

Труды XXX научной конференции по радиофизике

**СЕКЦИЯ
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ»**

Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.

СТРУКТУРЫ В АНСАМБЛЕ ПЯТИ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОТТАЛКИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.В. Боброва, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В ансамблях связанных фазовых осцилляторов даже при идентичности элементов и глобальном характере взаимодействия возможно возникновение широкого спектра когерентных состояний. В системах связанных фазовых осцилляторов отталкивающее взаимодействие порождает богатое разнообразие стационарных фазовых структур, включая splay states и кластерные состояния.

В работе [1] Бернером с соавторами развита общая теория устойчивости обобщённых splay states для определенного класса фазовых моделей. Показано, что такие состояния образуют многомерные многообразия (splay manifolds), а их линейная устойчивость определяется всего двумя характеристиками матрицы линеаризации – её следом и следом квадрата. Однако для конкретной размерности ансамбля и фиксированных параметров взаимодействия остаётся открытым вопрос о том, какие именно симметричные конфигурации реализуются и каковы их количественные характеристики.

Изучение таких структур важно не только с фундаментальной точки зрения, но и для понимания механизмов самоорганизации в системах разной природы: нейронных сетях, популяциях микроорганизмов, лазерных ансамблях. В данной работе исследуются симметричные фазовые структуры в ансамбле пяти идентичных фазовых осцилляторов Курамото-Сакагучи с глобальной отталкивающей связью. Для обнаруженных стационарных фазовых структур вычисляются первый и второй параметры порядка, устанавливаются соотношения между фазами, а также вводится компактная система обозначений. Особое внимание уделяется структуре, названной «трезубец», для которой впервые приводится значение второго параметра порядка.

Модель

В данной работе рассматривается модель связанных фазовых осцилляторов Курамото-Сакагучи [2]:

$$\dot{\phi}_j = \gamma + \frac{d}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\phi_k - \phi_j - \alpha), \quad (1)$$

где N – число осцилляторов, γ – собственные частоты осцилляторов, d – параметр, определяющий силу связи, α характеризует фазовую задержку в связях. Интервал $0 < \alpha < \pi/2$ соответствует притягивающей связи, при $\pi/2 < \alpha < \pi$ связь отталкивающая.

В данной работе рассмотрено поведение системы при отталкивающей связи ($\alpha = 1.6$) в случае нечетного числа осцилляторов ($N = 5$).

Симметричные структуры в ансамбле идентичных осцилляторов

Определение. Будем называть структуру симметричной, если фаза каждого осциллятора представима в виде целочисленного соотношения фаз других осцилляторов ансамбля.

Для оценки степени фазовой синхронизации системы были вычислены первый и второй параметры порядка согласно формулам:

$$R_1 = \frac{1}{N} \sum_j^N e^{i\varphi_j}, R_2 = \frac{1}{N} \sum_j^N e^{2i\varphi_j}. \quad (2)$$

Значения параметров порядка можно интерпретировать следующим образом. $R_1 = 1$ – синфазная синхронизация (достигается только при притягивающей связи), $R_1 = 0, R_2 = 1$ – синфазно-противофазная синхронизация в случае четного числа осцилляторов, $R_1 = 0, R_2 = 0$ – splay state, $R_1 = 0, R_2$ отличен от 0 и 1 – обобщенный splay state [1]. Также из [3] известно, что в случае структуры «циклоп» $R_1 = 0$, а формула второго параметра порядка для произвольного N :

$$R_2 = \frac{N-3}{N-1}. \quad (3)$$

В случае $\alpha = 1.6$ были обнаружены следующие симметричные структуры (рис. 1): 1(a) – splay state, 1(b) – «трезубец». 1(c) – «циклоп», 1(d) – «звезда». На рисунке 1 одинаковая раскраска секторов соответствует их равенству (равенству расстояний между осцилляторами). На рисунке 2 представлены графики параметров порядка в аналогичной последовательности.

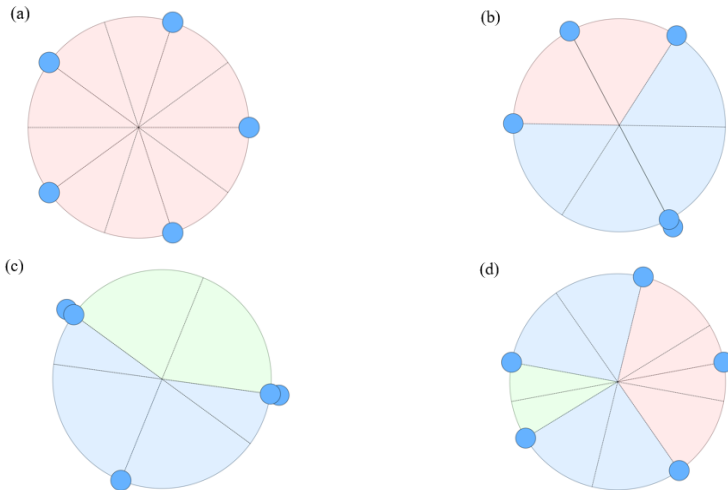


Рис. 1

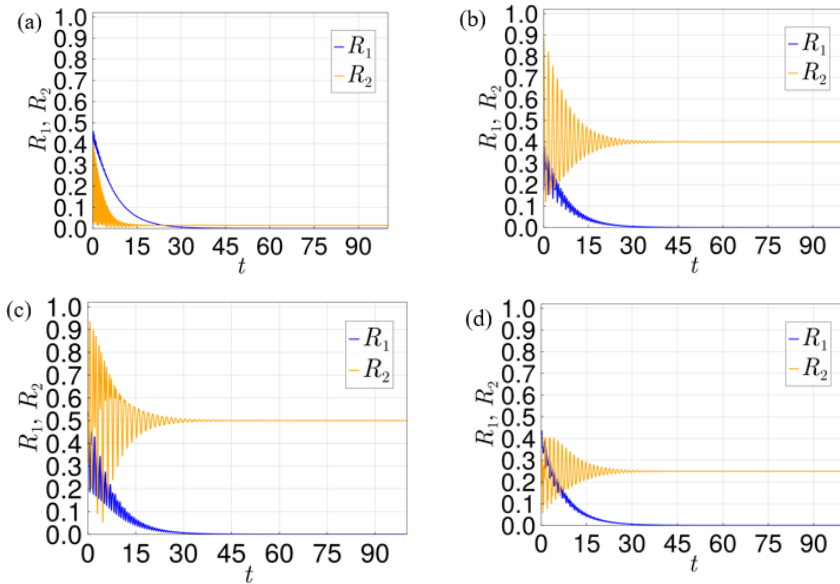


Рис. 2

Введем следующие обозначения. Знак I будет соответствовать противофазному расположению осцилляторов, знак $=$ равенству расстояний между осцилляторами.

В данной работе под splay state мы понимаем классическое равномерное распределение фаз (структура A). Следуя терминологии [1], такие состояния являются частным случаем 1-splay states – состояний с нулевым первым параметром порядка. Обнаруженные структуры: В («треугольник»), С («циклоп») и D («звезда») также являются 1-splay states ($R_1 = 0$), но характеризуются другими соотношениями фаз.

A. $1 = 1 = 1 = 1 = 1$ – splay state (рис. 1a).

$$\varphi_{j+1} - \varphi_j = \varphi_{j+2} - \varphi_{j+1} = \varphi_{j+3} - \varphi_{j+2} = \varphi_{j+4} - \varphi_{j+3} = \varphi_j - \varphi_{j+4} = \frac{2\pi}{N}. \quad (4)$$

Эволюция параметров порядка представлена на рис. 2a. Установившиеся значения: $R_1 \approx 7.14004e - 12$, $R_2 \approx 0.01536$.

B. $(1 = 1 = 1)I2$ – «треугольник» (рис. 1b). Три осциллятора образуют группу, где два расположены на равном расстоянии от центрального, фазы двух других осцилляторов совпадают и при этом находятся в противофазе относительно центрального из первой группы.

$$\varphi_4 = -\varphi_1 = -\varphi_2, \varphi_5 - \varphi_4 = \varphi_4 - \varphi_3. \quad (5)$$

Эволюция параметров порядка представлена на рис. 2b. Установившиеся значения: $R_1 \approx 7.1857e - 12$, $R_2 \approx 0.40009$.

С. $2 = 1 = 2$ – «циклоп» (рис. 1с). Один осциллятор находится между двумя парами синхронизированных осцилляторов на равном расстоянии от каждой.

$$\varphi_1 = \varphi_2, \varphi_5 = \varphi_4, \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_5 - \varphi_4. \quad (6)$$

Эволюция параметров порядка представлена на рис. 2с. Установившиеся значения: $R_1 \approx 6.78295e - 12, R_2 \approx 0.49993$.

Д. $(1 = 1 = 1)I(1 = 1)$ – «звезда» (рис. 1d). Три осциллятора образуют группу, где два расположены на равном расстоянии от центрального, а два других расположены на равном расстоянии от диаметра, проведенного от центрального осциллятора.

$$|\varphi_1 - \varphi_5| = \varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_5 - \varphi_4, \varphi_1 = -(\varphi_4 - \varphi_3)/2. \quad (7)$$

Эволюция параметров порядка представлена на рис. 2d. Установившиеся значения: $R_1 \approx 7.00338e - 12, R_2 \approx 0.24917$.

Таким образом, все приведенные параметры порядка с некоторой малой погрешностью повторяют теоретические результаты для известных структур (splay state, «циклоп»). Кроме того, экспериментально установлено значение второго параметра порядка для структуры «трезубец» – $R_2 = 0.4$.

Все обнаруженные конфигурации А-Д характеризуются значением первого параметра порядка $R_1 = 0$, что свидетельствует об их принадлежности к 1-splay manifold – многообразию состояний с нулевым первым параметром порядка. Согласно результатам [1], для модели Курамото-Сакагучи линейная устойчивость 1-splay states определяется условием $\cos \alpha < 0$, следовательно, все обнаруженные нами при $\alpha = 1.6$ структуры устойчивы.

Заключение

В работе для ансамбля пяти идентичных фазовых осцилляторов с отталкивающими связями ($\alpha = 1.6$) обнаружены четыре симметричные структуры: splay state, «трезубец», «циклоп», «звезда». Для структуры «трезубец» впервые получено значение второго параметра порядка $R_2 = 0.4$. Показано, что все найденные структуры принадлежат 1-splay manifold ($R_1 \approx 0$).

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проекты № 23-12-00180-П и № 22-12-00348-П).

- [1] Berner R., Yanchuk S., Maistrenko Yu., Schöll E // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31. P. 073110.
- [2] Sakaguchi H. // Progress of theoretical physics. 1988. Vol. 79, no. 5. P. 1069.
- [3] Munyayev O., Bolotov M., Smirnov L., Osipov G., Belykh I. // Physical Review Letters. 2023. Vol. 130, no. 10. P. 107201.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ИМПУЛЬСНО-СВЯЗАННЫХ НЕЙРОНОВ

Д.В. Чиндарев, Д.И. Большаков, М.А. Мищенко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современной нейроморфной электронике актуальной задачей является создание биологически правдоподобных и одновременно простых в аппаратной реализации моделей элементов искусственных нейронных сетей. В связи с этим в данной работе исследуются механизмы синхронизации двух неидентичных нейроноподобных генераторов с однонаправленной импульсной связью, функционирующих в режимах регулярного спайкинга и берстинга, на основе предложенной авторами имитационной модели нейрона [1] на базе системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) в среде Simulink. При этом проведенный сравнительный анализ математического и имитационного подходов позволил построить области синхронизации в параметрическом пространстве, а также подтвердить высокую устойчивость предложенной схемы к аппаратным неидеальностям, что открывает широкие перспективы для её применения в реальных нейроморфных устройствах.

Математическое и имитационное моделирование

Исходная математическая модель нейроноподобного генератора представляет собой феноменологическую систему дифференциальных уравнений третьего порядка, выведенную из общих уравнений цепи фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) с полосовым фильтром (1). Динамика системы описывается через текущую разность фаз генераторов φ , начальную частотную расстройку γ , выполняющую роль внешнего тока, и параметры инерционности фильтра $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, задающие динамический режим. Данная модель качественно воспроизводит ключевые режимы активности биологического нейрона (регулярный спайкинг, регулярный и хаотический берстинг), которые в фазовом пространстве системы соответствуют предельным циклам различной кратности.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{z} &= (\gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y).\end{aligned}\tag{1}$$

Для верификации теоретических результатов в условиях, приближенных к реальной схемотехнике, в среде Simulink была разработана имитационная модель системы (1), блок-схема которой представлена на рис. 1. В отличие от численного решения уравнений, она воспроизводит саму физическую структуру ФАПЧ на основе функциональных блоков: опорного генератора, фазового детектора, полосового фильтра второго порядка и генератора, управляемого напряжением (ГУН). Параметры этих блоков однозначно связаны с коэффициентами математической модели через линейные масштабирующие соотношения. Имитационный подход позволяет оценить устойчивость

системы к аппаратным неидеальностям, таким как эффекты квантования, фиксированный шаг дискретизации и высокочастотные помехи. Моделирование в Simulink подтвердило сохранение качественной структуры режимов активности (рис. 2), что указывает на высокую устойчивость архитектуры при её потенциальной интеграции в нейроморфную электронику.

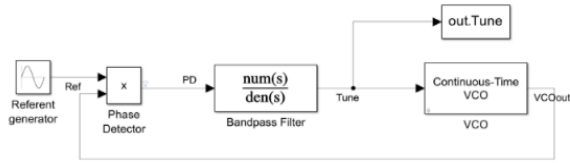


Рис. 1

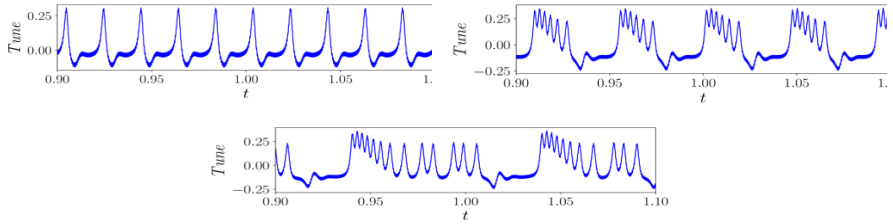


Рис. 2

Модель взаимодействия двух нейронов

Для исследования коллективной динамики разработана математическая модель системы из двух неидентичных ФАПЧ-нейронов, связанных однонаправленно. Математически взаимодействие описывается связанной системой дифференциальных уравнений, где в уравнение для ведомого нейрона вводится член синаптического тока I_{syn} . Данный ток рассчитывается через сигмоидальную функцию активации, зависящую от состояния ведущего нейрона y_1 , порогового значения θ_{syn} и параметра крутизны k_{syn} . Величина воздействия определяется коэффициентом связи d и разностью $(y_{syn} - y_2)$, где y_{syn} задает реверсивную частоту синапса.

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_1 &= y_1, \dot{y}_1 = z_1, \\
 \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\dot{z}_1 &= (\gamma_1 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})z_1 - (1 + \varepsilon_{11}\cos\phi_1)y_1, \\
 \phi_2 &= y_2, \dot{y}_2 = z_2, \\
 \varepsilon_{21}\varepsilon_{22}\dot{z}_2 &= (\gamma_2 - (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})z_2 - (1 + \varepsilon_{21}\cos\phi_2)y_2 + I_{syn}, \\
 I_{syn} &= \frac{d(y_{syn} - y_2)}{1 + \exp(-\frac{y_1 - \theta_{syn}}{k_{syn}})}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Имитационное моделирование данной системы в Simulink позволяет исследовать режимы направленной импульсной синхронизации элементов с учетом аппаратных ограничений и особенностей проектирования будущей нейроморфной электроники.

Алгоритм определения синхронизации

Для количественной оценки динамических режимов разработан комплексный подход, сочетающий феноменологический анализ сигналов имитационной модели и бифуркационный анализ исходных дифференциальных уравнений.

В среде Simulink применен пороговый метод детектирования периодов по локальным экстремумам. В спайковом режиме фиксируются межспайковые интервалы (ISI). Для пачечных колебаний (берстинга) выполняется инверсия сигнала относительно горизонтальной оси с последующим детектированием минимумов по фазе глубокой гиперполяризации (межпачечные интервалы, IBI). Критерием синхронизации выступает относительная погрешность рассогласования средних периодов ведущего и ведомого нейронов $r < 1$, установленная с учетом шага дискретизации.

$$r = \frac{|\overline{T_{pre}} - \overline{T_{post}}|}{\overline{T_{pre}}} \times 100\%. \quad (3)$$

Для теоретической верификации результатов применяется бифуркационный анализ системы дифференциальных уравнений с использованием отображения Пуанкаре. Режим синхронизации математически интерпретируется как предельный цикл в фазовом пространстве. Границы областей классической синхронизации определяются через седло-узловые бифуркации предельных циклов, а подобласти обобщенной синхронизации - через бифуркации удвоения периода. Совместное использование численного детектирования экстремумов и качественной теории дифференциальных уравнений обеспечивает взаимную верификацию результатов имитационного и теоретического моделирования.

Основные результаты

Проведено сопоставление данных качественной теории дифференциальных уравнений и численного эксперимента в среде Simulink для двух режимов активности связанных ФАПЧ-нейронов:

Спайковый режим активности (рис. 3). На теоретической бифуркационной диаграмме методами кластеризации межимпульсных интервалов и анализа отображения Пуанкаре определены границы классической синхронизации (седло-узловая бифуркация, изображенная на рисунке сплошной линией) и обобщенной синхронизации (бифуркация удвоения периода, показанная прерывистой линией). Имитационное моделирование в Simulink показало качественное и количественное совпадение с теоретической моделью: в обоих случаях зафиксирована идентичная X-образная структура областей захвата частоты.

Пачечный режим активности (рис. 4). Вследствие внутренней мультистабильности пачечного режима структура областей синхронизации усложняется, вызывая деформацию центральной X-образной зоны и выраженный разброс межпачечных интервалов.

Тем не менее, алгоритмы порогового детектирования экстремумов подтвердили сохранение качественной топологии и границ областей устойчивой синхронизации при переходе от математического описания к имитационной модели в Simulink.

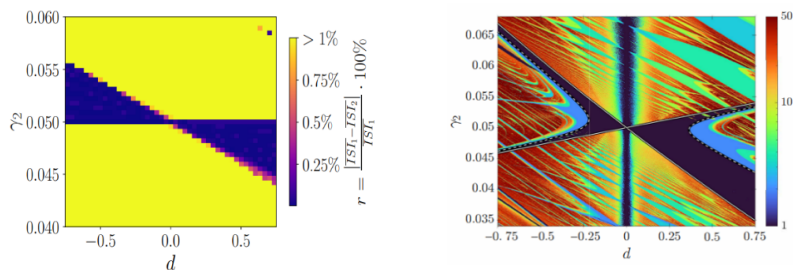


Рис. 3

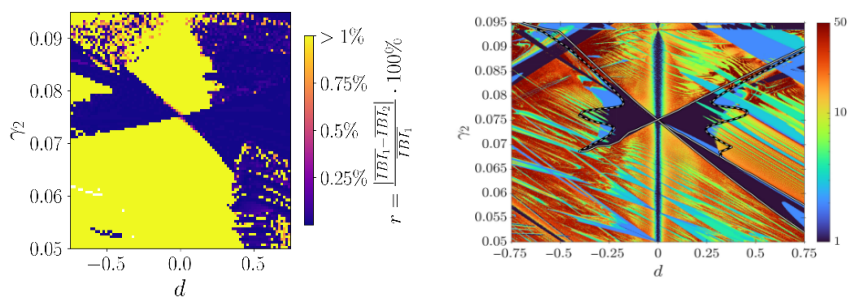


Рис. 4

Полученные результаты демонстрируют высокую точность разработанной имитационной модели и подтверждают применимость предложенной архитектуры связанных ФАПЧ-нейронов для технической реализации.

Публикация выполнена в рамках гранта Программы «Мозг» АНО «Научный центр перспективных междисциплинарных исследований «Идея».

Авторы выражают благодарность В.Г. Рыбину и Е.Е. Копец за полезные дискуссии и советы и предоставленное программное обеспечение.

- [1] Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.

ЧЕТЫРЕ СЦЕНАРИЯ ВОЗБУДИМОСТИ И БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ НЕЙРОНА

В.П. Еремеев, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Переход к генерации спайков – ключевой эффект в динамике нейронов, лежащий в основе их возбудимости и передачи информации. В простых математических моделях, описывающих динамику мембранного потенциала, такие переходы часто связаны с локальными и глобальными бифуркациями [1, 2, 3, 4]. Однако традиционные гладкие полиномиальные или экспоненциальные модели усложняют строгий бифуркационный анализ, вынуждая исследователей использовать преимущественно численные методы.

В настоящей работе предложена новая двумерная модель нейрона с дробно-рациональной нелинейностью и кусочно-линейным переключением. Ее главное математическое преимущество – возможность строгого аналитического вывода уравнений для линий локальных бифуркаций и обнаружение в центральной области фазового пространства режимов коразмерности два. При этом система сохраняет динамическую универсальность и наглядно классифицирует четыре основных сценария перехода к спайковой активности: бифуркацию Андронова-Хопфа, седло-узловую бифуркацию на инвариантной кривой, гомоклиническую бифуркацию и бифуркацию двойного предельного цикла.

Описание системы

Предлагаемая математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{2\beta x}{1 + \beta x^2} + y \\ \dot{y} = \mu \begin{cases} -x + ky + b, & -2 \leq y \leq 2 \\ -y - 2, & -x + ky + b < -y - 2 \\ -y + 2, & -x + ky + b > -y + 2, \end{cases} \end{cases}$$

где x и y – переменные, являющиеся аналогами мембранного потенциала нейрона и переменной восстановления соответственно, $\mu \ll 1$ – малый параметр разделения временных шкал, $\beta > 0$ определяет форму изоклины быстрой переменной, а параметры k и b задают наклон и сдвиг линейной части изоклины медленной переменной в центральной области фазового пространства.

В работе исследуется динамика системы в центральной полосе фазового пространства, где определяются основные динамические режимы и бифуркационные переходы между ними. Анализ начинается с аналитического поиска положений равновесия и исследования их устойчивости. Путем построения параметрической диаграммы на плоскости (b, k) выявляются критические значения управляющих параметров, отвечающие за смену устойчивости стационарных состояний и реализацию четырех фундаментальных сценариев нейронной возбудимости.

Бифуркационная диаграмма (b , k)

На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (b , k), определяющая границы областей существования стационарных состояний и предельных циклов. На основе аналитических условий равенства нулю следа и определителя матрицы Якоби выделены области G_i с различным числом и типами равновесий, а также обозначены точки бифуркации коразмерности два.

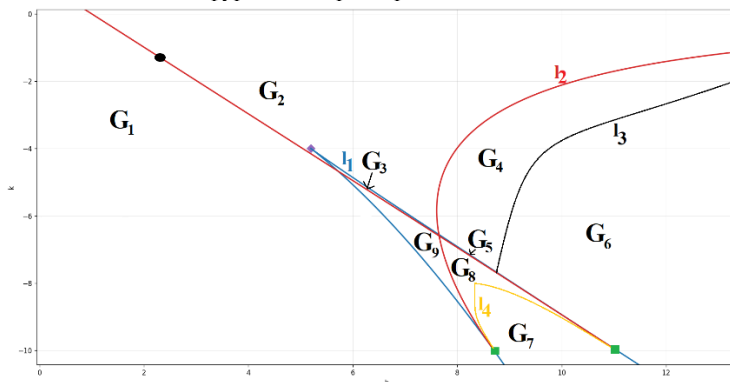


Рис. 1

Переход к автоколебаниям через седло-узловую бифуркацию на инвариантной кривой

На рис. 2 показан процесс слияния и взаимного уничтожения двух состояний равновесия – седла и устойчивого узла. После их исчезновения в фазовом пространстве формируется устойчивый предельный цикл, что переводит динамическую систему из состояния покоя в режим периодической генерации импульсов.

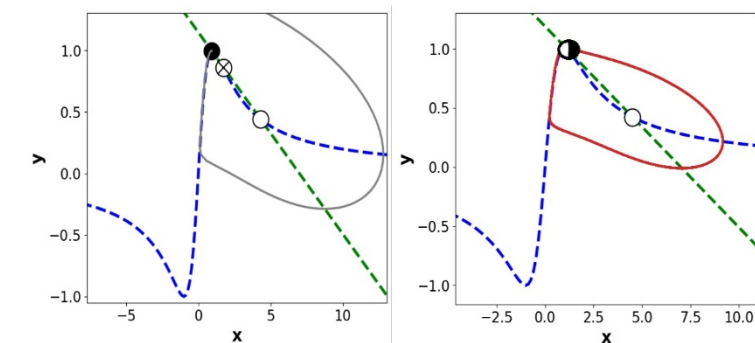


Рис. 2

Возникновение автоколебаний при бифуркации Андронова-Хопфа

При изменении параметров в центральной области реализуется мягкое рождение автоколебаний, стадии которого проиллюстрированы на рис. 3. На левом графике система находится в устойчивом состоянии покоя (фокус). На правом графике, после потери равновесием устойчивости, рождается устойчивый предельный цикл (красный цвет), соответствующий переходу к спайковой активности.

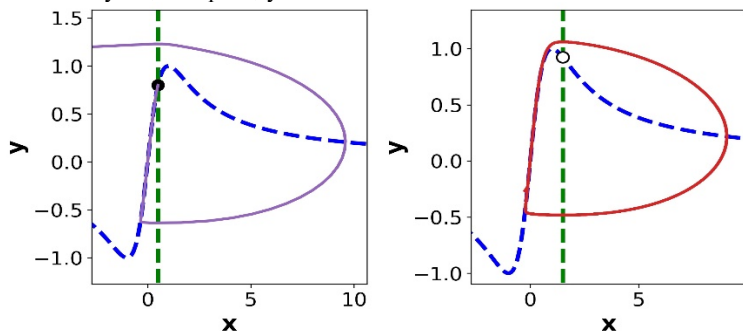


Рис. 3

Перестройка динамики при бифуркации двукратного предельного цикла

Данный сценарий представляет собой глобальную бифуркацию, в результате которой происходит одновременное исчезновение устойчивой и неустойчивой периодических орбит. Этот механизм полностью аналогичен седло-узловой бифуркации положений равновесия, однако реализуется на множестве замкнутых траекторий, определяющих автоколебательные режимы системы. Характерные фазовые портреты для этого случая изображены на рис. 4. В исходном состоянии фазового пространства наблюдается одновременное существование притягивающего и отталкивающего предельных циклов. После прохождения бифуркационного порога данные циклы сливаются и аннигилируют.

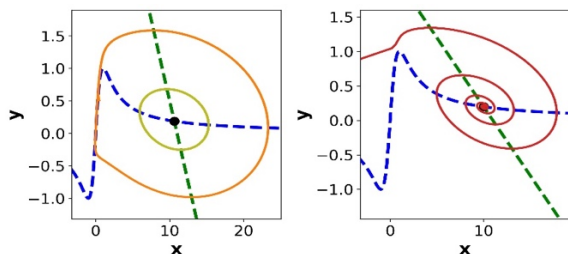


Рис. 4

Гомоклиническая бифуркация

На рис. 5 показан глобальный вариант изменения топологии фазового пространства, при котором периодический режим рождается или уничтожается в момент контакта траектории с седловой стационарной точкой. В процессе изменения управляющих параметров предельный цикл деформируется, его период неограниченно возрастает, и в критической точке орбита трансформируется в гомоклиническую петлю сепаратрисы седла.

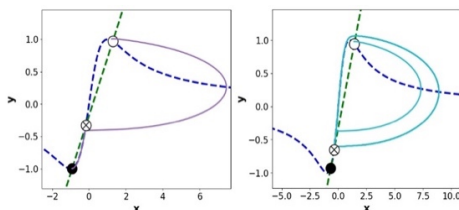


Рис. 5

Заключение

В настоящей работе получены следующие основные результаты:

- Разработана и исследована новая двумерная математическая модель одиночного нейрона с дробно-рациональной нелинейностью, описывающая процессы возбудимости мембранного потенциала.
- Численными методами построена карта параметрического пространства (b, k) , на которой размечены области G_i с качественно различными типами динамики и стационарных состояний.
- Проведена полная классификация четырех фундаментальных сценариев генерации спайковой активности, подтвердившая динамическую универсальность предложенной модели.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект FSWR-2020-0036 и проект FSWR-2026-0007, Российского научного фонда, проект 22-12-00348-П.

- [1] Izhikevich. E.M. Dynamical system in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. – Cambridge: MIT, 2007, P. 15.
- [2] Некоркин В.И., Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клинышов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Шапин Д.С. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 5.
- [3] Еремеев В.П., Осипов Г.В. // Труды XXVIII научной конференции по радиофизике. – Нижний Новгород: ННГУ, 2024. С. 174.
- [4] Еремеев В.П., Осипов Г.В. // Труды XXIX научной конференции по радиофизике. – Нижний Новгород: ННГУ, 2025. С. 146.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОБУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ АРХИТЕКТУРЫ COLANET

О.А. Горюнов^{1, 2, 3)}, В.В. Клиньшов^{1, 2, 3)}

¹⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

²⁾ ИПФ РАН

³⁾ НИУ ВШЭ

Введение

Использование импульсных нейронных сетей (ИмНС) является одним из наиболее перспективных направлений с целью снижения энергопотребления систем искусственного интеллекта. Однако энергоэффективность ИмНС достигается только при их реализации на нейроморфных чипах, реализующих событийно-управляемую парадигму вычислений [1]. Таким образом, необходимо разрабатывать импульсные архитектуры, которые могут быть интегрированы в нейроморфные процессоры, а также правила для их обучения.

Одной из архитектур, в которой обмен информацией происходит за счёт импульсов, является CoLaNET (Columnar Layered Network) [2]. Она была предложена для решения широкого ряда задач классификации. Архитектура состоит из колонок, каждая из которых отвечает за свой целевой класс. В каждой колонке есть некоторое число микроколонок (триплетов нейронов), которые предназначены для реагирования на сильно отличающиеся образы одного класса. Обучение основано на комбинации двух механизмов: дофаминовой и анти-Хеббовской пластичности. Для обеспечения сходимости обучения важно понимать, как следует подбирать гиперпараметры данной архитектуры. Однако изучение динамики CoLaNET является сложной задачей, поэтому мы рассмотрели её упрощенный алгоритм обучения одной колонки [3], который сохраняет логику обучения, но абстрагируется от полной импульсной динамики. В результате работы была построена аналитическая теория, описывающая процесс обучения упрощенной модели для задачи классификации действительных чисел. Полученные теоретические оценки на число микроколонок и кривую обучения хорошо согласуются с численными экспериментами как для упрощенной, так и для полной модели CoLaNET.

CoLaNET и упрощенная модель

Архитектура CoLaNET имеет колончато-слоистую структуру (см. рис. 1), где каждая колонка отвечает за свой целевой класс, при этом функционально разные нейроны организованы в виде слоёв. Внутри колонок есть некоторое число микроколонок (триплетов нейронов), предназначенных для распознавания сильно отличных образов внутри одного класса. Обучаются только связи между входными и L-нейронами. Для этого вводятся два механизма синаптической пластичности: дофаминовое правило, за счёт которого происходит усиление связей, и анти-Хеббовское, за счёт которого происходит подавление связей для предотвращения ложного срабатывания. Важно отметить, что правила пластичности применяются не к самому весу w , а к так называемому синаптическому ресурсу W , при этом суммарный синаптический ресурс нейрона сохраняется. Данное правило вводится для предотвращения переобучения модели.

Упрощенный алгоритм обучения одной колонки абстрагируется от спайковой динамики. В нём триплеты объединяются в единые выходные нейроны, которые создаются динамически в процессе обучения, формируя полносвязную сеть. Кодирование входной активности осуществляется n нейронами, активность которых задаётся числом сгенерированных импульсов m_i в данную итерацию обучения. При этом мембранный потенциал определяется просто как скалярное произведение: $U_j = \sum w_{ij} m_i$. Алгоритм имитирует работу исходных правил обучения полной архитектуры CoLaNET. При предъявлении целевого образа сеть либо создает новый классифицирующий нейрон (если реакция отсутствует и $U_j \leq 0$ для всех j), либо усиливает связи (если $U_j > 0$, но при этом $U_j < \theta$). В случае ошибочного срабатывания на сторонний образ (если $U_j > \theta$), активные синапсы подавляются.

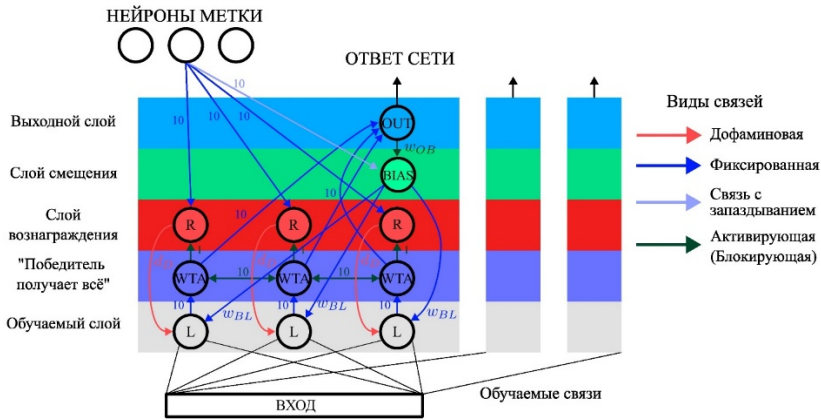


Рис. 1

Анализ динамики обучения упрощенной модели CoLaNET

При построении аналитической теории была рассмотрена одномерная задача бинарной классификации: определение принадлежности случайно сгенерированного числа из интервала $[0,1]$ целевому отрезку $[a, b]$, где $0 < a < b < 1$. Кодирование входной активности осуществлялось методом гауссовых рецептивных полей. Согласно данному методу, вероятность срабатывания нейрона пропорциональна значению его нормальной функции для данного примера. Итоговое количество сгенерированных спайков m_i определяется в результате Пуассоновского процесса с соответствующей вероятностью в течение временного окна T_p .

Численные эксперименты с упрощенной моделью показали, что специализация классифицирующих нейронов происходит на ранних этапах обучения. Их рецептивные поля (области с наибольшей положительной связью) быстро стабилизируются по ширине. Кроме того, профили веса выходных нейронов имеют колоколообразную форму.

Введём длину целого отрезка $L = (b - a)$ и величину l , которая определяет область активных нейронов, кодирующих входной пример. Мы оценили наиболее вероятное число классифицирующих нейронов, возникших в процессе обучения, как среднее между максимально и минимально возможным числом микроколонок:

$$N = \frac{L}{2l}. \quad (1)$$

Несмотря на свою простоту, эта оценка хорошо согласуется с результатами численного эксперимента с упрощенной моделью. На рис. 2 точками показано экспериментально полученное наиболее вероятное число микроколонок, возникших после 1000 экспериментов, пунктиром – теоретическая оценка (1).

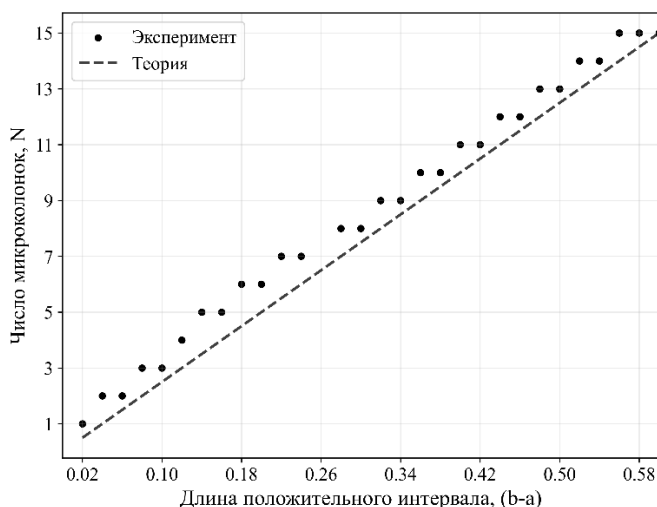


Рис. 2

Другим важным результатом является то, что нам удалось получить аналитическую оценку на кривую обучения. Аппроксимируя профиль синаптического веса нормальной функцией, мы исследовали эволюцию веса в центре распределения $w_c(t)$. В начале обучения вес растёт при каждом попадании примера в рецептивное поле микроколонок. Этот процесс длится до тех пор, пока выходной нейрон не начнёт реагировать на примеры из центра рецептивного поля. После этого формируется область реагирования l_f , которая зависит от текущего веса $w_c(t)$, и процесс обучения замедляется. Нам удалось получить аналитическое выражение для времени t_0 , при котором классифицирующие нейроны начинают реагировать на примеры из центра распределения, а также зависимость области реагирования l_f от времени при $t > t_0$. Поскольку итоговая точность классификации напрямую определяется l_f , найденная временная зависимость позволяет аналитически описать кривую обучения. Подробный вывод аналитических оценок для обучения упрощенной модели представлен в [4].

На рис. 3 приведены зависимости кривых обучения: синим – для упрощенной модели, красным – для полной модели CoLaNET, пунктиром – теоретическая оценка. По графикам видно, что наша оценка хорошо согласуется с результатами численных экспериментов как для упрощенной, так и для полной модели CoLaNET.

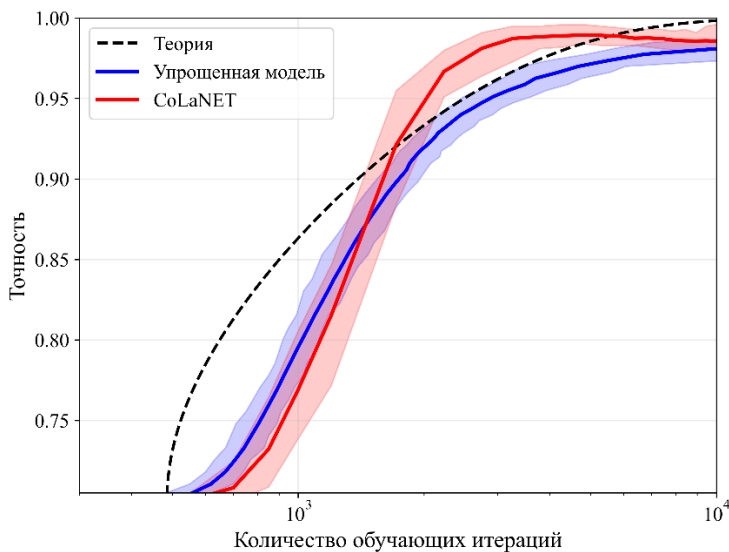


Рис. 3

Заключение

На основании данной работы можно сделать вывод, что упрощенная модель успешно воспроизводит ключевые принципы обучения полной архитектуры CoLaNET. Разработанная теория позволяет предсказывать итоговое количество классифицирующих нейронов и необходимое время обучения для заданного уровня точности. Данный подход закладывает основу для использования упрощенных моделей при предварительной оценке гиперпараметров, что существенно сэкономит вычислительные ресурсы при финальной оптимизации сложных импульсных архитектур.

- [1] Ivanov D. et al. // Frontiers in Neuroscience. 2022. Vol. 16. P. 959626.
- [2] Kiselev M. // arXiv preprint arXiv:2409.01230. 2024.
- [3] Kiselev M // arXiv preprint arXiv:2503.17111. 2025.
- [4] Goryunov O.A. et al. // Chaos, Solitons & Fractals. 2026. Vol. 203. P. 117663.

ОБУЧЕНИЕ СПАЙКОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С ВРЕМЕННЫМ КОДИРОВАНИЕМ ДАННЫХ

Т.А. Каминко, М.А. Мищенко, Н.С. Ковалева

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Исследование процессов обучения в спайковых нейронных сетях с временным кодированием данных на сегодняшний день является актуальным для разработки энергоэффективных нейроморфных вычислительных устройств. Спайковые нейронные сети обладают способностью кодировать информацию во времена возникновения импульсов. Это особенно важно при обработке временных последовательностей, а также позволяет обрабатывать данные в режиме реального времени. Временное кодирование обеспечивает значительно большую пропускную способность данных, чем частотное кодирование, что дает спайковым нейронным сетям преимущество в энергоэффективности по сравнению с искусственными нейронными сетями [1, 2].

В спайковых нейронных сетях обучение реализуется благодаря нелинейным пластичным связям. Правило STDP является наиболее известной моделью связей, в котором сила связи между нейронами изменяется в зависимости от точных временных соотношений между пресинаптическими и постсинаптическими импульсами [3, 4].

В данной работе исследуются условия обучения в спайковой нейронной сети с временным кодированием данных и моделью пластичности связей STDP. В качестве модели нейрона используется модель нейрона-порогового интегратора. Модель описывается уравнением (1):

$$\tau_m \dot{V}_i = V_r - V_i + I_i^{(rec)}(t), \quad (1)$$

где i – номер нейрона, V – мембранный потенциал, τ_m – постоянная времени мембраны, рекуррентный ток $I_i^{(rec)}(t)$ – сумма постсинаптического тока от всех других нейронов, связанных с нейроном i . Если накопленный потенциал достигает порогового значения θ , нейрон генерирует импульс и его потенциал уменьшается до базового уровня V_r . Рекуррентный ток описывается уравнением (2):

$$I_i^{(rec)}(t) = \sum_{j=1}^N g_{ij} \omega_{ij} y_j(t), \quad (2)$$

где g – масштабирующий коэффициент, ω – вес связи, y – выходной синаптический ток, i и j – пост- и пресинаптический нейроны соответственно. Выходной сигнал нейрона описывается уравнением (3):

$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{y_j}{\tau_y} + \delta(t - t_{sp}), \quad (3)$$

где $j = 1, N$ – номер пресинаптического нейрона, t_{sp} – время последовательных пресинаптических импульсов, параметр τ_y – константа времени релаксации, y – локальная переменная. Правило STDP описывается уравнениями (4) [3, 4]:

$$\begin{aligned}
\frac{ds_i}{dt} &= -\frac{s_i}{\tau_s} + \sum_i \delta(t - t_i) \\
\frac{ds_j}{dt} &= -\frac{s_j}{\tau_s} + \sum_j \delta(t - t_j) \\
\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= [(1 - \omega_{ij})s_j\delta(t - t_i) - \alpha\omega_{ij}s_i\delta(t - t_j)]
\end{aligned} \tag{4}$$

где s_i и s_j – переменные, отслеживающие спайки на i и j нейроне, τ_s – характерное время затухания, λ – скорость обучения, α – параметр асимметрии, τ_{ij} – время задержки нервного импульса при переходе с пресинаптического нейрона на постсинаптический.

Известно, что спайковый нейрон способен детектировать временные паттерны активности после обучения за счет самоорганизации связей, описываемых STDP, при этом распознавать временные паттерны среди шума [5-7]. Обучение представляет собой периодическое воздействие временного паттерна активности на постсинаптических нейрон. Параметры сети настраиваются таким образом, чтобы по завершению обучения за счет изменения весов связи нейрон генерировал отклик один раз в начале паттерна, тем самым детектируя его начало.

В данной работе спайковая нейронная сеть была обучена детектировать временной паттерн активности, который представляет собой генерацию импульсов на пресинаптических нейронах с равномерно распределенной случайной задержкой времени спайков относительно начала паттерна, при этом каждый пресинаптический нейрон генерирует импульс один раз в течение паттерна. Получена вероятность успешного обучения в зависимости от ширины паттерна и коэффициента связи между нейронами (см. рис. 1).

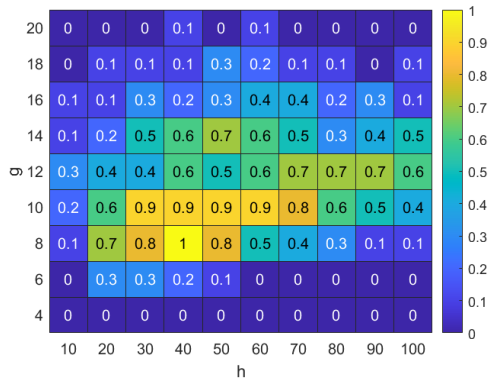


Рис. 1

Моделируемая нейронная сеть состоит из 10 пресинаптических и одного постсинаптического нейронов, связанных однонаправленно. Для фиксированных значений

ширины паттерна h и коэффициента связи g проведено обучение сети с 10 различными реализациями паттерна, $w_0 = 0.5$, $\tau_s = 10$ мс, $\lambda = 0.01$, $\alpha = 5$. В случае успешного обучения результатом является 1, в обратном случае – 0. Для фиксированных значений h и g результаты обучения усредняются по 10 реализациям, полученное среднее значение соответствует вероятности успешного обучения. На рис. 1 представлена зависимость вероятности успешного обучения от параметров h и g .

Как видно на рис. 1, существует диапазон значений параметров, при котором обучение наиболее вероятно, при этом существуют значения параметров, при котором вероятность равна 1. Таким образом, для решения задач классификации с временным кодированием данных существует область параметров сети, обеспечивающих стабильное обучение. При этом для успешного обучения одним из ключевых условий является баланс значений параметров ширины предъявляемого временного паттерна и коэффициента связи между пре- и постсинаптическими нейронами.

Также рассмотрена задача классификации 9 пиксельных изображений, которые содержат горизонтальные и вертикальные полосы (см рис. 2).

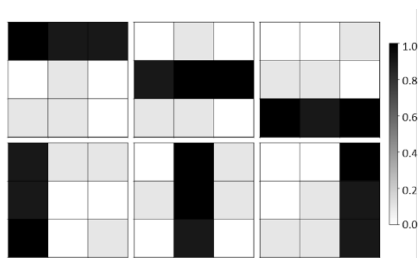


Рис. 2

Интенсивность пикселей генерируется случайным образом в определенных диапазонах: у темных пикселей, из которых состоят полосы, интенсивность распределена в диапазоне от 0.9 до 1, у остальных пикселей – от 0 до 0.1

Применен простой алгоритм временного кодирования, в котором каждый пиксель кодирует 1 нейрон. Каждое изображение кодируется в виде временного паттерна активности, представляющего собой возникновение спайков на 9 пресинаптических нейронах с временной задержкой относительно начала паттерна, соответствующей интенсивности пикселя. Интенсивность пикселя конвертируется во время возникновения спайка на соответствующем пресинаптическом нейроне по формуле (5).

$$t_k = h - h * I_k, \quad (5)$$

где t_k – время спайка k -го нейрона, h – ширина паттерна, I_k – интенсивность k -го пикселя.

Рассмотрены 6 классов изображений: горизонтальные полосы (сверху, по середине, снизу) и вертикальные полосы (слева, посередине, справа). Спайковая нейронная сеть была обучена распознавать паттерны определенного класса. Внутри одного класса картинки отличаются между собой интенсивностью пикселя. При обучении

предъявлялись временные паттерны, кодирующие изображения, принадлежащие к классу с горизонтальными полосами по середине. 10 изображений в виде временных паттернов из одного класса воздействовали на нейрон последовательно, каждая в течение 100 с.

Для тестирования был сгенерирован тестовый набор изображений из различных классов. На рис. 3 показано изменение V постсинаптического нейрона относительно начала различных предъявляемых тестовых паттернов.

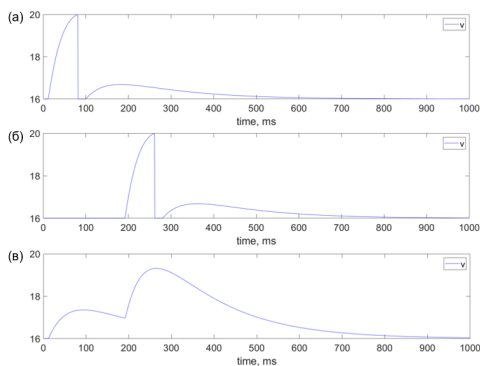


Рис. 3

На изображение с горизонтальной полосой нейрон генерирует отклик в начале предъявления (см. рис. 3а), на изображения с горизонтальными полосами из других классов (сверху и снизу) – генерирует отклик с задержкой (см рис. 3б), на изображения с вертикальными полосами нейрон не генерирует отклик (см рис. 3в). В ходе моделирования выявлено, что на успешность обучения в данной задаче влияет баланс значений параметров ширины кодирующего временного паттерна h и коэффициента связи g между пре- и постсинаптическими нейронами.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2026-0017).

- [1] Yi Z. et al. // Neurocomputing. 2023. Vol. 531. P. 163.
- [2] Yamazaki K., Vo-Ho V.K., Bulsara D., Le N. // Brain sciences. 2022. Vol. 12. P. 863.
- [3] Song S., Miller K.D., Abbott L.F. // Nature neuroscience. 2000. Vol. 3, no. 9. P. 919.
- [4] Morrison A., Diesmann M., Gerstner W. Phenomenological models of synaptic plasticity based on spike timing // Biological cybernetics. 2008. Vol. 98. P. 459.
- [5] Masquelier T., Guyonneau R., Thorpe S. J. // PloS one. 2008. Vol. 3, no. 1. P. e1377.
- [6] Lobov S.A. et al. // Sensors. 2020. Vol. 20, no. 2. P. 500.
- [7] Sboev A. et al. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2020. Vol. 43, no. 13. P. 7802.

РОТОБРИЗЕРНЫЕ ЦИКЛОПНЫЕ РЕЖИМЫ В СИСТЕМЕ ГЛОБАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ИНЕРЦИЕЙ

М.М. Хамков, М.И. Болотов, Л.А. Смирнов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Ансамбли фазовых осцилляторов являются фундаментальной моделью для описания коллективного поведения в системах, состоящих из большого числа элементов, — от нейронных до энергетических сетей. Модель Курамото–Сакагучи с инерцией может демонстрировать сложные варианты синхронного поведения, включая циклопные состояния, характеризующиеся сосуществованием двух когерентных кластеров и уединённого осциллятора. В данной работе исследуется возникновение и устойчивость роторизерных циклопных режимов, при которых два кластера совершают вращение относительно уединённого элемента под воздействием связи, содержащей старшие гармоники [1].

Рассматривается ансамбль из N глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией μ и бигармонической функцией связи:

$$\mu \ddot{\theta}_k + \dot{\theta}_k = \omega + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^2 \varepsilon_q \sin[q(\theta_n - \theta_k) - \alpha_q], \quad (1)$$

где θ_k — фаза k -го осциллятора ($k = 1, 2, \dots, N$), ω — собственная частота, α_q — фазовый сдвиг q -й гармоники связи, ε_q — амплитуда q -й гармоники. Степень синхронизации количественно характеризуется параметрами порядка R_q , определяемыми как:

$$R_q = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{iq\theta_m} = r_q e^{i\psi_q}, \quad (2)$$

где значение $r_1 = 1$ соответствует полной фазовой синхронизации, а высокое значение параметра r_2 означает, что система стремится к двухкластерному противофазному разделению. Для отталкивающей первой гармоники и нечётного N в системе формируется устойчивый роторизерный циклопный режим [2]. Для роторизерного режима межкластерные фазовые отстройки $x(t)$ и $y(t)$ демонстрируют неограниченный рост (убывание), то есть фазы двух кластеров вращаются относительно одиночного осциллятора (см. рис. 1).

Динамика разностей фаз $x(t)$ и $y(t)$ описывается системой:

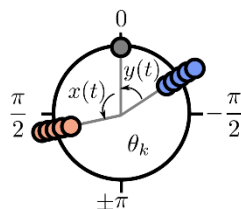


Рис. 1

$$\begin{aligned}
\mu\ddot{x} + \dot{x} &= \sum_{q=1}^2 \frac{\varepsilon_q}{N} \left[\sin \alpha_q - \sin(qx + \alpha_q) \right. \\
&\quad \left. - \frac{N-1}{2} [\sin(qx - \alpha_q) + \sin(qy - \alpha_q) \right. \\
&\quad \left. + \sin(\alpha_q) + \sin(q(x-y) + \alpha_q)] \right] \\
\mu\ddot{y} + \dot{y} &= \sum_{q=1}^2 \frac{\varepsilon_q}{N} \left[\sin \alpha_q - \sin(qy + \alpha_q) \right. \\
&\quad \left. - \frac{N-1}{2} [\sin(qx - \alpha_q) + \sin(qy - \alpha_q) \right. \\
&\quad \left. + \sin(\alpha_q) + \sin(q(y-x) + \alpha_q)] \right].
\end{aligned} \tag{3}$$

Поиск периодических вращательных траекторий на цилиндре в системе (3), соответствующих роторизерным циклопным режимам системы (1), осуществлялся численно с использованием итерационного алгоритма Ньютона-Рафсона. Линейная устойчивость найденных роторизерных режимов определялась на основе анализа Флоке путем линеаризации редуцированной системы (3) и вычисления собственных чисел соответствующей матрицы монодромии.

В ходе исследования была построена карта режимов в пространстве параметров второй гармоники связи (амплитуды ε_2 и фазового сдвига α_2) при фиксированных параметрах: $N = 11$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1.7$, $\varepsilon_1 = 1$, представленная на рис. 2. Выявлено, что граница области существования роторизерных циклопных режимов определяется гомотоклической бифуркацией предельного цикла (кривая с крестообразными маркерами).

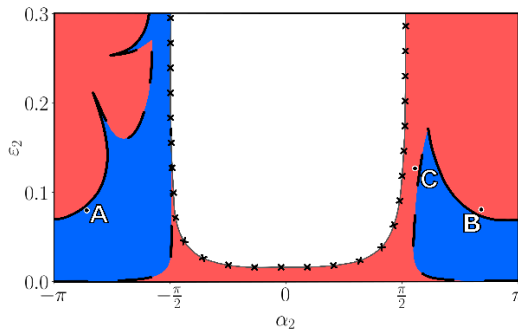


Рис. 2

В результате анализа были установлены два фундаментальных сценария развития неустойчивости роторизерных циклопов. Первый сценарий реализуется при переходе максимального мультипликатора Флоке через значение $\lambda_{max} = -1$ (непрерывные

чёрные кривые на рисунке 2). Данная потеря устойчивости приводит к бифуркации удвоения периода вращательного движения. В результате формируется устойчивый многокластерный роторбизерный квазициклопный режим, в котором первоначальные кластеры расщепляются, совершая периодические вращения относительно уединенного элемента с удвоенным периодом. Второй сценарий дестабилизации наблюдается при переходе мультипликатора Флоке через значение $\lambda_{max} = 1$ (пунктирные чёрные кривые на рисунке 2). Этот переход вызывает полное разрушение исходной роторбизерной конфигурации. Система выходит на сложную переключающую динамику, при которой уединенный элемент периодически синхронизируется с одной из когерентных групп, дестабилизируя другой элемент ансамбля, который, в свою очередь, становится новым уединенным осциллятором.

Дополнительно был проведен статистический анализ вероятности реализации динамических режимов при выборе случайных начальных условий из равномерного распределения (см. рис. 3). Анализ проводился для фиксированных значений ε_2 (a) 0.15, (b) 0.1, (c) 0.05, (d) 0.01, остальные параметры: $N = 11$, $\mu = 1$, $\alpha_1 = 1.7$, $\varepsilon_1 = 1$. Результаты подтвердили доминирующую роль нестационарных циклопных состояний в фазовом пространстве.

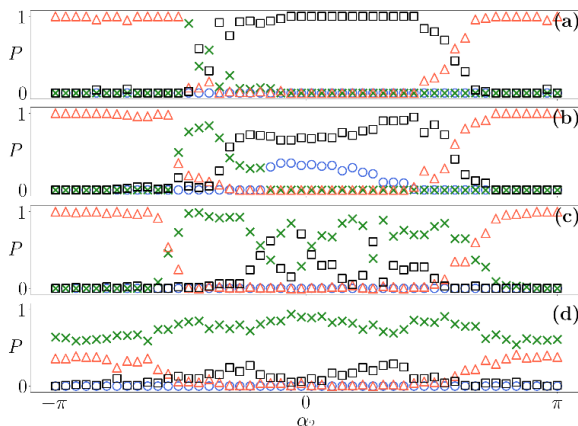


Рис. 3

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

- [1] Munyayev V.O., Bolotov M.I., Smirnov L.A., Osipov G.V., Belykh I. // Phys. Rev. Lett. 2023. Vol. 130. P. 107201.
- [2] Bolotov M.I., Munyayev V.O., Smirnov L.A., Osipov G.V., Belykh I. // Phys. Rev. E. 2024. Vol. 109. P. 054202.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ СОБЫТИЙНОГО ПОТОКА DVS-КАМЕРЫ НА ДИНАМИКУ СПАЙКОВОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ В ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ ДВИЖУЩИХСЯ РУКОПИСНЫХ ЦИФР

Р.А. Кононов^{1, 2)}, О.В. Масленников^{1, 2)}

¹⁾ ИПФ РАН

²⁾ ННГУ им. Н.И. Лобачевского

DVS-камеры представляют собой естественный источник данных в спайковом представлении, функционирующий по принципам, аналогичным работе сетчатки глаза. Каждый пиксель такой камеры генерирует кратковременный импульс в момент значительного изменения фототока, причём полярность импульса соответствует знаку этого изменения. Выходные данные DVS-камеры представляют собой разреженный во времени поток спайков, что обеспечивает существенно более компактное представление информации по сравнению с традиционным видеорядом.[1]

Особый интерес DVS-камеры представляют в контексте последующей обработки данных спайковыми нейронными сетями. В рамках настоящей работы DVS-сенсор эмулировался с помощью следующей модели:

$$L_t = \ln(I_t(1 + \xi_t^m) + \xi_t^a), \xi_t^m, \xi_t^a \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$s_t = \begin{cases} D_t = L_t - T_{t-1}, & |D_t| > c \\ 0, & |D_t| \leq c \end{cases} \quad (1)$$

$$T_t = \begin{cases} L_t, & s_t > c \\ T_{t-1}, & s_t \leq c \end{cases}$$

где I_t – фототок на пикселе, L_t – логарифм зашумлённого фототока, c – контрастный порог, T_t – опорный логарифмический уровень (память пикселя), $s_t \in \{-1, 0, 1\}$ – событие.

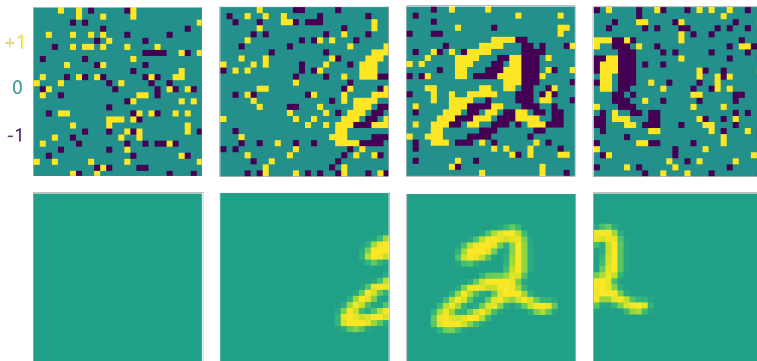


Рис. 1

В рамках работы мы анимировали изображения из набора данных MNIST таким образом, чтобы цифра двигалась в кадре справа налево, после чего обработали полученный видеоряд эмулятором (1). Примеры кадров из полученного событийного потока представлены на рис. 1.

Фоновый шум, возникающий в областях кадра с низкой освещённостью, является характерной особенностью реальных DVS-камер. Мы исследовали свойства этого шума в рамках модели (1). На рис. 2 показаны DVS-кадры, сгенерированные эмулятором в ответ на равномерно освещённые входные кадры, а на рис. 3 — численно рассчитанная вероятность генерации шумового спайка пикселем при различных уровнях освещённости.

Далее мы исследовали влияние фонового шума на способность спайковой нейронной сети на основе AdEx-нейронов [2] распознавать изображения. Использовалась сеть следующей архитектуры:

- свёрточный слой AdEx-нейронов, принимающий спайки непосредственно с DVS-камеры;
- линейное отображение спайков свёрточного слоя на входы нейронов рекуррентного слоя;
- рекуррентный слой из 128 AdEx-нейронов;
- линейное отображение спайков рекуррентного слоя на выход сети.

Для обучения сети применялся оптимизатор Adam с планированием скорости обучения. В качестве суррогатного градиента использовалась сигмоида, в качестве функции потерь — кросс-энтропия.

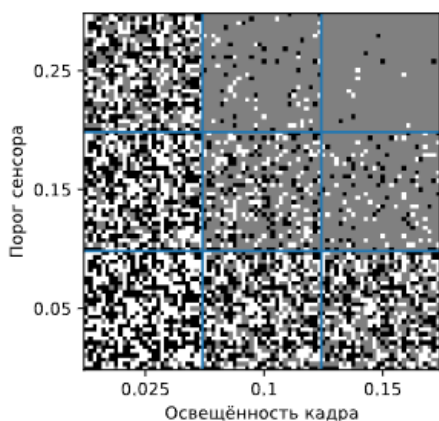


Рис. 2

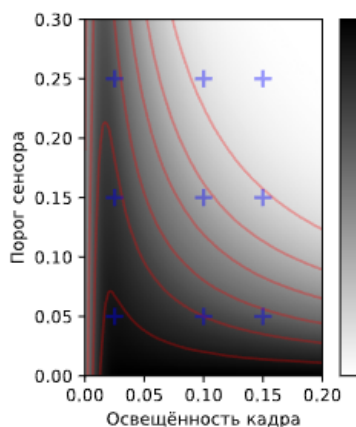


Рис. 3

Мы обучили несколько ансамблей сетей для различных уровней освещённости фона в кадре; внутри каждого ансамбля сети отличались только инициализацией весов.

Затем обученные сети тестировались на валидационной выборке с уровнем освещённости фона, варьируемым в заданном диапазоне. Полученные результаты представлены на рис. 4.

На рис. 4 панели (б, г) содержат те же данные, что и панели (а, в), однако яркость фона пересчитана в вероятность генерации шумового спайка в соответствии с зависимостью, приведённой на рис. 3.

Основной вывод исследования состоит в том, что фоновый шум в обучающей выборке играет роль опорного сигнала для динамики обученной сети. Сети успешно классифицируют цифры только при уровне фонового шума, близком к тому, что присутствовал в обучающей выборке. В частности, сеть, обученная при высоком уровне фонового шума, при его снижении не демонстрирует какой-либо значимой активности.

Синяя кривая, соответствующая освещённости фона 0.2, демонстрирует наибольшую устойчивость к изменению уровня фонового шума. При этом сети, обученные при высоком уровне фонового шума, при его дальнейшем увеличении в некотором диапазоне сохраняют достигнутый уровень активности, что проявляется в виде небольших плато на рис. 4 (в, г).

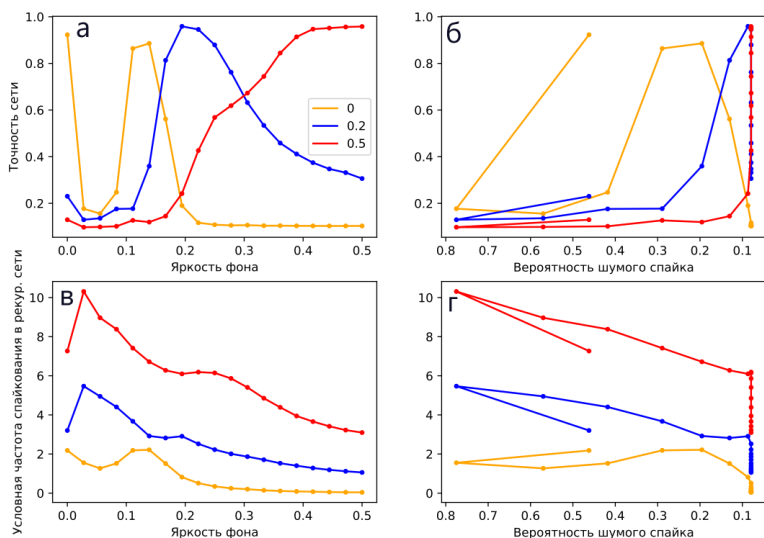


Рис. 4

- [1] Gallego G. et al. // IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2020. Vol. 44, no. 1. P. 154.
- [2] Brette R., Gerstner W. // Journal of neurophysiology. 2005. Vol. 94, no. 5. P. 3637.

ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТИПА ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРЫ

А.Г. Коротков, Е.В. Сюндюкова, Е.В. Губина, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Известно, что в классе динамических систем с симметрией наличие гетероклинического цикла является структурно устойчивым явлением по отношению к сохраняющим симметрию возмущениям. Первый пример структурно устойчивого гетероклинического цикла был приведён в работе [1]. В этой работе рассматривалась трёхмерная система.

Кроме систем с симметрией структурно устойчивые гетероклинические циклы являются частым явлением в моделях популяционной динамики [2, 3]. Такие модели вызывают особый интерес, так как в их фазовом пространстве могут существовать не только гетероклинические циклы, но и более сложные структуры – так называемые гетероклинические сети.

В представленной работе приведён пример структурно устойчивого гетероклинического цикла в двумерном фазовом пространстве.

Модель ансамбля

Элемент ансамбля будем моделировать уравнением

$$\dot{\rho} = \rho(\gamma - \rho)(\rho - 1) \quad (1)$$

или

$$\dot{\rho} = \rho(\gamma - \rho)(1 - \rho), \quad (2)$$

где ρ – уровень активности элемента ($0 \leq \rho \leq 1$), а γ – порог активации элемента ($0 < \gamma < 1$).

Ансамбль из двух элементов моделируется системой

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = \rho_1(\rho_1 - 1)(\gamma - \rho_1 - \alpha\rho_2) \\ \dot{\rho}_2 = \rho_2(1 - \rho_2)(\gamma - \beta\rho_1 - \rho_2) \end{cases} \quad (3)$$

где параметры α и β задают силы связей между элементами. Состояние равновесия в нуле является седлом, ранее оно было либо устойчивым узлом, либо неустойчивым узлом. Множество $0 \leq \rho_{1,2} \leq 1$ является инвариантным.

Система (3) инвариантна относительно преобразования координат, параметров и времени:

$$\begin{cases} \alpha \leftrightarrow \beta \\ \rho_1 \leftrightarrow \rho_2 \\ t \leftrightarrow -t \end{cases} \quad (4)$$

Из этого следует, что фазовый портрет при значениях параметров $(\alpha, \beta) = (\beta_0, \alpha_0)$ совпадёт с фазовым портретом при значениях параметров $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$ после замены переменных $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$ и обращения времени. Следовательно, далее рассмотрен случай $\alpha \leq \beta$.

В табл. приведены все состояния равновесия системы (3) и их собственные числа. Для состояния равновесия O_4 собственные числа не приведены, так как они весьма громоздки.

Табл.

Состояния равновесия	Собственные числа	
$O(0, 0)$	γ	$-\gamma$
$O_1(1, 0)$	$\gamma - \beta$	$\gamma - 1$
$O_2(0, 1)$	$1 - \gamma$	$\alpha - \gamma$
$O_3(1, 1)$	$\gamma - \alpha - 1$	$\beta - \gamma + 1$
$O_4(\frac{\gamma(\alpha-1)}{\alpha\beta-1}, \frac{\gamma(\beta-1)}{\alpha\beta-1})$	–	–
$O_5(\gamma, 0)$	$\gamma(1 - \gamma)$	$\gamma(1 - \beta)$
$O_6(0, \gamma)$	$\gamma(\alpha - 1)$	$\gamma(\gamma - 1)$
$O_7(\gamma - \alpha, 1)$	$\beta\gamma - \alpha\beta - \gamma + 1$	$(\gamma - \alpha)(\alpha - \gamma + 1)$
$O_8(1, \gamma - \beta)$	$\gamma + \alpha\beta - \alpha\gamma - 1$	$(\beta - \gamma)(\beta - \gamma + 1)$

Бифуркационные диаграммы при различных параметрах γ

На рис. 1 показана бифуркационная диаграмма системы (3) при $\gamma < 0$, а именно при $\gamma = -0.4$. Чёрным линиям соответствуют транскритические бифуркации, синей линии – бифуркация Андронова-Хопфа, на зелёной линии рождается гетероклинический цикл, на красной линии система становится обратимой. На рис. 1 показаны бифуркации только тех состояний равновесия, которые лежат во множестве $0 \leq \rho_{1,2} \leq 1$. Данные обозначения применимы и к другим бифуркационным диаграммам, рассмотренным далее.

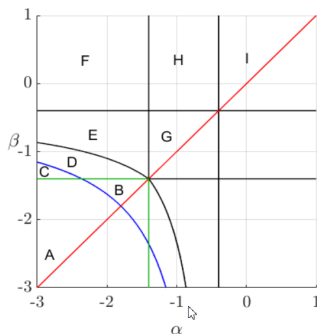


Рис. 1

На рис. 2 показаны примеры фазовых портретов системы (3) при $\gamma = -0.4$. На рис. 2а показана область А, на рис. 2б – область В, на рис. 2с – область С. Здесь и далее на всех фазовых портретах приняты следующие обозначения: красные точки обозначают неустойчивые состояния равновесия, зелёные – устойчивые, синии – седловые, голубые – негрубые; сепаратрисы седел показаны зелёным (устойчивые) или красным (неустойчивые) цветами; устойчивым гетероклиническим или предельным циклам

соответствуют зелёные кривые, неустойчивым – красные, гетероклинические траектории, не входящие в гетероклинический цикл, соответствуют голубым линиям.

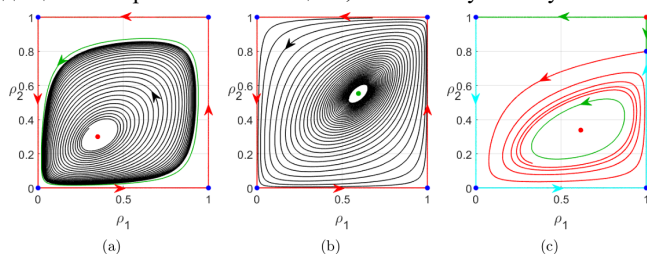


Рис. 2

На рис. 3 показана бифуркационная диаграмма при $\gamma > 1$, а именно при $\gamma = 1.4$.

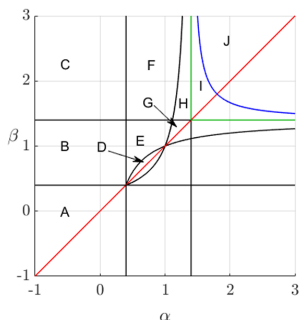


Рис. 3

На рис. 4 показаны примеры фазовых портретов системы (3) при $\gamma = 1.4$. На рис. 4а показана область I, на рис. 4б показана область J.

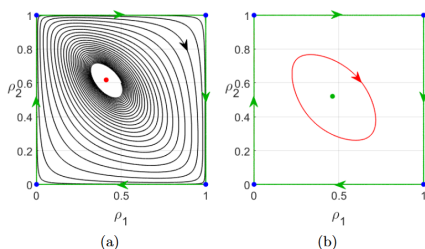


Рис. 4

Устойчивость и неустойчивость рассмотренных гетероклинических циклов, проходящих по сторонам квадрата, была аналитически доказана с помощью условия устойчивости из работы [4].

Заключение

В работе

- Предложена и исследована двумерная динамическая система с тремя параметрами, которая является обобщенной системой типа Лотки-Вольтерры.
- Построены бифуркационные диаграммы на плоскости параметров α и β при $\gamma < 0$ и $\gamma > 1$. Представлены примеры фазовых портретов.
- Доказано, что в случаях $\gamma < 0$ и $\gamma > 1$ в фазовом пространстве существует гетероклинический цикл, содержащий состояния равновесия в вершинах квадрата $0 \leq \rho_{1,2} \leq 1$. Цикл устойчив или неустойчив в зависимости от того, какое неравенство выполняется: $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$. Этот цикл структурно устойчив относительно возмущений системы, сохраняющих инвариантными множества $\rho_{1,2} = 0$ и $\rho_{1,2} = 1$.
- Показано, что наряду с гетероклиническим циклом, может также существовать предельный цикл. Определены бифуркации, в результате которых он рождается.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект FSWR-2020-0036 и проект FSWR-2026-0007, Российского научного фонда, проект 22-12-00348-П.

- [1] Guckenheimer J., Holmes P. // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press. 1988. Vol. 103. P. 189.
- [2] May R. M., Leonard W. J. // SIAM journal on applied mathematics. 1975. Vol. 29, no. 2. P. 243.
- [3] Hofbauer J // Equadiff 8. 1994. P. 105.
- [4] Afraimovich V. S., Rabinovich M. I., Varona P. // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 04. P. 1195.

ФОРМИРОВАНИЕ КЛАСТЕРОВ В РЕКУРРЕНТНОЙ СПАЙКОВОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРЕМЕННЫХ ПАТТЕРНОВ АКТИВНОСТИ

Н.С. Ковалева, В.В. Матросов, М.А. Мищенко

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Спайковые нейронные сети являются многообещающей энергоэффективной альтернативой искусственным нейронным сетям благодаря своей богатой динамике, способности обрабатывать пространственно-временные паттерны и низкому энергопотреблению при реализации на нейроморфном оборудовании. Сложные внутренние свойства спайковой нейронной сети, а также различные способы кодирования информации в них порождают разнообразие правил их обучения. Поэтому разработка более биологически правдоподобной и эффективной спайковой нейронной сети по-прежнему остается сложной и актуальной задачей [1-2].

По современным представлениям в нейронауках основным механизмом памяти является формирование определенных архитектур связей. Извлечение информации из памяти происходит путем активации нейронов, объединенных данными архитектурами связей в структуры: популяции или кластеры [3-4]. В данной работе исследуется процесс формирования кластеров под воздействием временных паттернов и слабого внешнего шума. Предлагается новый подход к обучению рекуррентной спайковой нейронной сети, в результате которого формируются кластеры нейронов, активирующиеся в ответ на определенные временные паттерны. Временное кодирование обеспечивает значительно большую пропускную способность данных, чем частотное кодирование, поэтому разработка алгоритмов обучения нейронных сетей с таким типом кодирования информации является особо актуальным [1]. Учет влияния внешнего шума при обучении сети позволяет учесть стохастические процессы при передаче данных в аналоговых системах.

В качестве элемента моделируемой сети используется модель нейрона-порогового интегратора с утечкой. Переменная мембранного потенциала описывается уравнением (1):

$$\tau_m \frac{dV_i}{dt} = V_r - V_i + I_i^{(rec)}(t) + I_i^{(ext)}(t), \quad (2)$$

где $i = 1, N$ – номер нейрона, τ_m – постоянная времени мембраны, V_r – потенциал сброса, $I_i^{(rec)}$ – рекуррентный ток, $I_i^{(ext)}$ – внешний шум. Рекуррентный ток описывается уравнением (2):

$$I_i^{(rec)}(t) = \sum_{j=1}^N g_{ij} \omega_{ij} y_j(t), \quad (2)$$

где g – масштабирующий коэффициент, ω – вес связи, y – выходной синаптический ток, i и j – пост- и пресинаптический нейроны соответственно. Динамика синаптического выходного тока описывается уравнением (3):

$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{y_j}{\tau_y} + \sum_{t_{sp}} \delta(t - t_{sp}), \quad (3)$$

где y – локальная переменная, τ_y – постоянная времени, δ – дельта-функция. Уравнения, описывающие синаптический вес ω_{ij} , который регулируется STDP, аналогичны уравнениям, представленным в работах [5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{ds_i}{dt} &= -\frac{s_i}{\tau_s} + \sum_i \delta(t - t_i) \\ \frac{ds_j}{dt} &= -\frac{s_j}{\tau_s} + \sum_j \delta(t - t_j) \\ \frac{d\omega_{ij}}{dt} &= [(1 - \omega_{ij})s_j\delta(t - t_i) - \alpha\omega_{ij}s_i\delta(t - t_j)] \end{aligned} \quad , \quad (5)$$

где s_i и s_j – переменные, отслеживающие импульсы на постсинаптическом и пресинаптическом нейроне, τ_s – характерное время спада локальных переменных, λ – скорость обучения, α – параметр асимметрии. Внешние токи моделируются как гауссовский белый шум:

$$I_i^{(ext)}(t) = \mu_{ext} + \sigma_{ext}\eta_i(t) \quad (7)$$

при $\langle \eta_i(t) \rangle = 0$, $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t - t')$, так что μ_{ext} и σ_{ext}^2 являются соответственно средним значением и дисперсией внешних токов.

При настроенных параметрах проведено обучение рекуррентной спайковой нейронной сети, в результате которого формируются кластеры нейронов, активирующиеся в ответ на определенные паттерны. Моделируемая сеть состоит из двух слоев: 10 нейронов во входном слое и 25 нейронов в рекуррентном полносвязном обучаемом слое, среди которых 20 возбуждающих нейронов и 5 тормозных. Связи между входным и обучаемым слоем однонаправленные, в обучаемом слое – двунаправленные. Взаимосвязь между тормозными и возбуждающими нейронами обеспечивает конкуренцию среди возбуждающих нейронов и сформированных кластеров после обучения и препятствует неограниченному нарастанию активности в сети. В начале обучения на первую группу из 10 возбуждающих нейронов обучаемого слоя воздействует временной паттерн активности с частотой воздействия $\gamma_{pat}=10$ Гц, который представляет собой последовательный порядок спайков на пресинаптических нейронах с фиксированной временной задержкой между преспайками $dt=10$ мс. По мере предъявления паттерна нейроны группы активируются, веса связи между нейронами в группе увеличиваются и устанавливаются, что приводит к формированию первого кластера (см. рис. 1). Также в процессе обучения происходит увеличение связей между нейронами входного слоя, генерирующими первые импульсы паттерна и нейронами формирующегося кластера (см. рис. 2) благодаря процессам самоорганизации [7].

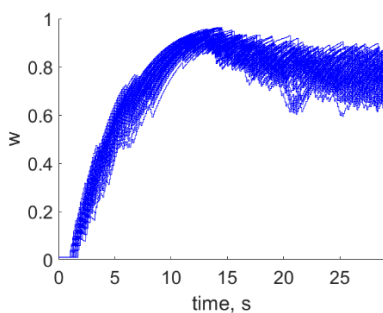


Рис. 1

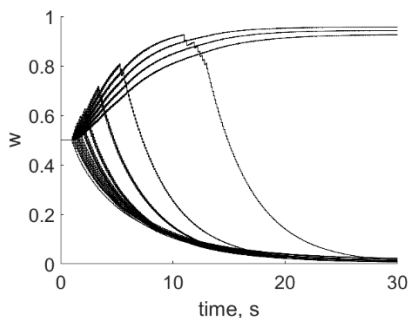


Рис. 2

Второй кластер формируется аналогично за счет воздействия временного паттерна с противоположным порядком спайков на вторую группу из 10 нейронов. Результат тестирования представлен на рис. 3, где точками показано возникновения спайков на определенных нейронах, зеленым цветом – на нейронах входного слоя, синим – на возбуждающих нейронах, красным – на тормозных нейронах. На рис. 3 1-10 – нейроны входного слоя, 11-20 – нейроны первого сформированного кластера, 21-30 – нейроны второго сформированного кластера, остальные нейроны – тормозные.

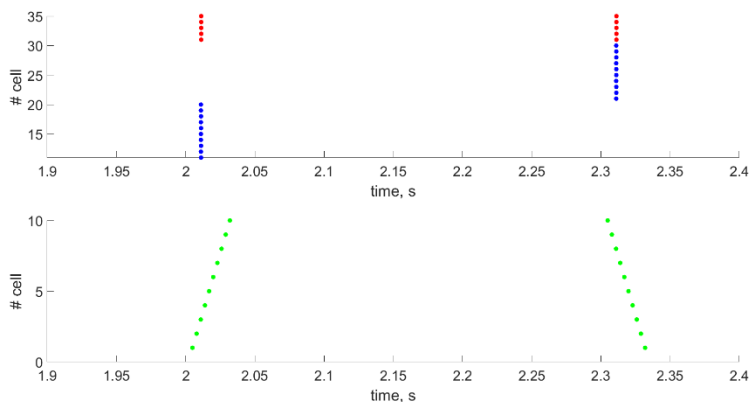


Рис. 3

При тестировании ($\lambda=0$) временные паттерны с прямым и обратным порядком спайков, на которых обучалась сеть, предъявляются всем возбуждающим нейронам. На рис. 3 видно, что нейроны первого кластера активируется в ответ на начало временного

паттерна с прямым порядком спайков, тогда как нейроны второго кластера активируются в ответ на начало другого паттерна, с обратным порядком спайков. Таким образом, продемонстрирован новый подход к обучению рекуррентной спайковой нейронной сети, в результате которого формируются кластеры нейронов, активирующиеся в ответ на определенные паттерны. На основе такого метода обучения может быть реализована сеть, в которой конкурирующие кластеры нейронов и их активность будут отвечать за различные классы кодирующих паттернов. В таком подходе при распознавании объектов учитывается статистически значимая корреляция срабатывания нескольких нейронов в ответ на предъявляемый паттерн. Такой подход является более надежным и устойчивым к шуму, поскольку реакция одного нейрона может быть недостаточно надежной, чтобы различать различные объекты. Разработка таких методов обучения имеют актуальность и значимость для дальнейшей реализации на нейроморфных вычислительных устройствах, в том числе с использованием мемристивных технологий, чувствительных к наличию шума в системе.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2026-0017).

- [1] Yi Z. et al. // *Neurocomputing*. 2023. Vol. 531. P. 163.
- [2] Yamazaki K., Vo-Ho V.K., Bulsara D., Le N. // *Brain sciences*. 2022. Vol. 12. P. 863.
- [3] Yuste R. // *Nature reviews neuroscience*. 2015. Vol. 16, no. 8. P. 487.
- [4] Saxena S., Cunningham J. P. // *Current opinion in neurobiology*. 2019. Vol. 55. P. 103.
- [5] Morrison A., Diesmann M., Gerstner W. // *Biological Cybernetics*. 2008. Vol. 98. P. 459.
- [6] Song S., Miller K.D., Abbott L.F. // *Nature Neuroscience*. 2000. Vol. 3. P. 919.
- [7] Masquelier T., Guyonneau R., Thorpe S.J. // *PloS one*. 2008. Vol. 3, no. 1. P. e1377.

КОГЕРЕНТНО-НЕКОГЕРЕНТНО-ГРАДИЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ В АНСАМБЛЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЧАСТИЧНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

П.А. Щербаков, Л.А. Смирнов, В.А. Костин, М.И. Болотов, Г.В. Осипов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

Полученные впервые в работе [1] химерные состояния по-прежнему привлекают внимание исследователей из разных областей науки [2–4]. Для стандартного случая эквидистантно расположенных на кольце осцилляторов, связанных нелокально, модель Курамото–Баттогтоха демонстрирует бистабильный характер динамики. При фиксированном наборе параметров система допускает реализацию из случайных начальных условий как полностью синхронного состояния, так и химеры.

При этом на данный момент слабо изучены случаи расположения осцилляторов на неэквидистантной сетке или сетке, эволюционирующей с течением времени. Влияние стохастического движения на устойчивость химерного режима было изучено в работе [5]. Продemonстрировано, что при диффузионном и баллистическом движении полностью синхронный режим теряет устойчивость, что приводит к возникновению химеры из любого начального состояния с течением времени. Когда элементы расположены в статичной случайной конфигурации, процент реализаций химерного состояния из случайных начальных условий ведёт себя обратно пропорционально размеру системы. Система, где один подансамбль частиц стационарен, а другой совершает движение в одну сторону, рассматривается в работе [6]. При этом химерный режим может реализовываться на обоих подансамблях.

В свою очередь, конфигурация, в которой осцилляторы подвижны частично и движущийся подансамбль совершает движение в ограниченной области пространства, до настоящего времени была неисследованной и составляет предмет исследования данной работы.

Модель

Классическая модель Курамото–Баттогтоха [1] с нулевыми собственными частотами имеет вид

$$\dot{\phi}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G(x_j - x_n) \sin(\phi_j - \phi_n - \alpha), \quad (1)$$

где ϕ_n – фаза n -го осциллятора, N – число осцилляторов, α – параметр фазового сдвига. В качестве ядра нелокального взаимодействия выберем

$$G(x) = \kappa \frac{\cosh \kappa(|x| - \frac{L}{2})}{2 \sinh(\frac{\kappa L}{2})}, \quad (2)$$

где κ – параметр нелокального взаимодействия, L – длина кольца, в котором расположены осцилляторы. Движение осцилляторов подчиняется закону

$$x_n(t) = x_n^{(0)} + A_n \sin \Omega t, \quad (3)$$

где $x_n^{(0)}$ – начальное положение n -го осциллятора, A_n – амплитуда движения n -го осциллятора, Ω – общая частота. Амплитуды движения случайны и имеют значения

$$A_n = \begin{cases} \zeta_n, & \left| x_n^{(0)} - \frac{L}{2} \right| \leq \sigma; \\ 0, & \left| x_n^{(0)} - \frac{L}{2} \right| > \sigma. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь σ – полуширина сегмента кольца, осцилляторы с начальными положениями в котором имеют ненулевые частоты, ζ_n – реализация случайной величины с равномерным распределением на $[\mu - \Delta; \mu + \Delta]$.

Отметим, что несмотря на то, что в качестве функции от координат осцилляторов рассматриваемое ядро безусловно является чётной функцией, в качестве функции от индексов элементов оно может быть нечётным. А именно, рассмотрим функцию

$$g(n, j, t) = G(x_j(t) - x_n(t)). \quad (5)$$

Разделим её на чётную и нечётную составляющие относительно положения n -го осциллятора как

$$g_{\pm}(n, j, t) = \frac{1}{2} (g(n, j, t) \pm g(n, 2n - j, t)). \quad (6)$$

Это позволяет нам естественным образом ввести степень асимметрии ядра $\tilde{\epsilon}_n(t)$ в момент времени t относительно положения n -го осциллятора как отношение евклидовых норм:

$$\tilde{\epsilon}_n(t) = \frac{\sum_{j=1}^N g_{-}^2(n, j, t)}{\sum_{j=1}^N g^2(n, j, t)}. \quad (7)$$

Не зависящую от времени степень асимметрии в силу периодичности движения, естественно, ввести, как

$$\epsilon_n = \max_{0 \leq t \leq 2\pi/\Omega} \tilde{\epsilon}_n(t). \quad (8)$$

Экспериментальные результаты

В экспериментах система ОДУ интегрируется методом Рунге-Кутты 4 порядка. Собственная частота $\Omega = 0.01$. Также фиксируется полуширина $\sigma = 0.1$. Начальные условия по фазам случайны. На рис. 1 на панелях (а-с) представлены мгновенные фазовые снимки в моменты времени $t = \frac{7\pi}{2\Omega}$, $\frac{6\pi}{2\Omega}$ и $\frac{5\pi}{2\Omega}$ соответственно. Синие заполненные маркеры обозначают стационарные осцилляторы, тогда как красные незаполненные обозначают движущиеся. На панели (d) изображена зависящая от времени степень асимметрии $\tilde{\epsilon}_n(t)$. Чёрными штрихованными линиями обозначены моменты времени

$t = \frac{7\pi}{2\Omega}, \frac{6\pi}{2\Omega}$ и $\frac{5\pi}{2\Omega}$ сверху вниз. Рис. 1 соответствует среднему $\mu = 0.06$ и полуширине распределения $\Delta = 0$. На рис. 2 изображено то же, но для $\mu = 0.06, \Delta = 0.06$. В свою очередь, на рис. 3 на панелях (a) и (b) изображена не зависящая от времени степень асимметрии ϵ_n как функция от n и μ при фиксированных $\Delta = 0$ и, соответственно, $\Delta = 0.06$. На панелях (c) и (d) изображена ϵ_n как функция от n и Δ при фиксированных $\mu = 0$ и, соответственно, $\mu = 0.06$.

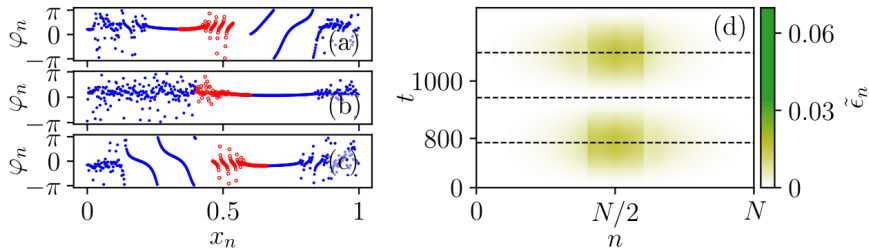


Рис. 1

Как можно видеть на рис. 1 и 2, $\tilde{\epsilon}_n(t)$ осциллирует с течением времени, достигая максимума при $\sin \Omega t = \pm 1$. При этом, реализуемый по фазам режим на рис. 2 формально можно разделить на три области: когерентную, где фазы принимают постоянные значения, градиентную, где пространственный градиент фазы практически постоянен, и некогерентную, где фазы близких осцилляторов некоррелированы между собой. Существенное различие между рис. 1 и 2 заключается в некогерентной области, которая на рис. 1 не присутствует, что подтверждается анализом соответствующих корреляций (не показано). Также различие подтверждается различными значениями $\tilde{\epsilon}_n(t)$ на рис. 1 и рис. 2.

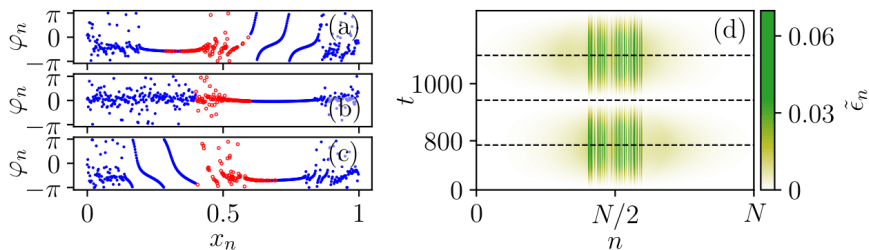


Рис. 2

На рис. 3 можно наблюдать монотонное увеличение степени асимметрии ϵ_n с увеличением μ или Δ .

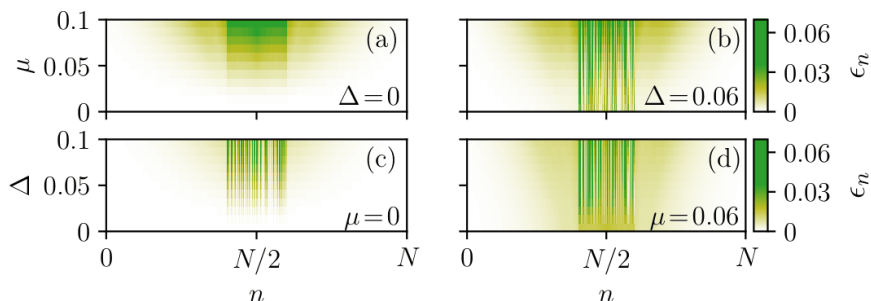


Рис. 3

Таким образом, введённый показатель асимметрии ядра разъясняет причину альтернирования получаемых фазовых режимов и уменьшения фазовой корреляции с увеличением Δ .

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект №23-12-00180-П.

- [1] Kuramoto Y., Battogtokh D. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. Vol. 5, no. 4. P. 380.
- [2] Omel'chenko O.E. // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2019. Vol. 52, no. 10. P. 104001.
- [3] Yao N., Zheng Z. // International Journal of Modern Physics B. 2016. Vol. 30, no. 7. P. 1630002.
- [4] Wolfrum M., Omel'chenko O.E. // Physical Review E. 2011. Vol. 84, no. 1. P. 015201.
- [5] Smirnov L.A., Bolotov M.I., Osipov G.V., Pikovsky A. // Physical Review E. 2021. Vol. 104, no. 3. P. 034205.
- [6] Bolotov M.I., Smirnov L.A., Munyaev V.O., Osipov G.V. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2025. Vol. 35, no. 1. P. 013139.

СРАВНЕНИЕ КОНКУРЕНТНЫХ МЕХАНИЗМОВ ОБУЧЕНИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО КЛАССИФИКАТОРА С БИОЛОГИЧЕСКИ ОБОСНОВАННОЙ МОДЕЛЬЮ ОТКЛИКА

А.А. Сутягин, О.И. Канаков

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Введение

В современном мире наблюдается повышенный интерес к задачам машинного обучения, но при этом существуют биологические системы ограниченной сложности, исследование которых также является перспективным направлением, например, создание интеллектуальных биосенсоров. Для исследования таких задач была придумана концепция коллективного классификатора [1] и получившая развитие в статьях [2], [3] и [4]. Основная идея опирается на механизмы обучения и функционирования адаптивных им иммунных систем у позвоночных (см. обзор литературы в [1], [3]), и заключена в представлении обучающей системы, как ансамбля достаточно простых элементов разных типов, но с постоянными параметрами, и имеющих при этом различные функции отклика. Неидентичность элементов, позволяет изменять суммарную функцию отклика с помощью изменения состава ансамбля. Сопоставление суммарной функции отклика с некоторым пороговым значением позволяет решать задачи классификации. В работах ранее и здесь представлены примеры задачи, ограниченной двумя классами.

Решающее правило коллективного классификатора

Решающим правилом классификатора называют функцию, отображающую множество значений входных данных на множество классов. Для максимизации эффективности классификатора используется обучение классификатора, для случая, когда условные распределения вероятностей на множестве значений признаков неизвестны. В качестве параметров коллективного классификатора могут быть использованы численности типов клеток, входящих в его состав.

Согласно обозначениям работ [3], [4], будем рассматривать ансамбль из s типов клеток. При этом каждый тип имеет свою функцию отклика $f_i(x) \geq 0$, описывающей отклик любой клетки i -го типа на входное значение x . Тогда суммарный отклик $F(x)$ и решающее правило $C(x)$ можно записать в следующем виде:

$$F(x) = \sum_{i=1}^s n_i f_i(x), \quad C(x) = \begin{cases} +, & F(x) > \theta \\ -, & F(x) \leq \theta \end{cases}, \quad (1)$$

где символы «+» и «-» — обозначают классы, а θ — порог классификации, определяемый по окончании обучения.

Модель конкуренции с подсистемой обучения

Рассмотрим модель, демонстрирующую динамику концентрации клеток i -го типа при $i = 1 \dots s$, где s — количество типов клеток:

$$\dot{n}_i = n_i \left(1 - \frac{1}{N_c} \sum_k n_k \right) - k_i \frac{n_i^2}{N_c}, \quad (2)$$

где $N_c > 0$ – параметр, определяющий суммарную численность ансамбля и именуемый «ёмкостью среды», $k_i > 0$ – коэффициенты «внутривидовой конкуренции».

Для обеспечения обучения коллективного классификатора без внешнего сортирующего устройства величины k_i рассматриваются как новые динамические переменные, динамика которых определяется обучающими примерами, о чём подробнее говорится в статье [4]. -- вход классификатора. Обучающая выборка представлена последовательностью примеров $\{\pi\}_{\alpha=1}^{N_{learn}}$, где N_{learn} – общее количество обучающих примеров, каждый из которых представляет собой пару $\pi_\alpha = (x_\alpha, c_\alpha)$, состоящую из значения признака x_α с известной меткой класс $c_\alpha \in +, -$, где «+» соответствует положительному отклику, а «-» – отрицательному. Предполагается, что примеры предъявляются последовательно в случайном порядке. Продолжительность предъявления каждого примера фиксирована и равна T_s ; а паузы между примерами отсутствуют:

$$\dot{k}_i = \begin{cases} -\tau_l^{-1} k_i, & \text{вне процесса обучения,} \\ -\tau_l^{-1} f_i(x_\alpha)(k^+ - k_i), & \text{если } c_\alpha = +, \\ -\tau_l^{-1} f_i(x_\alpha)(k^- - k_i), & \text{если } c_\alpha = -, \end{cases} \quad (3)$$

где α – номер предъявляемого в данный момент обучающего примера, τ_l – временной масштаб процесса обучения, k^+ и k^- – константы, которые соответствуют предельным значениям для $k_i(t)$ в зависимости от принадлежности обучающих примеров к тому или иному классу.

Функции отклика клеток

В качестве функции отклика будем использовать двугенную схему сенсор-отклика [1]. Конструкция состоит из двух взаимосвязанных модулей. В сенсорном модуле химический сигнал X индуцирует экспрессию транскрипционного фактора U через соответствующий промотор. В репортёрном модуле промотор регулируется фактором U нелинейным образом: максимальная активация наблюдается при промежуточных концентрациях U , тогда как высокие концентрации приводят к репрессии, что обеспечивает колоколообразный профиль ответа. Математическая модель такого отклика представлена следующим образом, а результат визуализации показан на рис. 1:

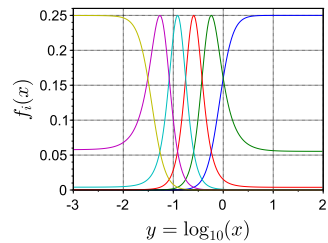


Рис. 1

$$f(x, m_u, m_g) = \frac{r_g \left(r_u(x; m_u) / \mu_u ; m_g \right)}{\mu_g}, \text{ где} \quad (4)$$

$$r_u(x; m_u) = m_u \frac{\alpha A_u^{p_u} + x^{p_u}}{A_u^{p_u} + x^{p_u}}, \quad (5)$$

$$r_g(u; m_g) = m_g \frac{A_g^{p_s} x^{p_s}}{(A_s^{p_s} + x^{p_s})^2}. \quad (6)$$

Обозначения следующие: x и u – концентрации X и U , $r_u(x)$ и $r_g(u)$ – скорости производства U и GFP, μ_u, μ_g – скорости деградации.

Обучение и тестирование классификатора. Результаты.

Для оценки работы классификатора рассматриваются две тестовые задачи, аналогичные использованным ранее [1]. В первой задаче оба класса задаются логнормальными распределениями признака x , что эквивалентно нормальному распределению логарифмической величины y . Эту задачу далее будем называть унимодальной. Во второй задаче положительный класс формируется смесью двух нормальных распределений по переменной y , тогда как отрицательный класс описывается одним нормальным распределением, максимум которого расположен между двумя максимумами положительного класса. Данный случай далее называется бимодальным. Условные плотности вероятности для обеих задач определяются выражениями:

$$w_+(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right), \quad (7)$$

$$w_-(y) = \frac{1}{\sigma_3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}. \quad (8)$$

Процесс обучения воспроизводится по схеме, предложенной в [4]. Временная ось разбивается на интервалы длительностью T_s , причём на каждом интервале предъявляется один обучающий пример $\pi_\alpha = (x_\alpha; c_\alpha)$. Метка класса выбирается случайно с равной вероятностью, после чего значение y генерируется из соответствующего распределения и преобразуется в признак x_α .

Качество классификации характеризуется вероятностью правильного ответа P . Дополнительно рассматривается оптимизация порога θ , обеспечивающая максимальное значение вероятности правильного ответа, которое обозначается через $\tilde{P}$.

При использовании оптимального момента остановки обучения стратегия селекции демонстрирует качество, сопоставимое с предлагаемым методом при оптимизации порога классификации. Без оптимизации порога новый метод может показывать более низкую точность, однако она остаётся выше случайного угадывания и превосходит асимптотический результат стратегии селекции. Данные преимущества достигаются ценой более сложной реализации, требующей механизма устойчивого сосуществования типов клеток. Наиболее перспективным способом его реализации представляется

использование систем кворум-сенсинга и их синтетических аналогов. При этом число типов клеток ограничивается количеством доступных ортогональных межклеточных сигналов, что остаётся актуальной задачей синтетической биологии.

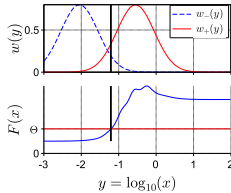


Рис. 2

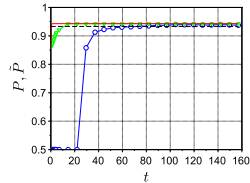


Рис. 3

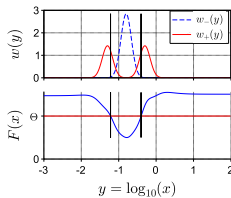


Рис. 4

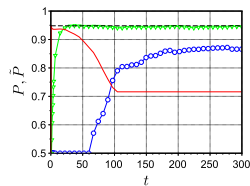


Рис. 5

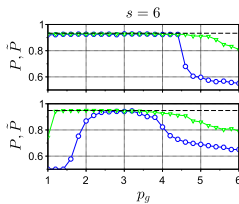


Рис. 6

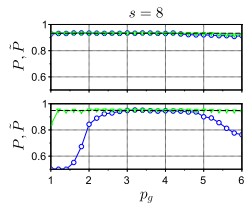


Рис. 7

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2026-0017).

- [1] Didovyk A., Kanakov O.I., Ivanchenko M.V., Hasty J., Huerta R., Tsimring L.S. // ACS Synthetic Biology. 2015. Vol. 4, no. 1. P. 72.
- [2] Kanakov O. et al. // PLoS One. 2015. Vol 10, no. 5. P. e0125144.
- [3] Сутягин А.А., Канаков О.И. // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 2. С. 220.
- [4] Сутягин А.А., Канаков О.И. // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 2. С. 160.

НЕОДНОРОДНОСТЬ КАК МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ ЦИКЛОПНЫХ СОСТОЯНИЙ В СЕТЯХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ВЫСШИМИ ГАРМОНИКАМИ СВЯЗИ

И.А. Золкин, Л.А. Смирнов, М.И. Болотов

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Сети связанных фазовых осцилляторов предоставляют каноническую основу для изучения поведения, возникающего в сложных системах. Модель Курамото и её обобщения позволили описать широкий спектр коллективных явлений. Особый интерес вызывают циклопные состояния – устойчивые трёхкластерные конфигурации, введённые в [1], где уединённый осциллятор сосуществует с двумя равновеликими фазовыми кластерами. Добавление инерции и второй гармоники в функцию связи классической модели Курамото способствует появлению нестационарных вариантов циклопных состояний, в частности, бризерных и ротобризерных [2].

Исторически синхронизация обычно изучалась при предположении идентичных или почти идентичных осцилляторов, рассматривая неоднородность и шум как разрушительные факторы. Тем не менее, неоднородность собственных частот осцилляторов может надёжно стабилизировать циклопные состояния в модели Курамото второго порядка со старшими гармониками функции связи, несмотря на то, что эти состояния неустойчивы в сетях из идентичных осцилляторов [3].

В данной работе рассматривается влияние внутреннего беспорядка на существование и устойчивость нестационарных циклопных режимов в ансамбле глобально связанных фазовых осцилляторов со старшими гармониками функции связи в случае *равномерного распределения* собственных частот.

Исследуется ансамбль глобально связанных идентичных фазовых осцилляторов с инерцией и двумя гармониками связи:

$$m\ddot{\theta}_n + \dot{\theta}_n = \omega_n + \sum_{k=1}^N \sum_{q=1}^2 \frac{\varepsilon_q}{N} \sin[q(\theta_k - \theta_n) - \alpha_q], \quad (1)$$

где θ_n – фаза n -го элемента, m – масса (инерция), ω_n – собственные частоты элементов, $0 < \alpha_q < \pi$ – фазовый сдвиг q -й гармоники связи, ε_q – сила связи (амплитуда) q -й гармоники связи, N – количество осцилляторов. Чтобы подчеркнуть общность эффектов, вызванных неидентичностью, собственные частоты ω_n выбираются из равномерного распределения: $\omega_n \sim g(\omega) = U(\omega_0 - \nu, \omega_0 + \nu)$, где ω_0 – средняя частота, которую без потери общности можно положить равной нулю.

Фазовая когерентность и синхронизация кластеров в системе (1) могут быть охарактеризованы с помощью комплексных параметров Курамото l -го порядка:

$$R_l(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{il\theta_k} = r_l e^{i\psi_l}, \quad (2)$$

где r_l и ψ_l определяют амплитуду и фазу параметра порядка $R_l(t)$.

Для исследования системы осуществляется переход во вращающуюся систему координат, что позволяет свести задачу к исследованию относительных фаз $\varphi_n(t) = \theta_n(t) - \theta_N(t)$:

$$m\ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n = \Delta_n + \sum_{q=1}^2 \operatorname{Im} \left[\frac{\varepsilon_q e^{-i\alpha_q}}{N} \left(\sum_{k=1}^{N-1} e^{iq\varphi_k} + 1 \right) (e^{-iq\varphi_n} - 1) \right], \quad (3)$$

где $\Delta_n = \omega_n - \omega_N$ – расстройки частот, $n = 1, \dots, N - 1$.

В полученной системе (3) стационарные циклопные режимы являются состояниями равновесия, бризерные циклопные режимы являются замкнутыми периодическими траекториями, ротобризерные циклопные режимы являются вращательными траекториями.

Для исследования бризерных циклопных режимов проводился поиск предельных циклов в системе (3) и анализ мультипликаторов Флоке. Поиск замкнутых траекторий осуществлялся методом стрельбы с использованием метода Ньютона-Рафсона. Было продемонстрировано, что неоднородность собственных частот способна стабилизировать неустойчивые бризерные циклопные режимы через бифуркацию Неймарка-Сакера. Рассмотрим случай при следующих фиксированных значениях параметров: $m = 1, N = 11, \alpha_1 = 1.7, \varepsilon_1 = 1.0, \alpha_2 = 2.555, \varepsilon_2 = 0.048$. Статистический бифуркационный анализ показал, что стабилизация бризерного циклопного режима происходила в среднем при $\nu \in [0.00013, 0.00021]$. На гистограммах показаны распределения значений полуширины, при которых происходит приобретение (см. рис. 1) и дальнейшая потеря (см. рис. 2) устойчивости бризерного циклопного режима.

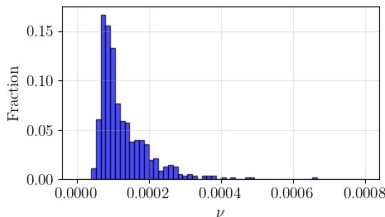


Рис. 1

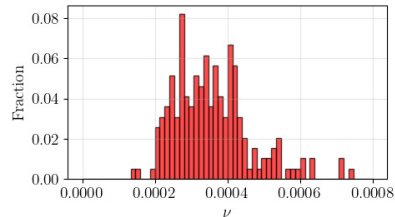


Рис. 2

Был продемонстрирован способ направленного переключения между различными типами циклопных режимов (устойчивый ротобризерный цикл, квазипериодический цикл, устойчивый бризерный цикл) посредством последовательного изменения полуширины распределения собственных частот ν . На рис. 3 и рис. 4 представлены пространственно-временная диаграмма относительных фаз и временная реализация параметров порядка (2), иллюстрирующие эволюцию системы. Исходное состояние – неустойчивый бризерный циклопный режим в системе (1), соответствующий неустойчивому предельному циклу в системе (3). При идентичных собственных частотах происходит переход на устойчивую вращательную траекторию – устойчивый ротобризерный циклопный режим. Затем полуширина кратковременно устанавливается равной $\nu =$

0.00101, после чего уменьшается до значения $\nu = 5.135 \times 10^{-5}$. В системе возникает длительный переходный процесс, по завершении которого устанавливается квазипериодический циклопный режим (наблюдается квазипериодическая динамика амплитуды параметров порядка). Далее полуширина распределения собственных частот повышается до $\nu = 0.0002$, что приводит к стабилизации устойчивого бризерного циклопного режима. Таким образом, показано, что управляемая неоднородность позволяет не только стабилизировать неустойчивые режимы, но и осуществлять контролируемое переключение между различными типами коллективной динамики в сети фазовых осцилляторов.

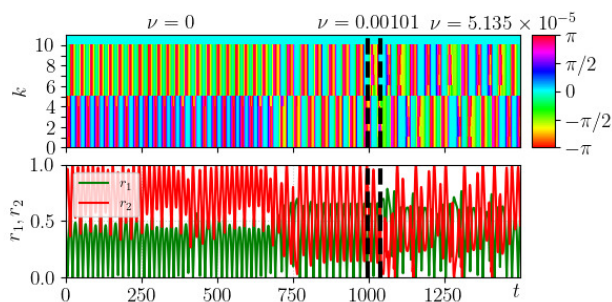


Рис. 3

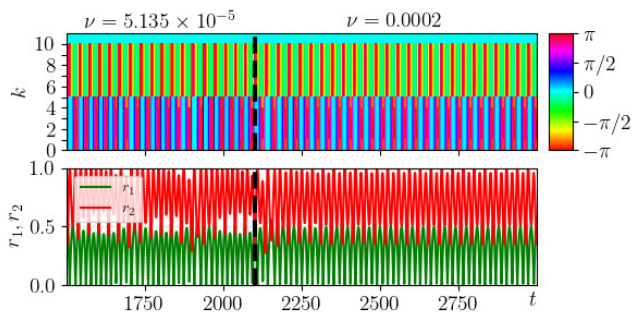


Рис. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект FSWR-2026-0007.

- [1] Munyayev V.O., Bolotov M.I., Smirnov L.A., Osipov G.V., Belykh I. // Physical Review Letters. 2023. Vol. 130. P. 107201.
- [2] Bolotov M.I., Munyayev V.O., Smirnov L.A., Osipov G.V., Belykh I. // Physical Review E. 2024. Vol. 109. P. 054202.
- [3] Bolotov M.I., Smirnov L.A., Munyayev V.O., Osipov G.V., Belykh I. // Physical Review E. 2025. Vol. 112. P. L052202.

Секция «Фундаментальные и прикладные задачи теории нелинейных колебаний»

Заседание секции проводилось 21 мая 2026 г.
Председатель – В.В. Матросов, секретарь – Н.С. Ковалева.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского.