R}^3$ будем обозначать $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, канонический базис в $\mathbb{R}^3$ – $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1; 3}$. Скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будем обозначать соответственно $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ и $[\mathbf{x} \times \mathbf{y}]$, норму в $\mathbb{R}^3$ – $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Через $S_R^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$ будем обозначать сферу радиуса R с центром в начале координат, $S_1^2 = S^2$. Через $B_R(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R\}$ обозначается открытый шар радиуса R с центром в $\mathbf{x}_0$, а через $\overline{B}_R(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq R\}$ – замкнутый шар радиуса R с центром в $\mathbf{x}_0$. Также положим $B_R(0) = B_R$ и $\overline{B}_R(0) = \overline{B}_R$.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – область, $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subset \Omega - \text{компакт}\}$. Если $f \in L^p(\Omega)$, то её производную будем понимать в обобщенном смысле, т.е. если для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнено равенство

$$\int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx,$$

то функция g является обобщенной производной функции f по x_i и будем в таком случае писать $g(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Введем пространства $\{L_p(\Omega)\}^3 = \{\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \mid f_i \in L_p(\Omega), i = \overline{1; 3}\}$ и $\{C^p(\Omega)\}^3 = \{\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \mid f_i \in C^p(\Omega), i = \overline{1; 3}\}$. В пространстве $\{L_p(\Omega)\}^3$ введена следующая норма:

$$\|\mathbf{f}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} = \left\{ \int_{\Omega} |\mathbf{f}(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – область, $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3 = \{\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mid \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1;3}\}$. Если $\mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, то дифференциальные операторы rot и div будем понимать в обобщенном смысле, т.е. если выполнены равенства

$$\int_{\Omega} (\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) dx = \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \text{rot} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) dx,$$

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) dx = - \int_{\Omega} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad} \varphi(\mathbf{x})) dx$$

для всех $\boldsymbol{\varphi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то по определению считается $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \text{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, а $h(\mathbf{x}) = \text{div} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ для $\mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3$.

Также введем в рассмотрение пространства $H_p(\text{rot}, \Omega)$ и $H_p(\text{div}, \Omega)$. По определению положим:

$$H_p(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3 \mid \text{rot} \mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3\},$$

$$H_p(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3 \mid \text{div} \mathbf{f} \in L_p(\Omega)\}.$$

В данных пространствах введены следующие нормы:

$$\|\mathbf{f}\|_{H_p(\text{rot}, \Omega)} = \{\|\mathbf{f}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}^p + \|\text{rot} \mathbf{f}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}^p\}^{1/p},$$

$$\|\mathbf{f}\|_{H_p(\text{div}, \Omega)} = \{\|\mathbf{f}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3}^p + \|\text{div} \mathbf{f}\|_{L_p(\Omega)}^p\}^{1/p}.$$

Также введем следующие функциональные пространства:

$$\{L_p(\Omega; |\mathbf{x}|^{\alpha/q})\}^3 = \{\mathbf{f} \in \{L_p(\Omega)\}^3 : |\mathbf{x}|^{\alpha/p} |\mathbf{f}| \in L_p(\Omega)\},$$

$$L_p(S^2) = \left\{ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{S^2} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

$$H_p(\text{rot}; \Omega; |\mathbf{x}|^{\alpha/p}) = \{\mathbf{f} \in H_p(\text{rot}; \Omega) : \text{rot} \mathbf{f} \in \{L_p(\Omega; |\mathbf{x}|^{\alpha/q})\}^3\},$$

$$H_p(\text{div}; \Omega; |\mathbf{x}|^{\alpha/p}) = \{\mathbf{f} \in H_p(\text{div}; \Omega) : |\mathbf{x}|^{\alpha/p} |\text{div} \mathbf{f}| \in L_p(\Omega)\}.$$

Пусть $\Omega_{\text{int}} \subset \mathbb{R}^3$ – открытое подмножество, звездное относительно начала координат. Предположим, что $\partial\Omega_{\text{int}} = \Gamma$ – многообразие класса C^1 . Обозначим через $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_{\text{int}}}$, где $\overline{\Omega_{\text{int}}} = \Omega_{\text{int}} \cup \Gamma$. Для всех $\mathbf{s} \in S^2$ определим луч $l_{\mathbf{s}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = r\mathbf{s}, r \in (0; +\infty)\}$. Также введем в рассмотрение множество $S_{\Gamma} = \{\mathbf{s} \in S^2 \mid l_{\mathbf{s}} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) $S_{\Gamma} \subset S^2$ – открытое подмножество S^2 ;
- 2) Для всякого $\mathbf{s} \in S_{\Gamma}$ множество $l_{\mathbf{s}} \cap \Gamma$ состоит ровно из одной точки $\mathbf{x} = R(\mathbf{s})\mathbf{s}$, причем $\mathbf{x} = r\mathbf{s} \in \Omega_{\text{int}}$ при $r \in (0; R(\mathbf{s}))$ и $\mathbf{x} = r\mathbf{s} \in \Omega_{\text{ext}}$ при $r \in (R(\mathbf{s}); +\infty)$;

- 3) Функция $h(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$, определенная на множестве S_h , принадлежит классу $C^1(S_h)$, где $S_h = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = r\mathbf{s}, (r, \mathbf{s}) \in (0; +\infty) \times S_\Gamma\}$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1) – 3). Тогда всякую функцию $\mathbf{u} \in \{C^1(\overline{\Omega_{\text{ext}}})\}^3$ при всех $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \int_{h(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|}^1 \tau [\mathbf{u}(\tau\mathbf{x}) \times \mathbf{x}] d\tau + \int_{h(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|}^1 \tau^2 \mathbf{x} \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{u}(\tau\mathbf{x}) d\tau - \\ & - \mathbf{x} \left(\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \cdot \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{x}h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \right) \right) \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) – 3). Тогда всякую функцию $\mathbf{u} \in \{C^1(\overline{\Omega_{\text{ext}}})\}^3$ при всех $\mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \int_{h(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|}^1 (\mathbf{u}(\tau\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}) d\tau + \int_{h(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|}^1 \tau [\operatorname{rot}_{\mathbf{z}} \mathbf{u}(\tau\mathbf{x}) \times \mathbf{x}] d\tau + \\ & + \left[\mathbf{x} \times \left[\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \times \mathbf{u} \left(\frac{\mathbf{x}h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

С использованием результатов предыдущих теорем, в работе доказывается следующий результат.

Теорема 3. Пусть $\Omega_{\text{int}} = B$, $\overline{\Omega_{\text{ext}}} = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus B}$, $\mathbf{u} \in H_p(\operatorname{div}; \Omega_{\text{ext}}; |\mathbf{x}|^{\beta/p})$, $\mathbf{v} \in H_q(\operatorname{rot}; \Omega_{\text{ext}}; |\mathbf{x}|^{\alpha/q})$, $u_n \in L_p(S^2)$, причем $1/p + 1/q = 1$. Тогда, верно следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle| \leq & \mathcal{M}(|\mathbf{u}| |_{\{L_p(\Omega_{\text{ext}})\}^3} \cdot |||\mathbf{x}|^{\frac{\alpha}{q}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}| |_{\{L_q(\Omega_{\text{ext}})\}^3} \\ & + |||\mathbf{x}|^{\frac{\beta}{p}} \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{u}| |_{\{L_p(\Omega_{\text{ext}})\}^3} \cdot |||\mathbf{v}| |_{\{L_q(\Omega_{\text{ext}})\}^3} + \\ & + |\mathbf{u}_n| |_{L_p(S^2)} \cdot |||\mathbf{v}| |_{\{L_q(\Omega_{\text{ext}})\}^3}). \end{aligned}$$

- [1] Калинин А.В. // Вестник ННГУ. Мат. мод. и опт. упр. 1997. Т. 20. № 1. С. 32.
 [2] Калинин А.В., Калинкина А.А. // Изв. вузов. Математика. 2004. № 3. С. 26.
 [3] Калинин А.В. // Известия института математики и информатики. УдГУ. 2006. Вып. 3 (37). С. 55.
 [4] Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41, no. 18. P. 9283.

Секция «Динамические системы и математическая физика»

Заседание секции проводилось 20 мая 2026 г.
Председатель – А.В. Калинин, секретарь – А.А. Тюхтина.